ANNALEN
DER
PHYSIK

GEGRÜNDET 1799 DURCH F. A. C. GREN
UND FORTGEFÜHRT DURCH L. W. GILBERT,
J. G. POGGENDORFF, G. u. E. WIEDEMANN,
P. DRUDE

VIERTE FOLGE

BAND 78
DER GANZEN REIHE 383. BAND

KURATORIUM:
M. PLANCK, E. WARBURG

UNTER MITWIRKUNG
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT
HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK

MIT SIEBEN TAFELN

1925

LEIPZIG · VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH

OBERLIN
COLLEGE
LIBRARY

GAM

E.D.

Anon 7d
935
6.25

WITHDRAWN
276742
from
OBERLIN COLLEGE
LIBRARY

Inhalt.

Vierte Folge. Band 78.

Siebzehntes Heft.

Seite

1. **Richard Gans.** Mikroskopische Probleme 1
2. **K. F. Herzfeld und K. L. Wolf.** Die Dispersion von Kaliumchlorid und Natriumchlorid 35
3. **R. Wachsmuth und W. Schütz.** Der elektrodenlose Ringstrom 57
4. **F. Krüger und A. Sacklowski.** Röntgenographische Untersuchungen von wasserstoffbeladenen Palladium-Silberlegierungen. Hierzu Tafel I 72
5. **A. Becker.** Die lichtelektrische Wirkung der Gesamtstrahlung fester Körper 83
6. **S. I. Wawilow.** Bemerkung zur Arbeit von **Felix Schmieder** „Über die Ökonomiekoeffizienten der Phosphore“ 112

Ausgegeben im November 1925.

Achtzehntes Heft.

1. **F. Krüger und O. Utesch.** Über die Ozonbildung durch Elektronenstoß 113
2. **G. Jobst.** Diffuse Strahlung dielektrischer Kugeln im Grenzfalle, daß Kugelmaterial und umgebendes Medium fast gleiche Brechungsindices haben 157
3. **M. v. Laue.** Über die Röntgenstrahlinterferenzen an Mischkristallen 167
4. **Otto Blüh.** Untersuchung von Kolloidpartikeln in Wechselfeldern verschiedener Frequenzen 177
5. **K. F. Herzfeld und K. L. Wolf.** Die Molekularrefraktion einfacher Verbindungen 195
6. **Teodor Schlomka.** Bemerkungen zu Hrn. C. Ramsauers Arbeit „Über den unmittelbaren Nachweis der elektrischen Erdladung“ 204

Ausgegeben im November 1925.

Neunzehntes Heft.

Seite

1. **A. Becker.** Der Geschwindigkeitsverlust mittelschneller Kathodenstrahlen in Metallen aus direkten Messungen und aus Absorptionsversuchen. (Hierzu Tafel II und III.) 209
2. **A. Becker.** Über die Geschwindigkeit der sekundären Kathodenstrahlung 228
3. **A. Becker.** Über die Rückdiffusion, Reflexion und Sekundärstrahlerregung langsamer Kathodenstrahlen 253
4. **Fritz Kirchner.** Über die Leuchtdauer der Röntgenstrahlen. (Münchner Habilitationsschrift.) 277

Ausgegeben im November 1925.

Zwanzigstes Heft.

1. **Max Trautz und Walter Weizel.** Bestimmung der inneren Reibung des Schwefeldioxyds und seiner Gemische mit Wasserstoff 305
2. **G. J. Elias, Balth. van der Pol jr. und B. D. H. Tellegen.** Das elektrostatische Feld einer Triode 370
3. **G. Hagen.** Versuche über den Comptoneffekt. (Hierzu Taf. IV.) 407
4. **F. Kirchner.** Bemerkung zur vorstehenden Arbeit des Hrn. G. Hagen 421
5. **Werner Braunbek.** Bemerkung zur Arbeit des Hrn. Joh. Dejmek: „Wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungen zur Verzögerungszeit bei Funkenentladungen 423

Ausgegeben im Dezember 1925.

Einundzwanzigstes Heft.

1. **J. Stark.** Ein gesetzmäßiger Zusammenhang zwischen den chemischen Elementen im Effekt des elektrischen Feldes auf ihre Serienlinien 425
2. **W. Schottky.** Eine Verallgemeinerung der Fowler'schen Verteilungsstatistik 434
3. **C. H. Johansson und J. O. Linde.** Röntgenographische Bestimmung der Atomanordnung in den Mischkristallreihen Au-Cu und Pd-Cu. (Hierzu Tafel V.) 439
4. **E. Gehrcke.** Bemerkungen über die Arbeit von Hrn. **van Cittert**: „Zur Messung der Feinstruktur der Wasserstofflinien mit der Lummer-Gehrcke-Platte 461
5. **W. Tafel.** Beitrag zur Frage der Verfestigung beim Zug- und Druckversuch 465
6. **Gerold von Gleich.** Perihelbewegung bei veränderlicher Masse 498

Ausgegeben im Dezember 1925.

Zweiundzwanzigstes Heft.

Seite

1. **E. Rupp.** Über das magnetische Verhalten der Phosphore . 505
2. **G. Hansen.** Die Feinstruktur der Balmerlinien. (Hierzu Tafel VI und VII) 558

Ausgegeben im Dezember 1925.

Dreiundzwanzigstes Heft.

1. **Wilhelm Orthmann.** Über die Stoßdämpfung der Quecksilberresonanzlinie 601
2. **A. Glaser.** Über die beim Magnetismus der Gase beobachtete Anomalie 641
3. **H. Kopfermann und R. Ladenburg.** Elektrooptische Untersuchungen am Natriumdampf. (Anomale elektrische Doppelbrechung; Starkeffekt an der Resonanzstrahlung) 659
4. **Wilhelm Groth.** Eine besondere Form der Glimmentladung im transversalen Magnetfeld 680

Ausgegeben im Dezember 1925.

Vierundzwanzigstes Heft.

1. **Bernhard Gündel.** Beiträge zur Frage der Wärmekonvektion 697
2. **R. Tomaschek.** Über Versuche zur Auffindung elektrodynamischer Wirkungen der Erdbewegung in großen Höhen I 743
3. **Walter Wessel.** Sind magnetische Momente der Atomkerne durch α-Strahl-Ablenkung nachweisbar? 757

Ausgegeben im Januar 1926.

Nachweis zu den Figurentafeln.

Tafel I.	F. Krüger u. A. Sacklowski.
„ II u. III.	A. Becker.
„ IV.	G. Hagen.
„ V.	C. H. Johansson u. J. O. Linde.
„ VI u. VII.	G. Hansen.

1925. № 17.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 78.

---

1. *Mikroskopische Probleme;*

von Richard Gans.

Im folgenden sollen einige für die Bildentstehung im Mikroskop grundlegende Probleme nach der Maxwellschen Theorie, soweit das möglich ist, und wo die strenge Anwendung derselben versagt, mittels praktisch genügender Näherungen behandelt werden.

Wir werden in einigen Punkten Resultate wiederfinden, die bereits auf elementarerem Wege abgeleitet worden sind, doch werden wir in mancher Beziehung eine tiefere Einsicht in die Bedeutung der Größen gewinnen, die man früher einigermaßen vage in die Theorie eingeführt hat.

So ist es nach älteren Darstellungen vielfach nicht klar, was eigentlich die „Lichtbewegung“ oder „Lichterregung“ bedeutet. Der Versuch von Lummer und Reiche[1]), diese Größe durch Einführung von rotierenden Dipolen auf die elektrische Feldstärke zurückzuführen, scheint mir nicht recht geglückt. Durch die erwähnte Unklarheit in der Definition der grundlegenden Größen in früheren Behandlungen erklärt es sich auch, daß über die Polarisationsverhältnisse, sowie über die absolute Intensität des Lichts im Bildraum keine Angaben gemacht werden konnten.

Um in einfacher Weise das Problem in Angriff nehmen zu können, werden einige Voraussetzungen gemacht. Erstens über die physikalische Beschaffenheit des Objekts, und zwar, daß dieses ein homogener, durchsichtiger Körper sei, dessen Brechungsindex sich von dem der Umgebung (d. h. der Luft oder der Immersionsflüssigkeit) nur wenig unterscheidet. Dadurch wird die Aufgabe mittels der Maxwellschen Theorie angreifbar, und die Annahme ist insofern verhältnismäßig be-

---

1) E. Abbe, Die Lehre von der Bildentstehung im Mikroskop. Bearbeitet und herausgegeben von O. Lummer und F. Reiche Braunschweig 1910.

langlos, als die Resultate in vieler Beziehung richtig bleiben werden, wenn die Voraussetzung auch nicht erfüllt ist.

Eine weitere Annahme soll sein, daß die numerische Apertur des Objektivs so klein ist, daß wir ihre höheren Potenzen gegen 1 vernachlässigen können. Das trifft zwar in der Praxis nicht zu, doch zeigen sich die Resultate in den großen Zügen als richtig. Es liegt zwar kein zwingender Grund für diese Annahme vor — später sollen einmal genauere Formeln mitgeteilt werden —, aber die Rechnungen vereinfachen sich auf diese Weise wesentlich, so daß der Wunsch, den Gang der Ableitungen zunächst einmal klar zutage treten zu lassen, und die Gewißheit, auch so praktisch brauchbare Ergebnisse zu bekommen, hier maßgebend waren.

Besonders gehen wir auf die Theorie der Abbildung linearer Objekte ein. Wir werden eine analytische Ableitung des Siedentopfschen Azimuteffekts bringen, der in den ultramikroskopischen Methoden der Formbestimmungen eine wichtige Rolle spielt, und werden zeigen, wie man aus den Beugungsfiguren des mikroskopischen Bildes und durch seine Veränderung mittels Einführung von Blenden in den Strahlengang sichere Rückschlüsse auf die wahren Dimensionen des beobachteten Körpers machen kann. Dieses Problem ist, worauf mich Hr. Siedentopf aufmerksam gemacht hat, für astronomische Zwecke bereits 1890 von Michelson[1]) theoretisch behandelt, aber erst in neuerer Zeit auf die Messung von Sterndurchmessern praktisch angewandt worden. Die Unterschiede zwischen der mikroskopischen und der astronomischen Aufgabe liegen auf der Hand, da das von den verschiedenen Punkten eines Sterns ausgehende Licht inkohärent ist, während wir es in der Mikroskopie mit Nicht-Selbstleuchtern zu tun haben, wobei bekanntlich kohärentes Licht in Frage kommt.

§ 1. Das optische Feld eines beleuchteten Punktes.

Im unendlichen Raume τ habe die optische Dielektrizitätskonstante den Wert $\varepsilon + \Delta\varepsilon$. Dabei soll ε eine Konstante, $\Delta\varepsilon$ eine Funktion der Koordinaten sein.

---

1) A. A. Michelson, Phil. Mag. 5. 8. 1. 1890.

Ein elektromagnetisches Feld in diesem Raume muß den **Maxwellschen** Gleichungen

$$\text{(1)} \quad \left\{ \begin{aligned} c \operatorname{rot} \mathfrak{H} - \varepsilon \dot{\mathfrak{E}} &= \Delta \varepsilon \cdot \dot{\mathfrak{E}} \\ c \operatorname{rot} \mathfrak{E} + \dot{\mathfrak{H}} &= 0 \end{aligned} \right.$$

genügen.

Eine Lösung der Gleichungen (1) läßt sich durch den **Hertzschen** Vektor $\mathfrak{Z}$ folgendermaßen ausdrücken.

$$\text{(2)} \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{Z} - \frac{1}{v^2} \ddot{\mathfrak{Z}} \\ \mathfrak{H} &= \frac{c}{v^2} \operatorname{rot} \dot{\mathfrak{Z}}, \end{aligned} \right.$$

wenn

$$\text{(3)} \qquad v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$$

die Lichtgeschwindigkeit in einem Medium der D.E.K. ε bedeutet.

Die Gleichungen (2) genügen ohne weiteres der zweiten Gleichung (1), der ersten aber nur, wenn $\mathfrak{Z}$ aus der Gleichung

$$\text{(4)} \qquad \Delta \mathfrak{Z} - \frac{1}{v^2} \ddot{\mathfrak{Z}} = - \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} \mathfrak{E}$$

bestimmt wird.

Eine „Lösung" von (4) ist nach der Theorie des retardierten Potentials

$$\text{(5)} \qquad \mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_0 + \frac{1}{4 \pi \varepsilon} \int \frac{\Delta \varepsilon}{r} \, \mathfrak{E}\left(t - \frac{r}{v}\right) d\tau .$$

Hier bedeutet r den Abstand des Aufpunktes vom Volumelement $d\tau$; ferner muß $\mathfrak{E}$ zur Zeit $t - \frac{r}{v}$ genommen werden, wenn man $\mathfrak{Z}$ zur Zeit t berechnen will. $\mathfrak{Z}_0$ ist eine beliebige Lösung der Gleichung

$$\text{(6)} \qquad \Delta \mathfrak{Z} - \frac{1}{v^2} \ddot{\mathfrak{Z}} = 0,$$

in die (4) übergeht, wenn $\Delta \varepsilon$ im ganzen Raum verschwindet, d. h. wenn keine optischen Inhomogenitäten vorhanden sind. Wir können also den zweiten Term auf der rechten Seite von (5) als **Hertzschen** Vektor des durch die Inhomogenitäten erzeugten Störungsfeldes bezeichnen, während $\mathfrak{Z}_0$ der **Hertzsche** Vektor des ohne Inhomogenitäten vorhandenen primären Feldes ist.

Ist das primäre Feld z. B. eine ebene, linear polarisierte Welle, die sich in der z Richtung fortpflanzt, und parallel der x-Achse schwingt, so daß also

$$(7)\quad \begin{cases} \mathfrak{E}_{0x} = C e^{i\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)}; & \mathfrak{E}_{0y} = \mathfrak{E}_{0z} = 0 \\ \mathfrak{H}_{0x} = \mathfrak{H}_{0z} = 0; & \mathfrak{H}_{0y} = \sqrt{\varepsilon}\, C e^{i\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)}, \end{cases}$$

so gilt

$$\mathfrak{Z}_{0x} = C \frac{v^2}{\omega^2} e^{i\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)}; \quad \mathfrak{Z}_{0y} = \mathfrak{Z}_{0z} = 0,$$

wie sich mittels der Gleichungen (2) leicht bestätigen läßt.

$\mathfrak{Z}_0$ bzw. $\mathfrak{E}_0$ und $\mathfrak{H}_0$ fassen wir als gegebene Größen auf, die Beleuchtung des Objekts. Doch interessiert uns $\mathfrak{Z}_0$ nicht direkt, denn die aus ihm abgeleitete Strahlung kommt bei Dunkelfeldbeleuchtung überhaupt nicht zur Beobachtung. Indirekt geht das Primärfeld natürlich in das $\mathfrak{E}$ des zweiten Gliedes rechts von (5) ein. Wir streichen also $\mathfrak{Z}_0$ in (5) und verstehen in Zukunft unter $\mathfrak{Z}$ den Hertzschen Vektor des durch das Objekt abgebeugten Lichts, welches bei einer ultramikroskopischen Anordnung das Bild erzeugt. Dieser zweite Term der rechten Seite von (5) kann so gedeutet werden, daß das Feld $\mathfrak{E}$ in jedem Volumelement $d\tau$ einen elektrischen Dipol vom Moment

$$\frac{\Delta\varepsilon \cdot d\tau}{4\pi}\mathfrak{E}$$

erzeugt.

Als Lösungen der Gleichungen (1) kann man natürlich die Gleichungen (5) im Verein mit den Gleichungen (2) nicht ansehen, da rechts in (5) der gesuchte Vektor $\mathfrak{E}$ noch vorkommt.

Ist aber $\Delta\varepsilon$ durchweg so klein, daß man seine höheren Potenzen vernachlässigen kann, so dürfen wir das wahre Feld $\mathfrak{E}$ in (5) durch das Feld der Primärwelle $\mathfrak{E}_0$ ersetzen und erhalten dann als Lösung für das Störungsfeld den Hertzschen Vektor

$$(8)\quad \mathfrak{Z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \frac{\Delta\varepsilon}{r}\,\mathfrak{E}_0\left(t - \frac{r}{v}\right) d\tau.$$

Diesen Ausdruck wenden wir auf den Fall eines beleuchteten „Punktes“ an, d. h. wir nehmen die Dimensionen des Raumes, in welchem $\Delta\varepsilon \neq 0$ ist, als unendlich klein gegen die Wellenlänge an. Dieses Problem hat für uns eine zweifache Bedeutung. Erstens behandeln wir so die Lichtzerstreuung durch ein subultramikroskopisches Objekt (Amikron nach Siedentopf), zweitens können wir ausgedehntere Körper aus solchen „Punkten“ aufbauen.

Wählen wir einen Punkt des Volumens V, in dem $\Delta\varepsilon \neq 0$ ist, zum Ursprung des Koordinatensystems, so ergeben (7) und (8)

$$\mathfrak{Z}_x = \frac{B}{r} e^{i\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)}; \quad \mathfrak{Z}_y = \mathfrak{Z}_z = 0, \tag{9}$$

wenn wir zur Abkürzung

$$B = \frac{\Delta\varepsilon \cdot V}{4\pi\varepsilon} C \tag{10}$$

setzen.

Wir merken noch an, daß nach (7)

$$\mathfrak{J}_0 = \frac{c\sqrt{\varepsilon}}{8\pi} C^2 \tag{11}$$

die Intensität der Beleuchtung bedeutet.

§ 2. Die Abbildung durch ein Mikroskop-Objektiv.

Es ist wohl gänzlich ausgeschlossen, mit den heutigen analytischen Hilfsmitteln das elektromagnetische Feld im Bildraum streng zu berechnen, aber näherungsweise läßt sich die Lösung angeben.

Wir nehmen an, daß der auf der optischen Achse liegende „Punkt“ P durch einen Strahl S beleuchtet wird, der mit der optischen Achse AA' den Winkel β einschließt, und behandeln zuerst den Fall, daß dieser Strahl, senkrecht zur Einfallsebene schwingend, linear polarisiert sei. Unter Einfallsebene wollen wir dabei die durch den Strahl und die optische Achse bestimmte Ebene verstehen. Diese Ebene machen wir zur xz-Ebene, so daß also nur die Komponente $\mathfrak{E}_{0y}$ von Null verschieden ist.

Wir beschreiben um P eine Kugel I mit dem gegen die Wellenlänge großen Radius r, und um den konjugierten Punkt P' eine Kugel II mit dem großen Radius r'. Ferner führen wir räumliche Polarkoordinaten r, ϑ, φ, mit P als Pol im Objektraum, sowie solche r', ϑ', φ' mit P' als Pol im

Bildraum ein. Die Strahlen, welche durch ein Flächenelement $d\sigma = r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ der Kugel I gehen, mögen nach den Gesetzen der geometrischen Optik durch das Flächenelement $d\sigma' = r'^2 \sin\vartheta'\, d\vartheta'\, d\varphi'$ der Kugel II gehen.

Jetzt benutzen wir ein energetisches Prinzip, dessen sich auch Abbe in ähnlicher Form in dem zitierten Werke bedient hat. Sehen wir zunächst einmal von Energieverlusten im Objektiv durch Reflexion und Absorption ab, so muß die Strahlung durch $d\sigma$ gleich der durch $d\sigma'$ sein, und zwar soll das einzeln für die Strahlungen, die in der Einfallsebene und senkrecht zu ihr schwingen, gelten, wenn wir wieder unter Einfallsebene die Ebene verstehen, welche durch den betrachteten Strahl und die optische Achse bestimmt ist.

Nach unserer Voraussetzung über den Schwingungszustand des beleuchtenden Strahls gilt im Objektraum

$$(12)\quad \mathfrak{Z}_x = \mathfrak{Z}_z = 0; \quad \mathfrak{Z}_y = \frac{\Delta s \cdot v}{4\pi s r} C e^{i\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)} = \frac{B}{r} e^{i\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)}.$$

Daraus ergibt sich nach (2) auf der Kugel I

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_\vartheta &= \frac{k^2 B}{r} \cos(\omega t - k r) \cos\vartheta \sin\varphi \\ \mathfrak{E}_\varphi &= \frac{k^2 B}{r} \cos(\omega t - k r) \cos\varphi \end{aligned} \right.$$

für die elektrischen Vektoren der Schwingungen in der Einfallsebene und senkrecht zu ihr, wo k die Bedeutung hat

$$(14)\quad k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

(λ Wellenlänge im Objektraum).

Ferner gilt bei Kugelwellen in großer Entfernung vom Zentrum

$$(15)\quad \mathfrak{H}_\vartheta = -\sqrt{\varepsilon}\,\mathfrak{E}_\varphi; \quad \mathfrak{H}_\varphi = \sqrt{\varepsilon} \cdot \mathfrak{E}_\vartheta.$$

Nach unserem energetischen Prinzip muß also gelten

$$S\, d\sigma = S'\, d\sigma',$$

wenn S' die durch $d\sigma'$ hindurchgehende Strahlung bedeutet, oder nach (15)

$$(16)\quad \sqrt{\varepsilon}\, \overline{\mathfrak{E}^2}\, d\sigma = \sqrt{\varepsilon'}\, \overline{\mathfrak{E}'^2}\, d\sigma',$$

unter ε' die D. E. K. des Bildraums verstanden, und zwar gilt (16) für jede der beiden Schwingungsrichtungen ϑ und φ einzeln.

$\mathfrak{E}_\vartheta$ und $\mathfrak{E}_\varphi$ haben auf der Kugel I die Form

$$\mathfrak{E} = A\,\frac{\cos(\omega t - k r)}{r}, \tag{17}$$

wo die „Amplitude" A, wie ein Vergleich mit (13) lehrt, von ϑ und φ abhängt.

Im Bildraum dagegen wird auf der Kugel II innerhalb des der Objektivöffnung entsprechenden Kegels gelten

$$\mathfrak{E}' = A'\,\frac{\cos(\omega t + k' r')}{r'} \tag{17'}$$

mit $k' = \frac{2\pi}{\lambda'}$ (λ' Wellenlänge im Bildraum), da die Brechungsindizes in den beiden Räumen verschieden sind, und $k' r'$ hat das positive Vorzeichen, da die Welle auf P' zu läuft, während (17) eine von P forteilende Welle darstellt.

Dann ergibt (16)

$$\sqrt{\varepsilon}\,A^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = \sqrt{\varepsilon'}\,A'^2 \sin\vartheta'\, d\vartheta'\, d\varphi'. \tag{18}$$

Nun ist $\varphi = \varphi'$, also auch $d\varphi = d\varphi'$. Ferner ist nach der Sinusbedingung

$$\sqrt{\varepsilon} \sin\vartheta = \varkappa \sqrt{\varepsilon'} \sin\vartheta', \tag{19}$$

wo $\varkappa$ die Lateralvergrößerung bedeutet. Aus (19) folgt

$$\sqrt{\varepsilon} \cos\vartheta\, d\vartheta = \varkappa \sqrt{\varepsilon'} \cos\vartheta'\, d\vartheta', \tag{19'}$$

so daß mittels (19) und (19') aus (18) folgt

$$A' = \varkappa \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^{1/4} A \sqrt{\frac{\cos\vartheta'}{\cos\vartheta}}, \tag{20}$$

d. h. nach (16) und (17')

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{E}'_{\vartheta'} &= k^2 B \varkappa \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^{1/4} p_1(\vartheta') \sqrt{\frac{\cos\vartheta'}{\cos\vartheta}} \cos\vartheta \sin\varphi\, \frac{\cos(\omega t + k' r'}{r'}, \\ \mathfrak{E}'_{\varphi'} &= k^2 B \varkappa \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^{1/4} p_2(\vartheta') \sqrt{\frac{\cos\vartheta'}{\cos\vartheta}} \cos\vartheta\, \frac{\cos(\omega t + k' r')}{r'}. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

Wir haben den Verlusten Rechnung getragen, indem wir die empirischen Funktionen $p_1(\vartheta')$ und $p_2(\vartheta')$ hinzugefügt haben. p_1^2 und p_2^2 bedeuten also den Bruchteil der Strahlung, der durch das Objektiv hindurchkommt, wenn der Strahl im Bildraum den Winkel ϑ' mit der optischen Achse bildet, und zwar drückt p_1^2 die Transparenz für Schwingungen in der Einfallsebene, p_2^2 die für Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene aus. Diese beiden Funktionen sind verschieden, da die Verluste sich zum Teil durch Reflexionen erklären, diese aber nach den Fresnelschen Formeln von der Schwingungsrichtung abhängen.

In (21) darf man φ' anstatt φ setzen, und ϑ muß man sich mittels (19) durch ϑ' ausgedrückt denken.

Für spätere Zwecke haben wir die Gleichungen (21) allgemein abgeleitet. Jetzt machen wir die vereinfachende Annahme, daß ϑ und ϑ' durchweg so klein sind, daß wir $\cos\vartheta = \cos\vartheta' = 1$ und $p_1(\vartheta') = p_2(\vartheta') = p_0$ setzen können, wo p_0 eine Konstante ist.

Dann wird

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{E}'_{\vartheta'} &= k^2 B \varkappa \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^{1/4} p_0 \cos\vartheta' \sin\varphi' \frac{\cos(\omega t + k' r')}{r'}, \\ \mathfrak{E}'_{\varphi'} &= k^2 B \varkappa \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^{1/4} p_0 \cos\varphi' \frac{\cos(\omega t + k' r')}{r'}. \end{aligned}\right.$$

oder in kartesischen Koordinaten

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{E}'_{x'} &= -k^2 B \varkappa \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^{1/4} p_0 \frac{\cos(\omega t + k' r')}{r'} \frac{x' y'}{r'^2}, \\ \mathfrak{E}'_{y'} &= -k^2 B \varkappa \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^{1/4} p_0 \frac{\cos(\omega t + k' r')}{r'} \left(\frac{y'^2}{r'^2} - 1\right), \\ \mathfrak{E}'_{z'} &= -k^2 B \varkappa \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^{1/4} p_0 \frac{\cos(\omega t + k' r')}{r'} \frac{y' z'}{r'^2}, \end{aligned}\right.$$

d. h. das Feld im Bildraum in großer Entfernung r' von P' und innerhalb des der Objektivöffnung entsprechenden Kegels leitet sich aus dem Hertzschen Vektor ab

$$(24)\quad \mathfrak{Z}'_{x'} = \mathfrak{Z}'_{z'} = 0; \quad \mathfrak{Z}'_{y'} = \frac{B'}{r'} \cos(\omega t + k' r'),$$

wo

$$(25)\quad B' = B \varkappa p_0 \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^{3/4},$$

denn

$$\frac{x' y'}{r'^2} \frac{\cos(\omega t + k' r')}{r'} = -\frac{1}{k'^2} \frac{\partial^2}{\partial x' \partial y'} \frac{\cos(\omega t + k' r')}{r'}$$

usw. und

$$\frac{k^2}{k'^2} = \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}.$$

Schreiben wir (24) in komplexer Form, und wählen wir für die Vektoren lateinische Buchstaben, wenn wir den Faktor $e^{i\omega t}$ unterdrücken, so gilt

$$Z'_{y'} = Z' = B' \frac{e^{ik'r'}}{r'} . \tag{24'}$$

Es handelt sich jetzt darum, Z' im Bildraum, besonders in der Nähe von P', zu bestimmen. Da wir jetzt dauernd uns im Bildraum bewegen werden, lassen wir überall die Akzente fort und fügen sie zum Schluß wieder hinzu.

Das Problem ist das folgende:

Gesucht eine überall endliche und mit ihren ersten beiden Derivierten stetige Funktion Z, die der Gleichung genügt

$$\Delta Z + k^2 Z = 0, \tag{26}$$

und die für $r = \infty$ und $0 < \vartheta < \alpha$ den Wert annimmt [siehe (24')]

$$Z = B \frac{e^{ikr}}{r}, \tag{27}$$

während sie für $r = \infty$ und $\alpha < \vartheta < \pi$ Null ist, oder, besser gesagt, $\frac{e^{ikr}}{r}$ proportional ist, da in diesen Raumteil keine Einstrahlung, wohl aber Ausstrahlung stattfinden kann.

Diese Aufgabe ist von Debye¹) mittels des Greenschen Satzes gelöst worden. Er findet für den Aufpunkt x, y, z

$$Z = \frac{ikB}{2\pi} \int e^{ik \frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{R}} \, d\Omega, \tag{28}$$

wo ξ, η, ζ die Koordinaten der unendlich großen Kugelfläche vom Radius R, $d\Omega$ ein Element des körperlichen Winkels mit dem Bildpunkt P' als Spitze bedeuten, und die Integration sich über den Winkelraum erstreckt, in welchem (27) gilt.

Setzen wir

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi; \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi; \quad z = r \cos\vartheta,$$
$$\xi = R \sin\Theta \cos\Phi; \; \eta = R \sin\vartheta \sin\Phi; \; \zeta = R \cos\Theta,$$
$$d\Omega = \sin\Theta \, d\Theta \, d\Phi,$$

so wird

$$Z = \frac{ikB}{2\pi} \int_0^{\alpha} \int_0^{2\pi} e^{ikr[\sin\vartheta \sin\Theta \cos(\Phi - \varphi) + \cos\vartheta \cos\Theta]} \sin\Theta \, d\Theta \, d\Phi \tag{29}$$

---

1) P. Debye, Ann. d. Phys. (4) **30**. S. 755. 1909; vgl. auch M. v. Laue, Math. Encykl. 5. 3. Hft. 3. Art. 24. S. 439.

und durch Ausführung der Integration nach Φ

$$Z = i k B \int_0^\alpha e^{i k r \cos\vartheta \cos\Theta} J_0(k r \sin\vartheta \sin\Theta) \sin\Theta \, d\Theta . \tag{30}$$

Ist nun der Winkel α, den die Randstrahlen des Strahlenkegels mit der optischen Achse bilden, sowie der Abstand des Aufpunktes vom Bildpunkte so klein, daß α^2 und $k r \alpha^2$ gegen 1 vernachlässigt werden dürfen, oder daß $\sin\Theta = 1$; $\cos\Theta = 1$ ist, so wird

$$Z = i k B e^{i k r \cos\vartheta} \int_0^\alpha J_0(k r \sin\vartheta \cdot \Theta) \Theta \, d\Theta ,$$

oder wegen der Beziehung zwischen den Besselschen Funktionen 0ter und 1ter Ordnung

$$u J_0(u) = \frac{d}{d u} (u \cdot J_1(u))$$

$$Z = i k B \alpha^2 e^{i k r \cos\vartheta} \frac{J_1(k r \sin\vartheta \cdot \alpha)}{k r \sin\vartheta \cdot \alpha} .$$

Schließlich wollen wir noch anstatt der Kugelkoordinaten Zylinderkoordinaten durch die Substitution $r \sin\vartheta = \varrho$; $r \cos\vartheta = z$ einführen und erhalten

$$Z_x = Z_z = 0 ; \quad Z_y = Z = i k B \alpha^2 e^{i k z} \frac{J_1(k \varrho \alpha)}{k \varrho \alpha} . \tag{31}$$

Nach (2) ist

$$\left\{ \begin{aligned} E_x &= \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} ; & H_x &= - \frac{i \omega c}{v^2} \frac{\partial Z}{\partial z} ; \\ E_y &= \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + k^2 Z ; & H_y &= 0 . \end{aligned} \right. \tag{32}$$

Für kleine α ist $\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}$ gegen $k^2 Z$ zu vernachlässigen, und wir erhalten mittels (31), wenn wir die fortgelassenen Akzente wieder setzen, für die Strahlung durch die Bildebene $z' = 0$:

$$S = - S_z' = \frac{c}{4 \pi} \overline{\mathfrak{E}_{y'} \mathfrak{H}_{x'}}$$

(das negative Zeichen kommt daher, daß die z'-Achse von P' nach dem Objektiv hin weist), d. h.

$$S = \frac{c \sqrt{\varepsilon'}}{8 \pi} k'^6 B'^2 \alpha'^4 \left(\frac{J_1(k' \varrho' \alpha')}{k' \varrho' \alpha'} \right)^2 .$$

Berücksichtigen wir (25), (10) und (11), so wird schließlich

$$(33)\qquad S = \left(2\,\pi^2 \frac{\Delta\,\varepsilon}{\varepsilon}\,\frac{v}{\lambda'^3}\,\varkappa\,p_0\,\frac{n}{n'}\,\alpha'^2\right)^2 \mathfrak{J}_0 \cdot \left(\frac{J_1\left(\frac{2\,\pi\,\varrho'\,\alpha'}{\lambda'}\right)}{\frac{2\,\pi\,\varrho'\,\alpha'}{\lambda'}}\right)^2.$$

$n = \sqrt{\varepsilon}$ und $n' = \sqrt{\varepsilon'}$ sind die Brechungsindizes des Objekt- bzw. Bildraums.

Die Intensität des Bildes ist also dem Quadrat der optischen Inhomogenität $\Delta\,\varepsilon/\varepsilon$, dem Quadrat des Teilchenvolums v und der 4. Potenz der Öffnung direkt, sowie der 6. Potenz der Wellenlänge umgekehrt proportional.

Die 4. Potenz der Öffnung erklärt sich folgendermaßen: Erstens ist die Lichtmenge, die durch das Objektiv dringt, dessen Oberfläche, d. h. dem Quadrat der Öffnung proportional, zweitens wird bei kleinen Offnungen die Beugungsfigur in der Bildebene weiter auseinandergezogen und dadurch die Helligkeit verkleinert.[1])

Die Ausstrahlung eines kleinen beleuchteten Teilchens ist nach Lord **Rayleigh** bekanntlich λ^{-4} proportional. Daß die Helligkeit der Bildebene λ^{-6} proportional ist, erklärt sich durch Zusammendrängung der Beugungsringe bei kleineren Wellenlängen.

Anstatt der für den Bildraum gültigen gestrichenen Größen können wir mittels der Sinusbedingung, die in der von uns erstrebten Näherung $n\,\alpha = \varkappa\,n'\,\alpha'$ lautet, die für den Objektraum gültigen ungestrichenen einführen und erhalten

$$(33')\qquad S = \left(2\,\pi^2 \frac{\Delta\,\varepsilon}{\varepsilon}\,\frac{V}{\lambda^3}\,\frac{\alpha^2}{\varkappa}\right)^2 \mathfrak{J}_0 \left(\frac{J_1\left(\frac{2\,\pi\,\varrho\,\alpha}{\lambda}\right)}{\frac{2\,\pi\,\varrho\,\alpha}{\lambda}}\right)^2.$$

Tab. 1 gibt die Funktion $\left(\frac{J_1(s)}{s}\right)^2$, welche die örtliche Lichtverteilung in der Bildebene darstellt.

---

1) K. **Strehl**, Theorie des Fernrohrs auf Grund der Beugung des Lichts, Leipzig, 1894, besonders S. 26—28 (mir unzugänglich) soll bewiesen haben, daß die Helligkeit der Fixsternbilder der 4. Potenz der Öffnung proportional ist, was sich aus Obigem ohne weiteres erklärt, da unsere Ausführungen im wesentlichen ja auch für Selbstleuchter gelten.

Die Intensität ist Null, wenn $J_1(s)$ verschwindet. Die Werte dieser Wurzeln finden sich bei Jahnke und Emde. Die Maxima berechnen sich als Wurzeln der Gleichung

$$s\,J_0(s) - 2\,J_1(s) = 0\,.$$

Tab. 2 gibt die ersten Werte der Wurzeln für die Minima sowie Lage der Maxima und ihre Werte.

Tabelle 1.

s	$\left(\frac{J_1(s)}{s}\right)^2$	s	$\left(\frac{J_1(s)}{s}\right)^2$
0,0	0,2500	4,0	0,0003
0,5	0,2347	4,5	0,0026
1,0	0,1937	5,0	0,0043
1,5	0,1383	5,5	0,0039
2,0	0,0831	6,0	0,0021
2,5	0,0395	6,5	0,0006
3,0	0,0128	7,0	0,0000
3,5	0,0015		

Tabelle 2.

Minima	Maxima	
	s	$\left(\frac{J_1}{s}\right)^2 \cdot 10^4$
3,832	0,000	2500
7,016	5,136	43,75
10,173	8,417	14,79
13,324	11,620	4,00
16,471	14,796	1,95

Das Licht ist in der Bildebene linear polarisiert, wie sofort aus (32) folgt, und zwar schwingt es parallel dem erregenden Licht.

§ 3. Der beleuchtende Strahl schwingt in der Einfallsebene.

Schwingt der beleuchtende Strahl in der durch ihn und die optische Achse bestimmten Ebene, und ist die Amplitude des elektrischen Vektors D, so ist (vgl. (12))

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{Z}_x &= \frac{\Delta\varepsilon\cdot V}{4\pi\varepsilon r} D\cos\beta\, e^{i\omega\left(t-\frac{r}{v}\right)}; \quad \mathfrak{Z}_y = 0;\\ \mathfrak{Z}_z &= -\frac{\Delta\varepsilon\cdot V}{4\pi\varepsilon r} D\sin\beta\, e^{i\omega\left(t-\frac{r}{v}\right)}. \end{aligned}\right.$$

Da ein Dipol nicht in Richtung seiner Achse strahlt, so gibt $\mathfrak{Z}_z$ bei sehr kleinen Öffnungen, auf die wir uns ja beschränken, keine merkliche Intensität im Bildraum, und $\mathfrak{Z}_x$ ergibt eine Intensitätsverteilung, die genau gleich der im vorigen Paragraphen berechneten ist, wenn man nur den Faktor $\cos^2\beta$ hinzufügt.

Ist also die Intensität des beleuchtenden Strahls $\mathfrak{J}_1$, so wird nach (33')

$$S = \left(2\pi^2 \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \frac{V}{\lambda^2} \frac{\alpha^2}{\varkappa}\right)^2 \mathfrak{J}_1 \cos^2\beta \left(\frac{J_1\left(\frac{2\pi\varrho\alpha}{\lambda}\right)}{\frac{2\pi\varrho\alpha}{\lambda}}\right)^2. \tag{35}$$

Ist der beleuchtende Strahl natürlich und von der Intensität $\mathfrak{J}$, so daß $\mathfrak{J}_0 = \mathfrak{J}_1 = \frac{\mathfrak{J}}{2}$ wird, so ergibt sich in der Bildebene

$$S = \left(2\pi^2 \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \frac{V}{\lambda^2} \frac{\alpha^2}{\varkappa}\right)^2 \frac{1+\cos^2\beta}{2} \mathfrak{J} \left(\frac{J_1\left(\frac{2\pi\varrho\alpha}{\lambda}\right)}{\frac{2\pi\varrho\alpha}{\lambda}}\right)^2. \tag{36}$$

In dieser Formel ist einseitige Beleuchtung unter dem Einfallswinkel β vorausgesetzt. Ist die Beleuchtung allseitig und findet sie unter verschiedenen Winkeln statt, so erhält man das Resultat, wenn man in (36) noch mit $2\pi\sin\beta\, d\beta$ multipliziert und zwischen den Grenzen integriert, welche der wirksamen Öffnung des Kondensators entsprechen.

Geradlinige lineare Objekte.

§ 3. Die Welle im Objektraum und die Abbildung.

Liegt ein geradliniges lineares Objekt der Länge l so in der xy-Ebene, daß sein Mittelpunkt mit dem Koordinatenursprung 0 zusammenfällt und seine Längsachse mit der x-Achse den Winkel φ_0 bildet, und nennen wir u den Abstand irgendeines seiner Punkte von 0, seinen Querschnitt q, so ist der **Hertz**sche Vektor, welcher einer Beleuchtung unter dem Einfallswinkel β und Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene entspricht,

$$Z_x = Z_z = 0\,; \qquad Z_y = Z = C \frac{\Delta\varepsilon}{4\pi\varepsilon} q \int_{-l/2}^{+l/2} e^{-ik\sin\beta\,\xi} \frac{e^{-ikR}}{R}\, du \tag{37}$$

dabei ist ξ die x-Koordinate des betrachteten Punktes, d. h.

$$\xi = u \cos \varphi_0 .$$

Der Faktor $e^{-ik \sin \beta \cdot \xi}$ erklärt sich durch die Phasenverschiedenheit der schräg auf das Teilchen fallenden Welle in den verschiedenen Punkten des Objekts. R ist der Abstand des Aufpunktes von einem Punkte des Objekts mit den Koordinaten $\xi = u \cos \varphi_0$; $\eta = u \sin \varphi_0$. (37) stellt also einfach die Summe der Hertzschen Vektoren der einzelnen Punkte dar [siehe (8)].

Da

$$R^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2,$$

so ist genähert

$$R^2 = r^2 - 2(x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0) u , \tag{38}$$

wo $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Aus (38) folgt

$$Z = C \frac{\Delta s}{4 \pi s} q \frac{e^{-ikr}}{r} \int\limits_{-l/2}^{+l/2} e^{-ik \sin \beta \cos \varphi_0 \cdot u} \, e^{ik \frac{x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0}{r} u} \, du . \tag{39}$$

Setzen wir

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi , \qquad y = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

und

$$\gamma = \sin \vartheta \cos (\varphi - \varphi_0) - \sin \beta \cos \varphi_0 , \tag{40}$$

so ergibt sich durch Integration von (39)

$$Z = C \frac{\Delta s}{4 \pi s} V \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\sin k \gamma \frac{l}{2}}{k \gamma \frac{l}{2}} , \tag{41}$$

unter $V = q l$ das Teilchenvolumen verstanden.

Die Intensität der Strahlung ist also dem Quadrat der Größe

$$f(\vartheta_1 \varphi) = \frac{\sin k \gamma \frac{l}{2}}{k \gamma \frac{l}{2}} \tag{42}$$

proportional. Diese hat ihr Hauptmaximum für $\gamma = 0$, d. h. nach (40) für

$$\sin \vartheta \cos (\varphi - \varphi_0) = \sin \beta \cos \varphi_0 , \tag{43}$$

das bedeutet, auf der Oberfläche eines Kreiskegels, dessen Achse die Achse des linearen Teilchens ist, und auf dessen Mantel der beleuchtende Strahl liegt. Man hat es hier als mit einer

Kegelwelle zu tun, wie schon Siedentopf[1]) gefunden hat. Außerdem finden noch Maxima statt für die dem obigen Kegel konzentrischen Kegel

$$\sin\vartheta\cos(\varphi-\varphi_0)=\sin\beta\cos\varphi_0\pm\frac{\lambda\omega}{\pi l},\tag{43'}$$

wo ω eine der bekannten positiven Wurzeln der Gleichung $\operatorname{tg} u = u$ ist, unter der Bedingung, daß die rechte Seite von (43') zwischen -1 und $+1$ liegt.

Vernachlässigt man diese Nebenmaxima, so kann man nach (43) schließen, daß in ein Mikroskop der optischen Achse $\vartheta = 0$ nur dann Licht eindringen kann, wenn der Öffnungswinkel α seines Objektivs der schon von Siedentopf formulierten Bedingung genügt:

$$\sin\alpha > \sin\beta\cos\varphi_0.\tag{44}$$

Wir wollen jedoch etwas tiefer in den Vorgang der Abbildung linearer Teilchen eindringen und gehen zu dem Zweck von Formel (41) aus. Nach dieser ist die in § 2 benutzte Kugel I (vgl. Fig. 1) eine Wellenfläche für Z, und deshalb können wir ohne weiteres das energetische Prinzip, dessen wir uns früher bedient haben, wieder anwenden.

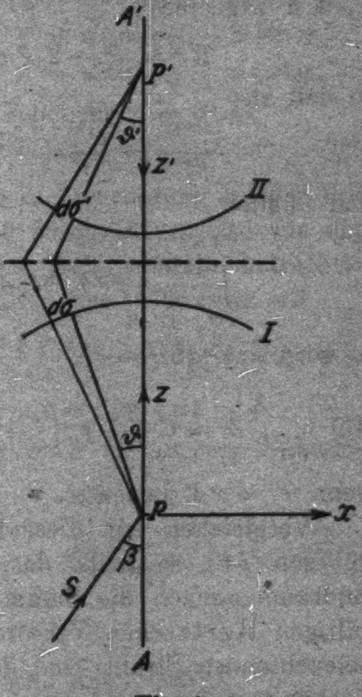


Fig. 1.

Aus

$$Z = C\frac{\Delta s}{4\pi s}V\frac{e^{-ikr}}{r}f(\vartheta,\varphi)$$

(vgl. (41) und (42)) folgt, daß im Bildraum gelten muß (vgl. (12), (24) und (25))

$$Z' = C\frac{\Delta s}{4\pi s}V\varkappa p_0\left(\frac{s}{s'}\right)^{3/4}\frac{e^{ik'r'}}{r'}f(\vartheta,\varphi).$$

---

[1]) H. Siedentopf, Ztschr. f. wiss. Mikroskopie. 29. S. 1. 1912.

Nun ist nach (40) und (42) und der Sinusbedingung (19)

$$f(\vartheta, \varphi) = f(\vartheta', \varphi'),$$

wenn wir den Winkel β' durch die Gleichung

$$n \sin \beta = \varkappa n' \sin \beta'$$

einführen. Somit folgt

$$Z' = C \frac{\Delta s}{4 \pi s} V \varkappa p_0 \left(\frac{s}{s'}\right)^{3/4} \frac{e^{i k' r'}}{r'} f(\vartheta_1' \varphi'). \tag{45}$$

Ist nun ξ', η' der dem Punkte ξ, η konjugierte Punkt und R' der Abstand eines Punktes x', y' der Kugel II vom Punkte ξ', η', d. h. (vgl. (38))

$$R'^2 = r'^2 - 2(x' \cos \varphi_0' + y' \sin \varphi_0') u',$$

so daß also

$$\frac{e^{i k' R'}}{R'} = \frac{e^{i k' r'}}{r'} e^{-i k' \left(\frac{x'}{r'} \cos \varphi'_0 + \frac{y'}{r'} \sin \varphi_0'\right) u'},$$

und folglich

$$\int\limits_{-l'/2}^{+l'/2} \frac{e^{i k' R'}}{R'} e^{i k' \xi' \sin \beta'} \, d u' = \frac{e^{i k' r'}}{r'} l' f(\vartheta_1' \varphi'),$$

so wird aus (45)

$$Z' = C \frac{\Delta s}{4 \pi s} p_0 \left(\frac{s}{s'}\right)^{3/4} \int\limits_{-l/2}^{+l/2} \frac{e^{i k' R'}}{R'} e^{i k' \xi' \sin \beta'} \, d V', \tag{46}$$

wenn $V' = \varkappa V$ bedeutet.

Vergleichen wir diese Formel mit der für einen Punkt gültigen (24'), so heißt das, daß der **Hertzsche** Vektor im Bildraum einfach die Summe der für die einzelnen „Punkte" gültigen **Hertzschen** Vektoren ist, wenn man der Phase des beleuchtenden Strahls und der Lage der konjugierten Punkte Rechnung trägt. Die etwas verwickelte Ableitung war nötig, um zu zeigen, daß die Beugungsfigur eines außerhalb der Achse liegenden Punktes Q genau dieselbe ist, wie die des auf der Achse liegenden Punktes P. Aber während die Beugungsfigur von P ihr Zentrum in dem konjugierten Punkte P' hat, hat die Beugungsfigur von Q ihres in Q', und die diesen Figuren entsprechenden Z' summieren sich einfach.

Wir können somit das für die Bildebene gültige Resultat

(31) eines Punktes sofort auf unser lineares Teilchen übertragen und erhalten, wenn wir

$$C \frac{\Delta s}{4 \pi s} p_0 \left(\frac{s}{s'}\right)^{3/4} = H'$$

setzen,

$$Z' = i\, k'\, H'\, \alpha'^2 q \int\limits_{-l'/2}^{+l'/2} \frac{J_1(k'\,\alpha'\,\varrho')}{k'\,\alpha'\,\varrho'} e^{i k' \sin \beta' \cos \varphi_0' u'} d u'. \tag{47}$$

Dabei ist

$$\varrho'^2 = (x' - \xi')^2 + (y' - \eta')^2.$$

Führen wir nun ein neues Koordinatensystem u', v' in der Bildebene ein, dessen eine Achse u mit der Längsachse des Teilchens zusammenfällt, so daß also gilt

$$\begin{aligned} x' &= U' \cos \varphi_0' - V' \sin \varphi_0', & \xi' &= u' \cos \varphi_0' - v' \sin \varphi_0', \\ y' &= U' \sin \varphi_0' + V' \cos \varphi_0', & \eta' &= u' \sin \varphi_0' + v' \cos \varphi_0', \end{aligned}$$

so wird, da für die Punkte des Teilchens $v' = 0$ ist,

$$\varrho'^2 = (U' - u')^2 + V'^2.$$

Jetzt wollen wir uns auf die Lichtverteilung auf der Teilchenachse und ihrer Verlängerung beschränken, also von dem gesamten „Lichtgebirge“ nur den Gebirgskamm betrachten. Dann wird $V' = 0$, und wir erhalten aus (47), wenn wir

$$\left\{ \begin{aligned} & k'\,\varrho'\,\alpha' = k\,\varrho\,\alpha = s; \quad && \frac{\sin \beta' \cos \varphi_0'}{\sin \alpha'} = \frac{\sin \beta \cos \varphi_0}{\sin \alpha} = g; \\ & k'\,\alpha'\,U' = X; && k'\,\alpha'\,l' = k\,\alpha\,l = L \end{aligned} \right. \tag{48}$$

setzen und berücksichtigen, daß $\sin \alpha'$ in unserer Näherung gleich α' ist,

$$Z' = i\, H'\, \alpha'\, q\, e^{i g X} \int\limits_{X - \frac{L}{2}}^{X + \frac{L}{2}} e^{-i s g} \frac{J_1(s)}{s} d s. \tag{49}$$

§ 4. Der Siedentopfsche Azimuteffekt.

Die Intensität des Bildes hängt also von dem Quadrat des Ausdrucks

$$W = \int\limits_{X - \frac{L}{2}}^{X + \frac{L}{2}} e^{-i s g} \frac{J_1(s)}{s} d s \tag{50}$$

ab, wo g, X und L durch (48) definiert sind.

Zunächst behandeln wir Teilchen, die als unendlich lang gegen die Wellenlänge gelten können, und betrachten nur Punkte, die nicht zu weit vom Teilchenzentrum entfernt sind. Dann sind die Grenzen des Integrals $-\infty$ und $+\infty$, und unter dieser Bedingung wollen wir es W_0 nennen. Da $\frac{J_1(s)}{s}$ eine gerade Funktion ist, können wir somit schreiben

$$W_0 = 2\int_0^\infty \cos g s \cdot \frac{J_1(s)}{s}\, d s. \tag{51}$$

Nun ist $\frac{J_1}{s} = J_0 - J_1'$. Setzen wir diesen Wert in (51) ein, so erhalten wir rechts zwei Integrale; das zweite formen wir durch partielle Integration um und ersetzen dann J_1 durch $-J_0'$, integrieren nochmals partiell und erhalten

$$W_0 = 2(1 - g^2)\int_0^\infty \cos g s \cdot J_0(s)\, d s. \tag{52}$$

Das in dieser Formel auftretende Integral hat nach Weber[1]) den Wert $\frac{1}{\sqrt{1-g^2}}$, wenn $g < 1$, es ist dagegen 0, wenn $g > 1$. Somit folgt

$$\left\{\begin{array}{ll} W_0 = 2\sqrt{1-g^2} & \text{für } g < 1, \\ W_0 = 0 & \text{für } g > 1. \end{array}\right. \tag{53}$$

Die Intensität des Bildes ist also Null, wenn (nach (48))

$$\sin\alpha \leq \sin\beta\cos\varphi_0. \tag{54}$$

Ist dagegen $\sin\alpha \geq \sin\beta\cos\varphi_0$, so ist sie (siehe (33))

$$S = \left(2\pi^2 \frac{\Delta s}{s}\, \frac{V}{\lambda'^2 L}\, \varkappa p_0 \frac{n}{n'} \alpha'^2\right)^2 4\left(1 - \frac{\sin^2\beta\cos^2\varphi_0}{\sin^2\alpha}\right). \tag{55}$$

Hier ist, um es noch einmal zu sagen, L die durch (48) definierte und zunächst groß vorausgesetzte „dimensionslose Länge" des Teilchens. Natürlich bleibt V/L endlich.

Um den Einfluß, den endliche, wenn auch große Länge auf das Resultat hat, abzuschätzen, berechnen wir (50) für große endliche L, beschränken uns aber auf die Mitte des Teilchens ($X = 0$).

---

[1]) H. Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der math. Physik. 5. Aufl. 1. S. 195, Braunschweig 1910.

Setzen wir für J_1 das erste Glied seiner asymptotischen Entwicklung, so erhalten wir

$$W = W_0 - 2\int\limits_{L/2}^{\infty} \cos g s \frac{J_1(s)}{s}\, d s = W_0 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{L/2}^{\infty} \frac{\cos g s \sin\left(s - \frac{\pi}{4}\right)}{s^{3/2}}\, d s$$

und durch partielle Integration und Einführung der Fresnelschen Integrale

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^s \frac{\cos z}{\sqrt{z}}\, d z\,; \qquad S = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^s \frac{\sin z}{\sqrt{z}}\, d z\,,$$

$$(56)\quad \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} W = 2\sqrt{1-g^2} - \frac{8}{\sqrt{\pi L}} \sin\left(\frac{L}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cos g \frac{L}{2} \\ \quad - 2\sqrt{2}\sqrt{1+g}\left[1 - C\left((1+g)\frac{L}{2}\right) - S\left((1+g)\frac{L}{2}\right)\right] \\ \quad - 2\sqrt{2}\sqrt{1-g}\left[1 - C\left((1-g)\frac{L}{2}\right) - S\left((1-g)\frac{L}{2}\right)\right] \end{array}\right\} g < 1 \\ \left.\begin{array}{l} W = - \frac{8}{\sqrt{\pi L}} \sin\left(\frac{L}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \cos g \frac{L}{2} \\ \quad - 2\sqrt{2}\sqrt{g+1}\left[1 - C\left((g+1)\frac{L}{2}\right) - S\left((g+1)\frac{L}{2}\right)\right] \\ \quad - 2\sqrt{2}\sqrt{g-1}\left[C\left((g-1)\frac{L}{2}\right) - S\left((g-1)\frac{L}{2}\right)\right] \end{array}\right\} g > 1 \end{array}\right.$$

Für $L = 10$ wird z. B.

Tabelle 3.

g	W	W^2	W_0^2
0,0	2,093	4,379	4,000
0,2	2,022	4,089	3,839
0,4	1,812	3,284	3,360
0,6	1,464	2,144	2,560
0,8	1,017	1,085	1,440
1,0	0,5873	0,2887	0,000
1,1	0,3082	0,0950	0,000
1,2	0,128	0,0151	0,000
1,3	− 0 012	0,0001	0,000
1,4	− 0,0946	0,0059	0,000
1,5	− 0,1290	0,0166	0,000
1,6	− 0,1223	0,0149	0 000
1,8	− 0,041	0,0017	0,000
2,0	+ 0,047	0,0022	0,000

Natürlich kann man nicht erwarten, daß die W ganz genau sind, da wir uns auf das erste Glied der asymptotischen Entwicklung von J_1 beschränkt haben. So ist z. B., wie aus dem nächsten Paragraphen folgt, für $g = 0$ der richtige Wert 2,086, während wir hier mittels unseres Näherungsverfahrens 2,093 gefunden haben.

Immerhin sieht man, daß für $L = 10$ die Berücksichtigung der Endlichkeit des Teilchens für den Azimuteffekt noch etwas ausmacht. Für geringere Längen wird das natürlich in erhöhtem Maße der Fall sein.

§ 5. Die Lichtverteilung in der Bildebene. Bestimmung der wahren Form aus der scheinbaren.

Nachdem wir die Intensität des Lichts in der Bildebene bei langen linearen Objekten nahe ihrer Mitte als Funktion des Azimuts der Beleuchtung behandelt haben, wollen wir jetzt dazu übergehen, die Lichtverteilung für Teilchen beliebiger Länge bei festem Azimut der Beleuchtung zu studieren, und zwar soll das Teilchen senkrecht zur Einfallsebene des beleuchtenden Strahls liegen, d. h. so wie man das hellste Bild bei Anwendung der Azimutblende erhält. Es ist also $\varphi_0 = \pi/2$ und somit nach (48) $g = 0$.

Da wir eine kreisrunde Öffnung vorausgesetzt haben, so gelten die Resultate für die natürliche Öffnung des Objektivs oder auch für künstliche Begrenzung der Öffnung durch Einschaltung einer kreisförmigen Blende in den Strahlengang.

Beschränken wir uns wieder auf die Punkte der Achse des Teilchens und ihrer Verlängerung, weil die Kenntnis der Lichtverteilung auf dieser Geraden, die den Kamm des Lichtgebirges dargestellt, uns schon alles wesentliche gibt, so folgt aus (49) und (50), da $g = 0$, daß, bis auf einen konstanten Faktor, Z' gleich

$$W = \int_{x-\frac{L}{2}}^{x+\frac{L}{2}} \frac{J_1(s)}{s}\, ds \tag{57}$$

ist. Das Quadrat dieses Ausdrucks gibt die Intensität.

Führen wir die Funktion ein

$$\Phi(s) = \int_0^s \frac{J_1(s)}{s}\, ds, \tag{58}$$

und berücksichtigen, daß $\frac{J_1}{s} = J_0 - J_1'$, so folgt

$$\Phi(s) = \int_0^s J_0 \cdot ds - J_1, \tag{59}$$

und aus (57) ergibt sich

$$W = \Phi\left(X + \frac{L}{2}\right) - \Phi\left(X - \frac{L}{2}\right) \cdot \tag{60}$$

Da Φ eine ungerade Funktion ist, so gilt auch

$$W = \Phi\left(\frac{L}{2} + X\right) + \Phi\left(\frac{L}{2} - X\right) \cdot \tag{60'}$$

Wir brauchen also Φ nur für positive Argumente zu berechnen und benutzen (60) für $X > \frac{L}{2}$, (60') für $X < \frac{L}{2}$. Ferner ergibt sich aus (60'), daß $W = W(X) = W(-X)$ ist. Das heißt, die Lichtverteilung ist symmetrisch zum Zentrum des Teilchens, braucht also nur für positive X berechnet zu werden.

$X > \frac{L}{2}$ oder $X < -\frac{L}{2}$ entspricht den Punkten in der Verlängerung des Teilchens, $-\frac{L}{2} < X < \frac{L}{2}$ den Punkten des Teilchens selber.

Die Funktion Φ habe ich durch numerische Quadratur nach (59) berechnet. Als Kontrolle diente mir die Formel[1])

$$\int_0^s J_0(s)\, ds = 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} J_{2\nu+1}(s)$$

für die ganzzahligen Argumente, da für diese Tafeln existieren.[2])
Es ergibt sich

---

[1]) Siehe z. B. E. Jahnke u. F. Emde, Funktionentafeln. Leipzig und Berlin 1909. S. 165.

[2]) a. a. O., S. 149.

Tabelle 4.

s	Φ	s	Φ	s	Φ	s	Φ	s	Φ
0,0	0,0000	3,0	1,0487	6,0	0,9831	9,0	1,0071	12,0	0,9974
0,1	0,0500	3,1	1,0593	6,1	0,9787	9,1	1,0098	12,1	0,9956
0,2	0,0998	3,2	1,0682	6,2	0,9747	9,2	1,0122	12,2	0,9939
0,3	0,1495	3,3	1,0755	6,3	0,9712	9,3	1,0145	12,3	0,9923
0,4	0,1987	3,4	1,0816	6,4	0,9681	9,4	1,0165	12,4	0,9907
0,5	0,2474	3,5	1,0861	6,5	0,9655	9,5	1,0183	12,5	0,9893
0,6	0,2955	3,6	1,0894	6,6	0,9634	9,6	1,0199	12,6	0,9880
0,7	0,3429	3,7	1,0915	6,7	0,9617	9,7	1,0213	12,7	0,9870
0,8	0,3895	3,8	1,0924	6,8	0,9605	9,8	1,0223	12,8	0,9860
0,9	0,4352	3,9	1,0922	6,9	0,9598	9,9	1,0231	12,9	0,9852
1,0	0,4797	4,0	1,0908	7,0	0,9593	10,0	1,0235	13,0	0,9846
1,1	0,5231	4,1	1,0888	7,1	0,9594	10,1	1,0238	13,1	0,9842
1,2	0,5653	4,2	1,0858	7,2	0,9600	10,2	1,0239	13,2	0,9839
1,3	0,6061	4,3	1,0822	7,3	0,9609	10,3	1,0237	13,3	0,9838
1,4	0,6456	4,4	1,0779	7,4	0,9623	10,4	1,0233	13,4	0,9838
1,5	0,6835	4,5	1,0730	7,5	0,9639	10,5	1,0227	13,5	0,9840
1,6	0,7199	4,6	1,0676	7,6	0,9658	10,6	1,0218	13,6	0,9843
1,7	0,7547	4,7	1,0619	7,7	0,9681	10,7	1,0207	13,7	0,9849
1,8	0,7879	4,8	1,0558	7,8	0,9705	10,8	1,0195	13,8	0,9855
1,9	0,8193	4,9	1,0494	7,9	0,9732	10,9	1,0181	13,9	0,9863
2,0	0,8489	5,0	1,0428	8,0	0,9762	11,0	1,0166	14,0	0,9872
2,1	0,8770	5,1	1,0362	8,1	0,9792	11,1	1,0149	15,0	1,0001
2,2	0,9031	5,2	1,0295	8,2	0,9823	11,2	1,0132		
2,3	0,9275	5,3	1,0230	8,3	0,9855	11,3	1,0113		
2,4	0,9501	5,4	1,0165	8,4	0,9886	11,4	1,0094		
2,5	0,9707	5,5	1,0102	8,5	0,9919	11,5	1,0074		
2,6	0,9893	5,6	1,0041	8,6	0,9950	11,6	1,0054		
2,7	1,0065	5,7	0,9983	8,7	0,9982	11,7	1,0034		
2,8	1,0220	5,8	0,9928	8,8	1,0012	11,8	1,0014		
2,9	1,0358	5,9	0,9874	8,9	1,0042	11,9	0,9995		

Mittels Tab. 4 habe ich nach Formel (60) und (60′) die Intensitätsverteilung für $L/2 = 1$; 2,6; 4 und 7 berechnet. Es ergibt sich

Tabelle 5.

$L/2 = 1$

X	W^2	X	W^2	X	W^2	X	W^2	X	W^2
0,0	0,9200	2,2	0,2529	4,4	0,0042	6,6	0,0015	8,8	0,0027
0,2	0,9116	2,4	0,1901	4,6	0,0073	6,8	0,0005	9,0	0,0022
0,4	0,8855	2,6	0,1366	4,8	0,0099	7,0	0,0000	9,2	0,0017
0,6	0,8437	2,8	0,0927	5,0	0,0116	7,2	0,0001	9,4	0,0012
0,8	0,7877	3,0	0,0584	5,2	0,0123	7,4	0,0004	9,6	0,0007
1,0	0,7211	3,2	0,0334	5,4	0,0121	7,6	0,0010	9,8	0,0003
1,2	0,6454	3,4	0,0163	5,6	0,0108	7,8	0,0016	10,0	0,0000
1,4	0,5644	3,6	0,0061	5,8	0,0089	8,0	0,0023		
1,6	0,4815	3,8	0,0011	6,0	0,0059	8,2	0,0027		
1,8	0,3999	4,0	0,0000	6,2	0,0048	8,4	0,0029		
2,0	0,3239	4,2	0,0015	6,4	0,0029	8,6	0,0029		

Tabelle 5 (Fortsetzung).

$\frac{L}{2} = 2{,}6$

X	W^2	X	W^2	X	W^2	X	W^2	X	W^2
0,0	3,917	2,4	1,306	4,8	0,0035	7,2	0,0021	9,6	0,0012
0,2	3,888	2,6	1,059	5,0	0,0002	7,4	0,0010	9,8	0,0009
0,4	3,809	2,8	0,8406	5,2	0,0004	7,6	0,0004	10,0	0,0007
0,6	3,675	3,0	0,6486	5,4	0,0021	7,8	0,0000	10,2	0,0004
0,8	3,496	3,2	0,4862	5,6	0,0044	8,0	0,0000	10,4	0,0002
1,0	3,273	3,4	0,3524	5,8	0,0063	8,2	0,0002	10,6	0,0001
1,2	3,020	3,6	0,2450	6,0	0,0075	8,4	0,0006	10,8	0,0000
1,4	2,743	3,8	0,1623	6,2	0,0078	8,6	0,0009	11,0	0,0000
1,6	2,449	4,0	0,1009	6,4	0,0073	8,8	0,0012	11,2	0,0001
1,8	2,152	4,2	0,0579	6,6	0,0062	9,0	0,0014	11,4	0,0002
2,0	1,858	4,4	0,0294	6,8	0,0048	9,2	0,0014		
2,2	1,573	4,6	0,0123	7,0	0,0034	9,4	0,0014		

$\frac{L}{2} = 4$

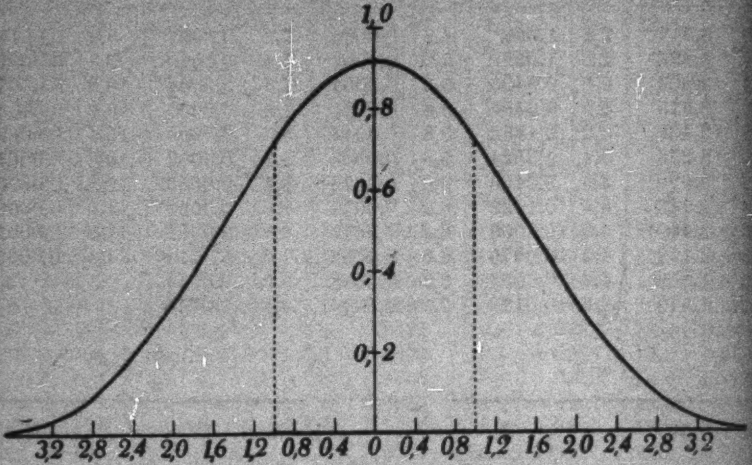
X	W^2	X	W^2
0,0	4,762	6,0	0,0305
0,5	4,662	6,5	0,0027
1,0	4,371	7,0	0,0010
1,5	3,924	7,5	0,0062
2,0	3 357	8,0	0,0087
2,5	2,719	8,5	0,0070
3,0	2,071	9,0	0,0034
3,5	1,467	9,5	0,0007
4,0	0,9528	10,0	0,0000
4,5	0,5543		
5,0	0,2781		
5,5	0,1120		

$\frac{L}{2} = 7$

X	W^2	X	W^2
0,0	3,683	4,0	4,270
0,4	3,709	4,4	3,992
0,8	3,782	4,8	3,625
1,2	3,901	5,2	3,176
1,6	4,044	5,6	2,671
2,0	4,203	6,0	2,144
2,4	4,343	6,4	1,636
2,8	4,444	6,8	1,178
3,2	4,477	7,0	0,9746
3,6	4,426	8,0	0,2708

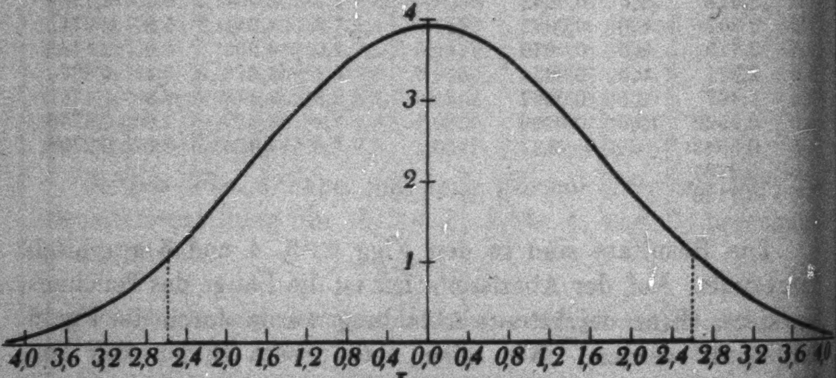
Die Resultate sind in den Figg. 2, 3, 4 und 5 graphisch dargestellt. Auf der Abszissenachse ist die Länge des Teilchens markiert. Eine objekttreue Abbildung würde durch die Fig. 6 dargestellt werden. Wir sehen, daß unsere Bilder weit von dem wahren Bild entfernt sind. Für kleine L ist die Intensitätsverteilung zwischen den Enden des Teilchens nicht sehr veränderlich, aber an beide Extreme setzt sich als Fortsetzung ein langer Lichtschwanz an, der das Teilchen länger erscheinen läßt, als es in Wirklichkeit ist. Wird L größer, so verkürzt sich dieser Schwanz verhältnismäßig, aber der Abfall der Intensität zwischen der Mitte und den Enden des Objekts wird viel markanter.

Für $\frac{L}{2} = 7$ tritt in der Mitte ein Minimum zu beid Seiten je ein Maximum auf. Dieses Minimum scheint also ein in Wahrheit nicht vorhandene Struktur zu sein. Der Wer



$\frac{L}{2} = 1$

Fig. 2.

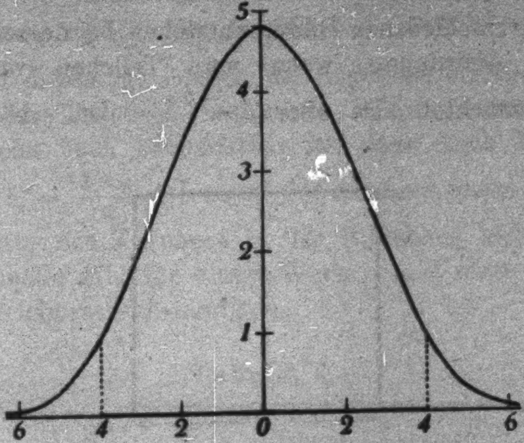


$\frac{L}{2} = 2,6$

Fig. 3.

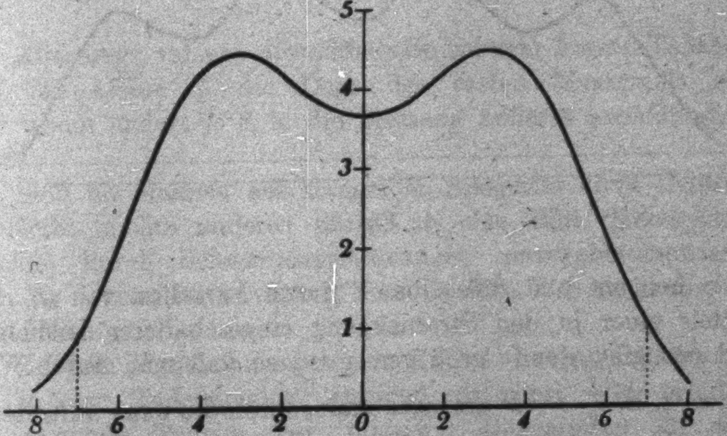
$\frac{L}{2} = 7$ ist dabei nicht willkürlich gewählt, sondern entsprich wie aus Tab. 4 hervorgeht, dem ersten Minimum der Funktion Φ Für $\frac{L}{2} = 13,35$ würden wir eine Lichtverteilung wie in Fig. erhalten. Wir erhalten also für $\frac{L}{2} = 7$ zwei Maxima, für

$\frac{L}{2} = 13{,}35$ vier Maxima usw. Roh gesprochen sind 7, 13,35 usw. die geraden Vielfachen von π, und da nach (48)



$\frac{L}{2} = 4$

Fig. 4.



$\frac{L}{2} = 7$

Fig. 5.

$L = \frac{2\pi\alpha l}{\lambda}$ ist, so können wir sagen, daß, wenn $\frac{\alpha l}{\lambda} = 2p$ ist (p ganze Zahl), in der Intensitätsverteilung über das Teilchenbild $2p$ Maxima auftreten müssen, d. h. eine gegenstandsuntreue Rippung.1)

Sowohl diese Rippung, als auch die Schwänze bei kleineren Teilchen entsprechen nicht der Wirklichkeit.

Diese verschiedenen Bilder entstehen bei derselben mikroskopischen Anordnung, wenn man Teilchen verschiedener Länge l betrachtet. Da aber $L = \frac{2\pi\alpha l}{\lambda}$ ist, erhält man sie

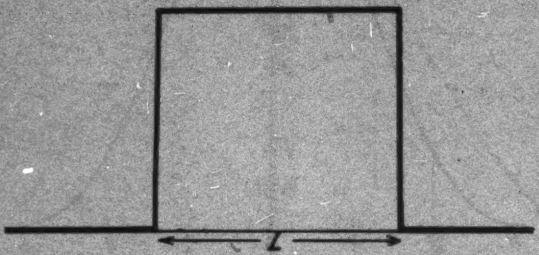


Fig. 6.

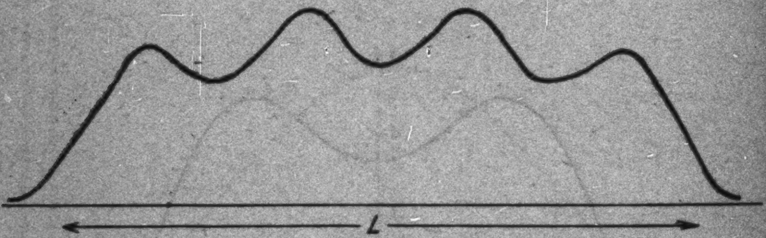


Fig. 7.

auch bei ein und demselben l durch Variation von α, etwa mittels einer in den Strahlengang eingeschalteten Irisblende, und das gibt, wenn l groß genug ist, so daß man durch Wahl von α z. B. $\frac{L}{2} = 7{,}0$ erzeugen kann, durch die dann auftretende Rippung eine Methode zur Messung von l, denn mittels des

---

1) Zwischen 7 und 13,35, d. h. bei dem Maximum $\frac{L}{2} = 10{,}2$ der Funktion Φ würde sich ein Maximum in der Mitte und zu beiden Seiten noch je ein weiteres Maximum im Innern des Teilchens ergeben, im ganzen somit drei Maxima.

der Irisblende entsprechenden α berechnet sich l nach der Formel $\frac{\pi \alpha l}{\lambda} = 7{,}0$.

Ist das Teilchen so klein, daß man auch bei der größten Blendenöffnung nicht mehr den Wert $\frac{L}{2} = 7{,}0$ erreichen kann, so läßt sich die Länge l durch die Lage des ersten Maximums außerhalb des Teilchens bestimmen, wenn dieses trotz der Lichtschwäche noch beobachtbar ist, denn nach Tab. 5 liegt dieses bei $X_1 = \frac{2\pi\alpha'}{\lambda} U'$, wo U' der Abstand dieses Maximums von der Mitte des Teilchens in der Bildebene bedeutet. Die folgende Tabelle gibt für einige Werte von L diese Lagen; sie ließe sich leicht vervollständigen.

Tabelle 6.

$\frac{L}{2}$	X_1
1,0	5,3
2,6	6,2
4,0	8,0

Allerdings versagt diese Methode bei sehr kurzen Teilchen, weil für kleine L die Lage des ersten Maximums sich sehr wenig ändert[1]), d. h. die Messung äußerst unempfindlich würde.

Sind die Maxima aus Mangel an Intensität nicht sichtbar, so bleibt nichts anderes übrig, als das Bild (Mikrophotographie) durch Schwärzungsmessungen auszuphotometrieren und die Intensitätskurve mit den in Tab. 5 berechneten zu vergleichen.

Zu dem Zweck haben wir in Tab. 7 die Intensitäten auf die in der Teilchenmitte gültigen reduziert und erhalten die folgende Tabelle der relativen Intensitäten für verschiedene L.

---

1) Es gilt die Entwicklung

$$X_1 = 5{,}136\,[1 + 0{,}004739\, L^2 + 0{,}00006776\, L^4 + \cdots].$$

Die Werte der Tab. 6 sind aus den Kurven bzw. Tab. 5 entnommen. Aus dieser Formel würden genauere Werte folgen.

Tabelle 7.

X	$\frac{L}{2} = 1,0$	$\frac{L}{2} = 2,6$	$\frac{L}{2} = 4,0$
0,0	1,0000	1,0000	1,0000
0,2	0,9908	0,9924	
0,4	0,9623	0,9723	0,9790
0,6	0,9168	0,9383	
0,8	0,8561	0,8925	
1,0	0,7838	0,8354	0,9179
1,2	0,7017	0,7709	
1,4	0,6185	0,7003	0,8289
1,6	0,5232	0,6252	
1,8	0,4347	0,5492	
2,0	0,3521	0,4742	0,7049
2,2	0,2749	0,4015	
2,4	0,2066	0,3333	0,5710
2,6	0,1485	0,2703	
2,8	0,1008	0,2146	
3,0	0,0635	0,1656	0,4349
3,2	0,0363	0,1241	
3,4	0,0177	0,0899	0,3094
3,6	0,0066	0,0625	

In der Teilchenmitte gilt

$$W = 2\,\Phi\left(\frac{L}{2}\right) + \Phi''\left(\frac{L}{2}\right) X^2,$$

und da

$$\Phi''(s) = \frac{J_0\, s - 2\, J_1}{s^3},$$

so folgt nach Tab. 2, daß in der Mitte

$$\text{Maximum für } 0 < \frac{L}{2} < 5,136,$$

$$\text{Minimum für } 5,136 < \frac{L}{2} < 8,417,$$

$$\text{Maximum für } 8,417 < \frac{L}{2} < 11,620,$$

$$\text{Minimum für } 11,620 < \frac{L}{2} < 14,796$$

usw.

Das Einstellen auf das Umschlagen der Intensität de Mitte erlaubt, die Länge des Teilchens zu bestimmen.

§ 6. Spaltförmige Blenden. Die Breite linearer Objekte.

Im vorigen Paragraphen haben wir eine kreisrunde Blend behandelt. Jetzt wollen wir uns einer spaltförmigen Blend zuwenden, deren Schneiden parallel der Teilchenachse liegen. Eine solche Blende hat erstens den Vorteil, daß die charakteristischen Erscheinungen, wie wir sehen werden, deutlicher in Erscheinung treten, zweitens daß ein variabler Spalt technisch leichter herzustellen ist, denn eine Irisblende ist nicht genau kreisförmig.

Der einem beleuchteten Punkt entsprechende Hertzsche Vektor ist mit Fortlassung der für den Bildraum gültigen Akzente sowie eines uns jetzt nicht interessierenden Amplitudenfaktors nach (28)

$$Z = \int e^{ik\frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{R}} d\Omega. \tag{61}$$

Hier dürfen wir innerhalb des Spalts $\zeta = R$; $d\Omega = \frac{d\xi\, d\eta}{R^2}$ und $R = \text{const}$ setzen, so daß für die Bildebene $z = 0$ folgt

$$Z = \frac{1}{R^2}\int\limits_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} e^{ik\frac{x\xi}{R}} d\xi \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} e^{ik\frac{y\eta}{R}} d\eta = \frac{ab}{R^2}\,\frac{\sin k\frac{a}{2R}x}{k\frac{a}{2R}x} \cdot \frac{\sin k\frac{b}{2R}y}{\sin k\frac{b}{2R}y}. \tag{62}$$

a und b sind Breite und Länge des Spalts.

Für ein lineares Teilchen der Breite d und Länge l müssen wir uns die für die einzelnen Objektpunkte gültigen Beugungsfiguren überlagert denken, so daß, wenn wir die Koordinaten der Bildpunkte der Zentren der einzelnen Beugungsfiguren mit σ, τ bezeichnen, wir für die in § 4 W genannte Amplitudenfunktion

$$W = \int\limits_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \frac{\sin k\frac{a}{2R}(x-\sigma)}{k\frac{a}{2R}(x-\sigma)}\, d\sigma \cdot \int\limits_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\sin k\frac{b}{2R}(y-\tau)}{k\frac{b}{2R}(y-\tau)}\, d\tau \tag{63}$$

erhalten.

Führen wir die Bezeichnungen ein

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{ka}{2R}(x-\sigma) = s; \qquad \frac{kb}{2R}(y-\tau) = t; \\ \frac{kax}{2R} = X, \quad \frac{kby}{2R} = Y, \quad \frac{kad}{2R} = D, \quad \frac{kbl}{2R} = L, \end{array}\right. \tag{64}$$

so wird

$$W = \frac{4R^2}{k^2ab}\int\limits_{X-\frac{D}{2}}^{X+\frac{D}{2}}\frac{\sin s}{s}\,ds\int\limits_{Y-\frac{L}{2}}^{Y+\frac{L}{2}}\frac{\sin t}{t}\,dt. \tag{65}$$

Beschränken wir uns auf die Querachse des Teilchens ($Y = 0$) so wird das zweite Integral in (65) eine Konstante, die fü sehr lange Teilchen ($L = \infty$) den Wert π annimmt. Lassen wir schließlich noch einen irrelevanten konstanten Faktor fort, so haben wir

$$W = \int\limits_{X-\frac{D}{2}}^{X+\frac{D}{2}}\frac{\sin s}{s}\,ds. \tag{66}$$

Die Intensität an einer bestimmten Stelle der Querachs des Bildes ist W^2 proportional.

In (64) bedeutet a die Breite des Spalts, R seinen Ab stand von der Bildebene, so daß $a/2R$ der wirksame Öffnungs winkel im Bildraum ist, d. h. dasselbe, was wir früher mit α bezeichnet hatten.

(66) ist ganz analog der Formel (57), nur ist die Funktio unter dem Integral wegen der anderen Blendenform eine andere.

Mit Einführung des Integralsinus

$$\Phi(s) = \int\limits_0^s\frac{\sin s}{s}\,ds \tag{67}$$

wird

$$W = \Phi\left(X + \frac{D}{2}\right) - \Phi\left(X - \frac{D}{2}\right), \tag{68}$$

oder

$$W = \Phi\left(\frac{D}{2} + X\right) + \Phi\left(\frac{D}{2} - X\right), \tag{68'}$$

genau wie in (60) und (60').

Qualitativ sind somit die Resultate den früheren sehr äh lich, jedoch treten bei linearen Teilchen unter Benutzung vo Spaltblenden die Interferenzen deutlich hervor.

Zur Berechnung der Intensitätsverteilung benutzen wi die Tafeln bei Jahnke und Emde für den Integralsinus; leide sind dieselben nicht so dicht ausgewertet, wie es für unsere Zwecke wünschenswert wäre.

Die Funktion Φ hat ungefähr für das Argument 6,3 ein Minimum, so daß für $\frac{D}{2} = 6{,}3$ die Lichtverteilung innerhalb des Teilchens in der Mitte ein von zwei Maximis eingeschlossenes Minimum haben muß, ähnlich wie in der für kreisförmige Blenden gültigen Fig. 5. Es ergibt sich z. B. für $\frac{D}{2} = 4$ und $\frac{D}{2} = 6$.

Tabelle 8.

$\frac{D}{2} = 4$

X	W^2
0	12,34
1	11,55
2	9,179
3	5,765
4	2,477
5	0,5166
6	0,0028
7	0,0731
8	0,0641
9	0,0026

$\frac{D}{2} = 6$

X	W^2
0	8,114
1	9,024
2	11,10
3	12,35
4	10,65
5	6,371
6	2,265
7	0,3061
8	0,0024
9	0,0581

Während für $\frac{D}{2} = 6$ das Maximum 1,52 mal so intensiv ist wie die Intensität der Mitte, wächst für kreisrunde Blenden die Lichtstärke nur auf das 1,21 fache im analogen Falle.

Verzichten wir auf die Kenntnis der gesamten Intensitätsverteilung, die sich mittels der Tabellen für den Integralsinus in der angegebenen Weise berechnet, so können wir folgendermaßen die Lage der Interferenzstreifen ermitteln.

Die Funktion W^2 hat einen Grenzwert für $\frac{d\,W^2}{d\,X} = 0$, d. h. für

$$(69) \qquad \frac{\sin\left(X + \frac{D}{2}\right)}{X + \frac{D}{2}} = \frac{\sin\left(X - \frac{D}{2}\right)}{X - \frac{D}{2}},$$

oder wenn wir über Kreuz multiplizieren, für

$$(70) \qquad \frac{\operatorname{tg} X}{X} = \frac{\operatorname{tg} \frac{D}{2}}{\frac{D}{2}}.$$

(69) und (70) sind nicht ganz äquivalent, denn während $X = \frac{D}{2}$ eine Wurzel von (70) ist, ist dieser Wert keine Lösung vo (69). Umgekehrt ist für jedes D $X = 0$ eine Lösung von (69 aber nicht von (70). Wir haben also für die Grenzwerte di Lösungen von (70) außer $X = \frac{D}{2}$ und außerdem $X = 0$. Dies sind innerhalb des Teilchens abwechselnd Minima und Maxima

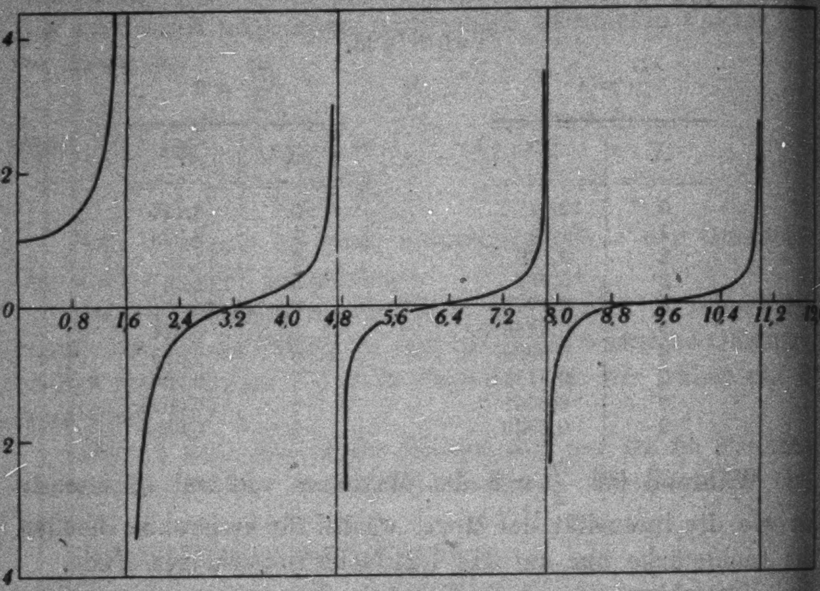


Fig. 8.

der Intensität, weil dort W immer positiv ist, während Minima $W = 0$ gegeben sind durch

$$(71) \qquad \Phi\left(X + \frac{D}{2}\right) = \Phi\left(X - \frac{D}{2}\right) \cdot$$

Für $X = 0$ gilt die Entwicklung

$$(72) \qquad W = 2\,\Phi\left(\frac{D}{2}\right) - \frac{\sin\frac{D}{2} - \frac{D}{2}\cos\frac{D}{2}}{\left(\frac{D}{2}\right)^2} X^2 + \cdots$$

Der Faktor von X^2 ändert sein Zeichen für die Wurzeln vo $\operatorname{tg}\frac{D}{2} = \frac{D}{2}$, so daß folgt: in der Mitte ist ein

$$
(73)\quad \left\{\begin{aligned}
&\text{Maximum für } 0 < \frac{D}{2} < 4{,}493\\
&\text{Minimum für } 4{,}493 < \frac{D}{2} < 7{,}725\\
&\text{Maximum für } 7{,}725 < \frac{D}{2} < 10{,}904\\
&\text{Minimum für } 10{,}904 < \frac{D}{2} < 14{,}066
\end{aligned}\right.
$$

usw. Durch Veränderung der Spaltbreite kann man auf dieses Umschlagen einstellen und dadurch D bestimmen.

Wegen (70) empfiehlt es sich, $\operatorname{tg} X/X$ als Funktion von X zu berechnen und tabellarisch sowie graphisch darzustellen (Fig. 8). Wir erhalten

Tabelle 9.

X	$\frac{\operatorname{tg} X}{X}$	X	$\frac{\operatorname{tg} X}{X}$	X	$\frac{\operatorname{tg} X}{X}$
0,0	1,0000	2,2688	− 0,5253	6,108	− 0,0289
0,1	1,0033	2,6178	− 0,2205	6,284	± 0,0000
0,2	1,0112	2,9668	− 0,0594	6,8	0,0836
0,3	1,0311	3,1416	± 0,0000	7,2	0,1812
0,4	1,0570	3,491	0,1042	7,6	0,5069
0,5	1,0927	3,840	0,2185	7,7	0,8368
0,6	1,1402	4,189	0,4135	7,725	1,0000
0,7	1,2033	4,40	0,7036	7,8	2,373
0,8	1,2870	4,45	0,8367	7,854	± ∞
0,9	1,4002	4,493	1,0000	7,92	− 1,909
1,0	1,5574	4,538	1,249	8,0	− 0,8499
1,1	1,7861	4,60	1,926	8,2	− 0,3388
1,2	2,1434	4,64	2,972	8,4	− 0,1959
1,3	2,7708	4,68	6,5975	9,425	− 0,0000
1,4	4,2157	4,7124	± ∞	10,0	0,0648
1,5	9,4010	4,84	− 1,6102	10,4	0,1419
1,5708	± ∞	4,92	− 0,9649	10,8	0,4674
1,7453	− 3,251	5,061	− 0,5428	10,904	1,0000
1,82	− 2,1590	5,410	− 0,2203	10,92	1,2094
1,9198	− 1,431	5,759	− 0,1002	10,94	1,648
				10,96	2,5756
				11,00	± ∞

Ist D gegeben, so sucht man auf der Kurve den Punkt P, der die Abszisse $D/2$ hat, und zieht durch ihn eine Parallele zur Abszissenachse. Diese schneidet die Ordinatenachse und die Kurve wegen (70) und der an die Gleichung (70) geknüpften

Bemerkungen in Punkten, deren Abszissen (außer $X = \frac{D}{2}$ selbst) die Grenzwerte geben. Links von P (innerhalb des Teilchens) entsprechen die Abszissen der Schnittpunkte abwechselnd Maximis und Minimis, und zwar ergibt (73), ob $X = 0$ ein Maximum oder Minimum ist. Rechts von P (außerhalb des Teilchens) entsprechen die Abszissen der Schnittpunkte den Maximis, während man die Minima $W = 0$ nach (71) folgendermaßen findet: Man zeichne die Kurve $\Phi(X)$ auf Koordinatenpapier, markiere auf einem Papierstreifen zwei Punkte A und B, die voneinander um D abstehen, sowie ihren Mittelpunkt C. Man verschiebe den Streifen, so daß er immer parallel der X-Achse bleibt, bis A und B auf der Kurve liegen. Dann gibt die Abszisse von C die Lage des Minimums.

Wichtiger ist das umgekehrte Problem: man beobachtet die Lage der Grenzwerte der Intensität und soll daraus D ermitteln. Dazu dient in einfacher Weise wieder Fig. 8. Ich glaube, daß weitere erläuternde Worte unnötig sind.

Trotzdem ich in dieser Arbeit nicht auf experimentelle Ergebnisse eingehen will, sei erwähnt, daß man die Erscheinungen an einem mit parallelem Licht beleuchteten Draht mit Hilfe eines photographischen Objektivs und eines Mikrometerspalts vor diesem beobachten und photographieren kann. Wichtig ist dabei, daß dieser Spalt genau zentriert wird, was sich durch die Erscheinung selbst leicht bewerkstelligen läßt.

Ebenfalls mittels des Mikroskops habe ich die zur Dickenmessung dienenden falschen Strukturen an Wollastondrähten und Quarzfäden beobachtet, doch soll, wie gesagt, hierauf an diesem Orte nicht eingegangen werden.

10. Juni 1925.

(Eingegangen 17. Juli 1925.)

2. *Die Dispersion von Kaliumchlorid und Natriumchlorid;*

von K. F. Herzfeld und K. L. Wolf.

I. Einleitung.

Die rein heteropolaren Kristalle binärer Salze, z. B. der Alkalihalogenide, sind erfahrungsgemäß aus Ionen aufgebaut. Diese Ionen entstehen nach Kossel dadurch, daß die elektronegativen Elemente durch Aufnahme von Elektronen ihre äußere Schale zu einer Achterschale, einer Edelgaskonfiguration, ergänzen, während die elektropositiven Elemente durch Abgabe ihrer Valenzelektronen auf eben eine solche abbauen. So gibt z. B. das Natrium im NaCl sein locker gebundenes Valenzelektron an das Chlor ab. Was zurückbleibt, ist ein verhältnismäßig sehr starrer Rest vom Bau des Neons. Das Elektron, das lose gebunden war und die Absorption des Metalldampfes im Sichtbaren bedingte, ist an das Anion übergegangen. Die Achterschale aber ist sehr fest, und für das Na^+ ergibt sich so eine Absorption, die viel weiter im Ultraviolett liegt.

Wir haben also in den einfachsten heteropolaren Kristallen, den Alkalihalogeniden, zwei Edelgaskonfigurationen anzunehmen. Dabei ist zu erwarten, daß die Elektronenbindung gegenüber den entsprechenden Edelgasbahnen eine Änderung erfährt. Die größere Kernladungszahl des Kations bewirkt, bei gleicher äußerer Schale, eine Verfestigung, die kleinere des Anions eine Lokerung gegenüber dem benachbarten Edelgas.

Diese Überlegungen weisen auf Zusammenhänge zwischen der Dispersion bzw. Molekularrefraktion der Edelgase und der Alkalihalogenidionen hin. Hierbei ist bei den Salzen jede dieser Größen in zwei Anteile zu zerlegen, von denen je einer einem der beiden Ionen zukommt. Dies ist möglich, denn in den unter Berücksichtigung der Lorenz-Lorentzschen Kraft abgeleiteten Formeln setzt sich die Molekularrefraktion additiv aus Anteilen der einzelnen Ionen zusammen. Die Aufteilung dieser Summe auf die einzelnen Summanden ist Fajans und Joos[1]) durch ein Abschätzungsverfahren gelungen. Die genauere Verfolgung der Dispersionskurve gibt, uns die Möglichkeit diese Aufspaltung in strenger Weise vorzunehmen. Bei KCl z. B. haben wir demnach mit den Beiträgen von K^+ und Cl^-, also zweier Argonschalen, zu rechnen, von denen eine gegenüber dem Edelgas verfestigt, die andere gelockert erscheint. Die Untersuchung verschiedener Salze setzt uns weiterhin instand, die von Fajans und Joos[2]) untersuchte gegenseitige Beeinflussung der Ionen näher zu analysieren.

Man sollte erwarten, daß die Änderung der Bindungsfestigkeit durch die veränderte Kernladungszahl die Eigenwellenlängen ändert. Die Dispersion ist aber nicht nur durch die Eigenwellenlängen der Absorptionsstellen bestimmt, sondern auch durch die in den Zählern der Formel

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} = \sum_i \frac{C_i}{\nu_i^2 - \nu^2} \quad \left(\text{wobei } C = \frac{1}{3\pi} \frac{e^2}{m} N p\right) \tag{1}$$

auftretenden Größen p, die nach der klassischen Theorie die Zahl der Dispersionselektronen im Atom bedeuten, nach der Quantentheorie aber als Übergangswahrscheinlichkeiten[3]) anzusehen sind. Die klassische Auffassung führt zu der Annahme, daß diese Elektronenzahlen für die Edelgase und die ihnen entsprechenden Ionen sich als gleich erweisen müssen, während nach der Quantentheorie diesbezügliche Aussagen sich von vornherein nicht machen lassen.

Im folgenden soll nun versucht werden, für KCl und NaCl theoretisch brauchbare Dispersionsformeln aufzustellen, sie mit den früher[4]) für die Edelgase erhaltenen zu vergleichen und so die aufgeworfenen Fragen zu beantworten.

---

[1]) K. Fajans u. G. Joos, Ztschr. f. Phys. 23. S. 1. 1924.

[2]) K. Fajans u. G. Joos, a. a. O.

[3]) Chr. Füchtbauer, Phys. Ztschr. 21. S. 322. 1920; R. Ladenburg, Ztschr. f. Phys. 4. S. 451. 1921; R. Ladenburg u. F. Reiche, Naturwissenschaften. 11. S. 584. 1923. W. Thomas, Naturw. 13. S. 627. 1925.

[4]) K. F. Herzfeld u. K. L. Wolf, Ann. d. Phys. 76. S. 71. 1925.

II. Brechungsindex und Refraktion.

Die elastischen und die älteren elektromagnetischen (Drude, Voigt) Ableitungen der Dispersionsformel geben die Abhängigkeit des Brechungsindex von der Wellenlänge (Frequenz) in der Form:1)

$$(2) \qquad n^2 - 1 = \frac{C'}{\nu'^2 - \nu^2}\,.$$

Das wird so abgeleitet, daß sich der Proportionalitätsfaktor zwischen der induzierten Polarisation eines Moleküls $\mathfrak{p}$ und der äußeren elektrischen Kraft aus den Bewegungsgleichungen zu

$$(3) \qquad \frac{e^2}{4\pi^2 m}\, p\, \frac{1}{\nu'^2 - \nu^2}$$

berechnet. Die Gesamtpolarisation in einem cm³ findet man als Summe aller Einzelpolarisationen zu

$$(4) \qquad 4\pi\mathfrak{P} = \sum 4\pi\mathfrak{p} = 4\pi\mathfrak{p}N = \frac{e^2 N}{\pi m}\, p\, \frac{1}{\nu'^2 - \nu^2}\,,$$

und da definitionsgemäß das Verhältnis von Polarisation zu äußerer Feldstärke

$$(5) \qquad \frac{4\pi\mathfrak{P}}{\mathfrak{E}} = n^2 - 1 \text{ (bzw. im statischen Fall } \varepsilon - 1\text{)}$$

ist, so folgt hieraus die Formel (2) mit

$$C' = \frac{e^2}{\pi m} N p\,;$$

die durch sie dargestellte Abhängigkeit des Brechungsindex von der Wellenlänge ist gut bestätigt.

Eine genauere Überlegung zeigt aber, daß im obigen noch ein Fehler steckt. Die „erregende Kraft“, welche auf die Einheitsladung des einzelnen Moleküls wirkt, ist nicht mit der äußeren Feldstärke identisch, sondern es kommt zur letzteren noch ein Beitrag dazu, der von den übrigen Molekülen herrührt. Dieser Beitrag, die Lorentzsche Kraft, ist bei isotropen Medien und bei regulären Kristallen (wenigstens bei Gittern von NaCl- und CsCl-Typus) gleich $\frac{4\pi}{3}\mathfrak{P}$. Die Polarisation des Einzelteilchens ist demnach

$$(3') \qquad \mathfrak{p} = \frac{e^2}{4\pi^2 m}\, p\, \frac{1}{\nu_0^2 - \nu^2}\left(\mathfrak{E} + \frac{4\pi}{3}\mathfrak{P}\right),$$

---

1) P. Drude, Optik. S. 362f. 2. Aufl. Leipzig 1906.

die der Volumeneinheit

$$4\pi\mathfrak{P} = \frac{e^2 N}{\pi m} p \frac{1}{\nu_0^2 - \nu^2}\left(\mathfrak{E} + \frac{4\pi}{3}\mathfrak{P}\right), \tag{4'}$$

und da die Definition (5) des Brechungsindex natürlich unverändert bleibt, ergibt sich für diesen die Formel

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{1}{3\pi}\frac{e^2}{m} N p \frac{1}{\nu_0^2 - \nu^2} = \frac{C}{\nu_0^2 - \nu^2}\ . \tag{2'}$$

Die linke Seite nennt man die Refraktion, nach Multiplikation mit dem Molekularvolumen die Molrefraktion, wobei rechts an Stelle von N, der Molekülzahl im cm^3, N_L, die Loschmidtsche Zahl tritt. Man findet also jetzt eine Wellenlängenabhängigkeit von derselben Form, die wir früher für $n^2 - 1$ gefunden hatten, für den Ausdruck

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}\ .$$

Das ist aber kein Widerspruch. Wie Livens[1] gezeigt hat, kann man (2′) auf die Form (2) bringen, am bequemsten so, daß man

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = 1 - \frac{3}{n^2 + 2}$$

schreibt und jetzt nach $n^2 + 2$ auflöst. Man findet dann

$$\left\{\begin{aligned} n^2 - 1 = 3\left(\frac{1}{1 - \frac{C}{\nu_0^2 - \nu^2}} - 1\right) &= \frac{3\frac{C}{\nu_0^2 - \nu^2}}{1 - \frac{C}{\nu_0^2 - \nu^2}} = \frac{3C}{\nu_0^2 - C - \nu^2} \\ &= \frac{3C}{\nu'^2 - \nu^2}, \end{aligned}\right. \tag{2''}$$

das hat wieder die Form (2), nur ist die Bedeutung der im Nenner auftretenden Eigenwellenlänge ν' eine andere. Während ν_0 die Eigenwellenlänge des freien Moleküls ist, ist die Eigenwellenlänge $\nu' = \sqrt{\nu_0^2 - C}$ im massiven Körper gegen Rot zu dadurch verschoben, daß die Moleküle durch ihre Polarisation miteinander gekoppelt sind; es ist sozusagen die Masse eines Moleküls durch das Daranhängen der anderen, die es bei seiner Schwingung mitnehmen muß, vermehrt.

Hiermit ist die Frage nach der Wellenlängenabhängigkeit geklärt, wenn nur ein einziger Absorptionsstreifen vorliegt.

---

[1] G. H. Livens, Phil. Mag. 24. 268. 1912.

Sind mehrere Absorptionsstreifen (in der klassischen Theorie: mehrere schwingungsfähige Gebilde) vorhanden, so setzt sich die Polarisation der Volumeinheit additiv aus den Einzelpolarisationen der verschiedenen Teilchen zusammen. Es gilt dann

$$(6)\qquad 4\pi\mathfrak{P} = \sum_i N_i \mathfrak{p}_i = \left(\sum \frac{e^2}{\pi m} N_i p_i \frac{1}{\nu_i^2 - \nu^2}\right)\left(\mathfrak{E} + \frac{4\pi}{3}\mathfrak{P}\right),$$

oder

$$(7)\qquad \frac{n^2-1}{n^2+2} = \sum \frac{C_i}{\nu_i^2 - \nu^2}, \qquad C_i = \frac{1}{3\pi}\frac{e^2}{m} N_i p_i.$$

Demnach setzt sich die Molekularrefraktion additiv aus den Molekularrefraktionen der einzelnen Bestandteile zusammen. Dieses Gesetz hat sich auch angenähert bei den Molrefraktionen von Salzen und bei Mischungen bewährt. Andererseits zeigt es sich, daß man die Wellenlängenabhängigkeit des Brechungsindex komplizierter gebauter Substanzen auch gut durch eine Formel von der Gestalt

$$(7')\qquad n^2 - 1 = \sum \frac{C_i'}{\nu_i'^2 - \nu^2}$$

darstellen kann, wie dies z. B. von **Drude**, **Martens** **Paschen**[1]) geschehen ist. Auch die strenge Ableitung der optischen Eigenschaften von Kristallen durch **Born**[2]) ergibt eine Formel von dieser Gestalt. Wir zeigen nun im folgenden, daß man einen Ausdruck der Form (7) stets in die Gestalt (7') bringen kann, die dann auftretenden Größen C_i', ν_i' sind aber nicht mehr einzeln bloß durch einen einzigen Bestandteil bestimmt, sondern hängen von den entsprechenden Größen C_i, ν_i aller Bestandteile und ihrer Dichte ab.

Die Umrechnung erfolgt folgendermaßen: Man ersetzt wieder $\frac{n^2-1}{n^2+2}$ durch $1 - \frac{3}{n^2+2}$ und löst nach $n^2 - 1$ auf. Das gibt

---

[1]) P. **Drude**, a. a. O., F. F. **Martens**, Ann. d. Phys. 6 S. 603. 1901. F. **Paschen**, Ann. d. Phys. 26. S. 120. 1908.

[2]) M. **Born**, Ann. d. Phys. 55. S. 177. 1918. Auch P. P. **Ewald**, Diss. München 1912.

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} n^2 - 1 &= 3\left(\frac{1}{1 - \sum\limits_i \dfrac{C_i}{\nu_i^2 - \nu^2}} - 1\right) = 3\,\frac{\sum \dfrac{C_i}{\nu_i^2 - \nu^2}}{1 - \sum \dfrac{C_i}{\nu_i^2 - \nu^2}} \\ &= 3\,\frac{{}_i\sum C_i \mathop{\Pi'}\limits_j (\nu_j^2 - \nu^2)}{\mathop{\Pi'}\limits_i (\nu_i^2 - \nu^2) - \sum C_i \mathop{\Pi'}\limits_j (\nu_j^2 - \nu^2)}. \end{aligned}\right.$$

Hierbei bedeutet Π', daß das Produkt über alle $j \neq i$ zu nehmen ist. Nun hat man einfach eine Partialbruchzerlegung dieses Ausdrucks vorzunehmen, die stets zu (7′) führt. Die Größen $\nu_i'^2$ sind die Wurzeln des Nenners von (8). Im einfachsten Fall von bloß zwei Bestandteilen

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{C_1}{\nu_1^2 - \nu^2} + \frac{C_2}{\nu_2^2 - \nu^2}$$

läßt sich die Aufgabe allgemein durchführen und liefert

$$(8')\quad \left\{\begin{aligned} n^2 - 1 &= 3\,\frac{C_1(\nu_2^2 - \nu^2) + C_2(\nu_1^2 - \nu^2)}{(\nu_1^2 - \nu^2)(\nu_2^2 - \nu^2) - C_1(\nu_2^2 - \nu^2) - C_2(\nu_1^2 - \nu^2)}, \\ \nu_{1,2}'^2 &= \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2 - C_1 - C_2}{2} \\ &\quad \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\nu_2^2 - \nu_1^2 + C_1 - C_2)^2 + 4\,C_1 C_2} \end{aligned}\right.$$

sonst muß man numerisch rechnen. So gibt z. B. die im folgenden für das KCl gefundene Formel (Ic) für die Refraktion auf $n^2 - 1$ umgerechnet 529, 1090 und 1626 Å.-E., d. h. die drei Absorptionslinien mit den Wellenlängen 514, 972, 1578, welche die Ionen ohne die Belastung durch die gegenseitige Koppelung zeigen würden, sind durch die letztere im Kristall nach rot verschoben, während die C'-Werte $C_1' = 3 \cdot 1{,}682 \cdot 10^{30}$, $C_2' = 3 \cdot 1{,}982 \cdot 10^{30}$, $C_3 = 3 \cdot 0{,}267 \cdot 10^{30}$ betragen.

III. Beobachtungsmaterial.

Neben den durch die Elektronenbewegung hervorgerufenen ultravioletten treten in den Kristallen ultrarote Eigenfrequenzen auf, die, wie zuerst Drude zeigen konnte, auf Schwingungen der Atome bzw. Ionen gegeneinander zurückzuführen sind. Für die in der Einleitung skizzierten Fragen kommen aber nur die ersteren in Betracht. Um die ultraroten brauchen wir uns nicht zu kümmern, wenn wir nur die Beobachtungen im Sichtbaren und Ultravioletten verwerten, da dort die Ionenschwingungen praktisch ohne Einfluß sind.[1]) Die Beobachtungen im Bereich längerer Wellen andererseits, zu deren Auswertung die ultraroten Schwingungen mit einbezogen werden müßten, würden die Genauigkeit der Bestimmung der ultravioletten kaum mehr verbessern, da im Ultrarot die durch die Elektronen bewirkte Dispersion bereits sehr schwach ist.

Die unter diesen Gesichtspunkten abgeleiteten Formeln sollen also die Dispersion im ultravioletten und sichtbaren Gebiet darstellen. Beobachtungen, die sich über diesen Bereich erstrecken, hat Martens[2]) für KCl und NaCl angestellt. Eine Nachprüfung[3]) seiner ersten Meßreihe bestätigte diese für KCl hinreichend genau, so daß hier die von ihm gefundenen Werte benutzt werden können. Wo zwei nahe gleiche Zahlen vorliegen, ist ein Mittelwert genommen.[4]) Von Dufet[5]), Paschen[6]), Pulfrich[7]) und Stefan[8]) gefundene Brechungsexponenten[9]) stimmen, soweit sie für dieselben Wellenlängen angegeben werden, mit den Martensschen weitgehend überein und sind insofern berücksichtigt, als in die Tabellen die Mittelwerte aufgenommen sind.

Bei NaCl erwiesen sich die ersten Messungen von Martens dagegen als mit größeren Fehlern (etwa 20 Einheiten der 5. Dezimale) behaftet, hervorgerufen durch Konvexität der Prismenflächen. Für das sichtbare Gebiet berichtigt Martens[10]) dieselben. Die Werte zwischen 2310 und 4000 Å.-E. hat er nicht neu bestimmt und begnügt sich mit der Angabe, daß sie ähnliche Fehler aufweisen dürften. Die Exponenten für noch kürzere Wellen sind nach Ansicht von Martens als genauer anzusehen, „weil hier wegen der Absorption wesentlich die an der Prismenkante (wo der Prismenwinkel etwas größer ist als an der Basis) hindurchgegangenen Strahlen zur Wirkung gelangen“, so daß hier der Prismenfehler nicht stört. In die vorliegende Arbeit sind demgemäß für den Bereich von 1854 bis 2312 Å.-E. die Messungen der ersten Arbeit von Martens aufgenommen. Zwischen 2312 und 4000 Å.-E. sind wegen der oben erklärten Unsicherheit der Martensschen Zahlen die von Borel[1]) angegebenen Exponenten benutzt, die an der kurzwelligen Grenze dieses Bereiches, wo die Messungen von Martens I noch sicher sind, sehr nahe mit diesen zusammenfallen, ebenso am langwelligen Ende (5893 Å.-E.) mit denen von Martens II, sonst aber durchweg etwas höher liegen.[2]) Zwischen 4000 und 6563 Å.-E. endlich sind die von Martens[3]) neu bestimmten Werte verwandt. Beobachtungen von Dufet, Langley[4]) und Paschen[5]) zeigen mit denselben hinreichende Übereinstimmung. Wo mehrere Zahlen nebeneinander vorliegen, sind Mittelwerte eingesetzt. Hierbei ist der ultrarote (konstante) Anteil der Refraktion abgezogen.

---

[1]) So ist in der Goldhammerschen KCl-Formel, die ja die Dispersion gut darstellt, der Einfluß des ultraroten Gliedes auf die Dispersion bis 8450 Å.-E. unmerklich (vgl. Goldhammer, Dispersion u. Absorption des Lichts. S. 65. Leipzig 1913).

[2]) F. F. Martens, Ann. d. Phys. 6. S. 603. 1901. In den Tabellen mit M_1 bezeichnet.

[3]) F. F. Martens, Ann. d. Phys. 8. S. 459. 1902. In den Tabellen mit M_2 bezeichnet.

[4]) In den Tabellen mit Mi (M_1 und $_2$) bezeichnet.

[5]) Dufet, Bull. Soc. min. 14. S. 130. 1891.

[6]) F. Paschen, Ann. d. Phys. 26. S. 120. 1908.

[7]) O. C. Pulfrich, Wied. Ann. 45. S. 639. 1892.

[8]) J. Stefan, Wien. Ber. 63. [2] S. 239. 1871.

[9]) Die auf 18° reduzierten Werte sind den Tabellen von Landolt-Börnstein, 1923, S. 914 entnommen.

[10]) F. F. Martens, a. a. O.

Die Brechungsexponenten wurden aus den in der vorigen Nummer genannten Gründen auf $\frac{n^2-1}{n^2+2}$ umgerechnet. Die Messungen selbst zeigen Fehler bis zu 5 Einheiten der 5. Dezimale. Diesen entspricht eine Ungenauigkeit der $\frac{n^2-1}{n^2+2}$ von 3 Einheiten derselben Stelle.

---

1) G. A. Borel, Compt. rend. 120. S. 1406. 1895. Arch. sc. phys. de Gen. (3) 34. S. 134. 1895.

2) Wie Martens in den Tabellen von Landolt-Börnstein, 1923 S. 913, angibt, dürften die von Borel angegebenen Zahlen bis auf einige Einheiten der 5. Dezimale sicher sein. Die in Tab. 2 eingegangenen nach Landolt-Börnstein auf 18° reduzierten Werte sind mit Bo bezeichnet.

3) Mit M_2 bezeichnet.

4) Die benutzten Werte sind den Tabellen von Landolt-Börnstein entnommen.

5) F. Paschen, Ann. d. Phys. 26. S. 120. 1908. In den Tabellen unter P.

IV. Formeldarstellung.

a) Ältere Formeln.

Formelmäßig dargestellt wurde die Dispersion von KCl und NaCl bereits von **Martens** auf Grund seiner ersten mit den schon erwähnten Fehlern behafteten Beobachtungen. Ebenso gibt **Paschen** Formeln an, wobei er sich auf seine Messungen im Sichtbaren und Ultraroten stützt und nur einige der Werte von **Martens** I im Ultraviolett benutzt, die er bei NaCl um etwa 16 Einheiten der letzten Stelle erhöht, um den ihnen anhaftenden Fehler zu eliminieren. Beide Formeln stimmen mit den Beobachtungen sehr gut überein. Sie sind abgeleitet für die Form $n^2 - 1$. Aber wie in Nummer 2 auseinandergesetzt wurde, ließen sie sich ohne weiteres auf $\frac{n^2-1}{n^2+2}$ umrechnen.

Eine Formel für $\frac{n^2-1}{n^2+2}$ hat **Goldhammer**[1]) gegeben. Sie lautet:

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} = 0{,}5141644 + \frac{0{,}00192381}{\lambda^2 - 0{,}106673^2} + \frac{0{,}0006978601}{\lambda^2 - 0{,}157500^2}$$
$$+ \frac{605{,}5582}{\lambda^2 - 51{,}009^2};$$

mit

$$p_1 = 2{,}95; \quad p_2 = 0{,}225.$$

Das konstante Glied, das bei ihm ebenso wie bei **Martens** und **Paschen** auftritt, rührt nach seiner Ansicht von soweit im Ultravioletten liegenden Eigenschwingungen her, daß sie für die Dispersion keinen Einfluß mehr haben, d. h. daß in dem Summanden $C_0/\nu_0^2 - \nu^2$ ν^2 neben ν_0^2 vernachlässigt werden kann. Bei der Genauigkeit, mit der die Rechnung geführt wird, müßte aber, wenn diese Vernachlässigung erlaubt sein soll, ν_1^2 mindestens gleich $1 \cdot 10^{34}$ sein, d. h. das zugehörige $C = 3 \cdot 10^{33}$, was zu unerträglich hohen Elektronenzahlen (etwa 2000 pro Molekül) führen würde. Wir müssen daher versuchen, Formeln ohne konstante Glieder zu geben.

---

[1]) D. A. **Goldhammer**, Dispersion und Absorption des Lichtes. Leipzig. 1913. S. 65.

b) Neue Formeln.

KCl.

Die Dispersion von KCl zwischen 1854 und 6503 Å.-E. wird wiedergegeben durch die Gleichung

$$\text{(I a)}\quad \left\{\begin{aligned} \frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{4{,}7660 \cdot 10^{30}}{86070 \cdot 10^{27} - \nu^2} &+ \frac{1{,}8285 \cdot 10^{30}}{9360{,}5 \cdot 10^{27} - \nu^2} \\ &+ \frac{0{,}11043 \cdot 10^{30}}{3624{,}3 \cdot 10^{27} - \nu^2}, \end{aligned}\right.$$

d. h. die Zähler aufs Mol gerechnet

$$C_1 = 17{,}88 \cdot 10^{31}, \qquad C_2 = 6{,}86 \cdot 10^{31}, \qquad C_3 = 0{,}414 \cdot 10^{31}.$$

Dabei ist

$$\lambda_1 = 323{,}4\ \text{Å.-E.}, \qquad \lambda_2 = 980{,}6\ \text{Å.-E.}, \qquad \lambda_3 = 1575{,}8\ \text{Å.-E},$$

$$p_1 = 10{,}96, \qquad p_2 = 4{,}21, \qquad p_3 = 0{,}25.$$

Die Formel zeigt, wie aus Tab. 1 zu ersehen ist, einen deutlichen Gang gegen die Beobachtungen, wie er ähnlich und mit derselben prozentischen Maximalabweichung sich bei **Argon**[1]) findet. Das erste Glied von (I a) trägt zur Refraktion nur wenig (etwa 10—20 Proz.), zur Dispersion fast nichts bei (Differenz der Werte bei 1854 und 6503 Å.-E. = 0,00060). Das bedeutet, daß das ν^2 im Nenner nicht sehr viel ausmacht. Daher ist das erste Glied gegen gleichzeitige entsprechende Änderungen von Zähler und Nenner sehr unempfindlich. Demgemäß sind die aus ihm erhaltenen Werte von p_1 und λ_1 in weiten Grenzen dehnbar, während λ_2 und λ_3 nur kleine Änderungen (etwa innerhalb eines Bereiches von 10 Å.E.) zulassen. Ebenso sind p_2 und p_3 auf wenige Prozente genau bestimmt.

Dem Cl^- kommen, wie weiter unten näher ausgeführt werden soll, die beiden Eigenschwingungen λ_2 und λ_3 zu; da sich das dritte Glied nicht vernachlässigen läßt, so heißt das, daß die Dispersion von Cl^- nur durch eine Gleichung vom Bau der zweigliedrigen Argonformel[2]) (3 b) dargestellt werden kann. Versucht man den Beitrag des Anions durch eine eingliedrige Formel wiederzugeben, so läßt sich das mit einiger Genauigkeit nur dann erreichen, wenn man das unter-

---

[1]) **K. F. Herzfeld u. K. L. Wolf**, a. a. O.

[2]) **K. F. Herzfeld u. K. L. Wolf**, a. a. O.

Tabelle 1.

λ Å.-E.	$\frac{n^2-1}{n^2+2}$ beob.	$\frac{n^2-1}{n^2+2}$ ber. nach Formel (I a)	Diff. ber. beob. $\cdot 10^5$	$\frac{n^2-1}{n^2+2}$ ber. nach Formel (I b)	Diff. ber. beob. $\cdot 10^5$	$\frac{n^2-1}{n^2+2}$ ber. nach Formel (I c)	Diff. ber. beob. $\cdot 10^5$	
1854	0,43800	0,43806	+ 6	0,43813	+ 13	0,43800	+ 0	M_1
1862	0,43469	0,43469	0	0,43475	+ 6	0,43468	− 1	„
1977	0,39962	0,39941	− 21	0,39939	− 23	0,39935	− 27	„
2000	0,39439	0,39419	− 20	0,39417	− 22	0,39416	− 23	„
2044	0,38570	0,38552	− 18	0,38553	− 17	0,38552	− 18	„
2110	0,37475	0,37464	− 11	0,37468	− 10	0,37466	− 9	„
2144	0,36997	0,36987	− 10	0,36989	− 8	0,36991	− 6	„
2194	0,36358	0,36357	− 1	0,36362	+ 4	0,36363	+ 5	„
2312	0,35144	0,35150	+ 6	0,35155	+ 11	0,35158	+ 14	„
2573	0,33336	0,33355	+ 19	0,33362	+ 26	0,33354	+ 18	„
2748	0,32516	0,32537	+ 21	0,32543	+ 27	0,32546	+ 30	„
2816	0,32254	0,32276	+ 22	0,32281	+ 27	0,32285	+ 31	„
3082	0,31438	0,31458	+ 20	0,31462	+ 24	0,31466	+ 28	„
3403	0,30753	0,30767	+ 14	0,30769	+ 16	0,30772	+ 19	„
3944	0,30014	0,30021	+ 7	0,30019	+ 5	0,30024	+ 10	„
4415	0,29601	0,29607	+ 6	0,29600	− 1	0,29606	+ 5	Mi M_1 und ,
4861	0,29329	0,29328	− 1	0,29323	− 6	0,29333	+ 2	M_1 oder Mi M_1-Pulfrich-Stefan
5461	0,29067	0,29065	− 2	0,29054	− 13	0,29060	− 7	M_1
5893	0,28930	0,28927	− 3	0,28917	− 13	0,28920	− 9	Mi Dufel-M_1-Pulfrich-Stefan
6438	0,28795	0,28790	− 5	0,28777	− 18	0,28784	− 11	Mi M_1 und ,
6563	0,28771	0,28764	− 7	0,28752	− 19	0,28759	− 12	M_1 oder Mi M_1-Pulfrich-Stefan

suchte Gebiet in verschiedene Abschnitte zerlegt und deren jedem ein besonderes λ_0 und p_0 zuordnet. Ein Beispiel einer solchen Darstellung soll beim NaCl gegeben werden.

Es fragt sich nun noch, wie man λ_1 und p_1 in (I a) innerhalb der ziemlich weiten Grenzen wählen soll. Wie später näher ausgeführt wird, erscheint es zweckmäßig, p_1 in Anlehnung an p_2 und an die Argonformel[1]) (3 b) gleich 4,6 zu setzen. Von den auf diesem Wege ableitbaren Formeln sind hier 2 angegeben, die sich den Beobachtungen möglichst eng anschließen, und erkennen lassen, daß auch λ_2 und λ_3 sowie p_2 und p_3 sich etwas, aber eben nur wenig, variieren lassen.

$$\text{(I b)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{2{,}0047 \cdot 10^{30}}{33990 \cdot 10^{27} - \nu^2} &+ \frac{1{,}8213 \cdot 10^{30}}{9467{,}5 \cdot 10^{27} - \nu^2} \\ &+ \frac{0{,}10678 \cdot 10^{30}}{3603{,}8 \cdot 10^{27} - \nu^2} \end{aligned} \right.$$

d. h. aufs Mol gerechnet

$C_1 = 7{,}53 \cdot 10^{31}$ $C_2 = 6{,}83 \cdot 10^{31}$ $C_3 = 0{,}40 \cdot 10^{31}$
$\lambda_1 = 514{,}6$ Å.-E. $\lambda_2 = 975{,}0$ Å.-E. $\lambda_3 = 1580{,}3$ Å.-E.
$p_1 = 4{,}61$ $p_2 = 4{,}19$ $p_3 = 0{,}25$.

$$\text{(I c)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{1{,}9968 \cdot 10^{30}}{33999 \cdot 10^{27} - \nu^2} &+ \frac{1{,}8297 \cdot 10^{30}}{9525{,}8 \cdot 10^{27} + \nu^2} \\ &+ \frac{0{,}10886 \cdot 10^{30}}{3613{,}7 \cdot 10^{27} - \nu^2} \end{aligned} \right.$$

mit

$C_1 = 7{,}50 \cdot 10^{31}$ $C_2 = 6{,}86 \cdot 10^{31}$ $C_3 = 0{,}41 \cdot 10^{31}$
$\lambda_1 = 515{,}0$ Å.-E. $\lambda_2 = 972{,}0$ Å.-E. $\lambda_3 = 1578{,}1$ Å.-E.
$p_1 = 4{,}60$ $p_2 = 4{,}21$ $p_3 = 0{,}25$.

Beide stellen die Beobachtungen, wie Tab. 1 zeigt, in derselben Art dar wie (I a).

NaCl.

Die Brechungsexponenten von NaCl gibt Formel II a wieder:

$$\text{(II a)} \quad \frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{3{,}4817 \cdot 10^{30}}{185967 \cdot 10^{27} - \nu^2} + \frac{2{,}6554 \cdot 10^{30}}{10295 \cdot 10^{27} - \nu^2} + \frac{0{,}11530 \cdot 10^{30}}{3791{,}1 \cdot 10^{27} - \nu^2}.$$

Aufs Mol gerechnet:

$C_1 = 92{,}7 \cdot 10^{31}$, $C_2 = 7{,}18 \cdot 10^{31}$, $C_3 = 0{,}31 \cdot 10^{31}$,
$\lambda_1 = 220{,}0$ Å.-E., $\lambda_2 = 935{,}0$ Å.-E., $\lambda_3 = 1540{,}8$ Å.-E.,
$p_1 = 5{,}69$, $p_2 = 4{,}40$, $p_3 = 0{,}19$.

---

[1]) K. F. Herzfeld u. K. L. Wolf, a. a. O.

Wie bei KCl zeigt sich auch hier ein Gang gegen die Beobachtungen. Der Anteil des ersten Gliedes an der Refraktion (etwa 4—6 Proz.) und Dispersion ist noch kleiner als dort, so daß λ_1 und p_1 sehr weitgehend variiert werden können, während die möglichen Änderungen von λ_2 und λ_3 wieder auf einen Bereich von etwa 10 Å.-E. beschränkt bleiben. In Anlehnung an die früher[1]) gefundene Neonformel setzen wir $p_1 = 2{,}4$ und erhalten so:

$$\text{(IIb)} \qquad \frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{1{,}4150\cdot 10^{30}}{76950\cdot 10^{27}-\nu^2} + \frac{2{,}6575\cdot 10^{30}}{10275\cdot 10^{27}-\nu^2} + \frac{0{,}11230\cdot 10^{30}}{8778{,}8\cdot 10^{27}-\nu^2}\,.$$

$$\begin{array}{lll} C_1 = 3{,}83\cdot 10^{31}, & C_2 = 7{,}19\cdot 10^{31}, & C_3 = 0{,}30\cdot 10^{31}, \\ \lambda_1 = 341{,}9 \text{ Å.-E.}, & \lambda_2 = 935{,}9 \text{ Å.-E.}, & \lambda_3 = 1545{,}4 \text{ Å.-E.}, \\ p_1 = 2{,}35, & p_2 = 4{,}41, & p_3 = 0{,}19. \end{array}$$

Die mit beiden Formeln berechneten Werte und ihre Differenzen gegen die gemessenen sind in Tab. 2 zusammengestellt.

Tabelle 2.

2 Å.-E.	$\frac{n^2-1}{n^2+2}$ beob.	$\frac{n^2-1}{n^2+2}$ ber. n. Formel IIa	Differenz ber.-beob.	$\frac{n^2-1}{n^2+2}$ ber. n. Formel IIb	Differenz ber.-beob.	Beobachter
1854	0,46281	0,46289	+ 8	0,46288	+ 7	M_1
1862	0,45999	0,45998	− 1	0,45997	− 2	„
1935	0,43840	0,43821	−19	0,43820	−20	„
1977	0,42850	0,42824	−26	0,42827	−23	„
2000	0,42360	0,42338	−22	0,42338	−22	„
2110	0,40476	0,40465	−11	0,40467	− 9	„
2144	0,40006	0,39998	− 8	0,40009	+ 3	M_2, M_1-Bo
2194	0,39375	0,39375	0	0,39380	+ 5	M_1, Bo
2312	0,38151	0,38160	+ 9	0,38164	+13	Bo
2573	0,36305	0,36315	+10	0,36320	+15	„
2748	0,35443	0,35458	+15	0,35462	+19	„
3403	0,33569	0,33576	+ 7	0,33580	+11	„
3944	0,32764	0,32769	+ 5	0,32770	+ 6	$M_{1/2}$, La-Bö
4415	0,32317	0,32317	0	0,32317	0	M_2
4861	0,32020	0,32014	− 6	0,32014	− 6	P(od. Mi, L, M_2 u. P)
5461	0,31734	0,31723	−11	0,31722	−12	M_2
5893	0,31582	0,31570	−12	0,31569	−13	Bo(od. Mi, Bo, Dufet, L, M_2 u. P)
6438	0,31436	0,31421	−15	0,31419	−17	M_2
6563	0,31408	0,31393	−15	0,31391	−17	M_2, P

Wie bei KCl ist auch bei NaCl die Dispersion von Cl^- nur durch zwei Glieder darstellbar. Für die oben erwähnte abschnittweise Darstellung durch eingliedrige Formeln seien hier einige Beispiele angeführt:

---

[1]) K. F. Herzfeld u. K. L. Wolf, a. a. O.

Bereich	λ_0	p_0	Bemerkungen
1854—1862 Å.-E.	1219	2,6	Abweichung bei 1862 Å.-E. = + 0,00019
1854—1935 „	1193	2,8	„ „ 1977 „ = + 0,00008
1935—2000 „	1147	3,3	„ „ 2194 „ = + 0,00209
2000—2748 „	1084	3,9	„ „ 3408 „ = + 0,00025
2748—4415 „	1039	4,1	„ „ 3944 „ = + 0,00014
4415—6438 „	1017	4,3	Ohne merkliche Abweichungen.

Formeln, die für das ganze Gebiet Gültigkeit haben sollen, verlangen notwendig zwei Glieder für Cl^-.

V. Diskussion.

Wir müssen nun untersuchen, wie wir die bei jedem der beiden Salze vorhandenen drei Summanden auf die beiden Ionen dieses Salzes zu verteilen haben. Wir beginnen mit dem mittleren Summanden, dem beim KCl die Elektronenzahl 4,19 (Ib) und die Wellenlänge 975,0 Å.-E., beim NaCl die Elektronenzahl 4,40 und die Wellenlänge 935,9 entspricht. Die beiden stimmen so weitgehend überein, daß man sie dem beiden Salzen gemeinsamen Ion, d. h. dem Chlorion zuschreiben muß. Dafür spricht weiter, daß die genannten Elektronenzahlen sehr nahe gleich der Elektronenzahl 4,58 sind, die wir seinerzeit bei der Molekularrefraktion des Argons fanden; das Chlorion hat denselben Bau wie das Argon, so daß wir aus den in der Einleitung genannten Gründen Übereinstimmung der Elektronenzahlen erschließen können.. Die Wellenlänge ist etwas größer als die entsprechende des Argons (703), wie wir es erwarten müssen. Den ersten Summanden werden wir dagegen dem Kation zuzuschreiben haben. Das schließen wir daraus, daß er beim NaCl wesentlich kleiner ist als beim KCl. Wir haben nämlich dieses Verhältnis bei Natrium und Kalium zu erwarten, da erstens das Natriumion, welches den Bau des Neons hat, eine kleinere Elektronenzahl, nämlich etwa 2,4, besitzt und zweitens auch eine kürzere Wellenlänge als das Kaliumion, das den Bau des Argons hat. Wie vorhin erwähnt, ist der Einfluß des ersten Gliedes auf die Dispersion so klein, daß man nicht mit voller Sicherheit die Werte vom

Zähler und Nenner festlegen kann. Aus dem Verhalten des Chlorions schließen wir, daß man dem Kation annähernd dieselbe Elektronenzahl zuschreiben darf wie dem gleichgebauten Edelgas. Aus diesem Grund ist in IV dem ersten Summanden im Natriumchlorid die Elektronenzahl 2,40, dem im Kaliumchlorid die Elektronenzahl 4,61 zugeschrieben worden. Die sich ergebenden Wellenlängen waren 342 und 515 Å.-E. Diese liegen wie erwartet wesentlich ultravioletter als die entsprechenden Wellenlängen von Neon und Argon (481 und 703 Å.-E.). Dafür, daß diese Wahl vernünftig ist, spricht noch, daß die Argonwellenlänge (703) ziemlich in die Mitte zwischen denen von K^- und Cl^- zu liegen kommt. Endlich spricht dafür, daß der erste Summand tatsächlich vom Kation herrührt, daß sein Beitrag zur Molrefraktion (0,497 und 2,18) sehr nahe gleich demjenigen ist, welchen Fajans und Joos[1]) der Molrefraktion von Na^+ (0,50) und K^+ (2,20) zuschreiben.

Jetzt bleibt noch die Zuordnung des letzten Gliedes. Dieses läßt sich unmöglich dem Kation zuordnen, denn seine Wellenlänge (1543 und 1580) ist wesentlich röter als irgendeine beim Argon auftretende Absorptionswellenlänge. Es kann daher nur von einem im Vergleich zum Argon weniger festen Gebilde, also dem Chlorion, herrühren. Zudem ist die Wellenlänge in den beiden Salzen wenig verschieden. Wir werden darum diesen Summanden dem Chlor zuordnen. Um ihn zu deuten, können wir erstens annehmen, daß er der Resonanzlinie (beim Argon 1029) entspricht, während der mittlere Summand dem kontinuierlichen Spektrum, welches an die von der vollständigen Ionisation herrührende Grenze anschließt, zugeordnet werden muß. Diese Deutung entspricht nun den zweigliedrigen Formeln, die wir seinerzeit[2]) für die Dispersion der Edelgase aufgestellt haben. Daß wir nicht auch einen entsprechenden vierten Summanden, welcher von der Resonanzlinie des Kations herrührt, mit zu berücksichtigen brauchen, liegt daran, daß die Resonanzlinie an und für sich von geringem Einfluß ist und bei so kurzen Wellenlängen, wie sie dem Kation zukommen, innerhalb des gemessenen Gebietes

---

1) K. Fajans u. G. Joos, a. a. O.

1) K. F. Herzfeld u. K. L. Wolf, a. a. O.

mit genügender Genauigkeit in ein Glied mit dem kontinuierlichen Spektrum zusammengefaßt werden kann.

Die Elektronenzahl, welche dem letzten Glied zukommt, ist allerdings in den beiden Salzen nicht vollkommen gleich, nämlich beim KCl 0,25, beim NaCl 0,20, und beide Werte sind wesentlich höher als der p-Wert des Argons 0,025. Vom Standpunkt der reinen klassischen Theorie wäre dies unverständlich, aber von diesem Standpunkt wäre ja auch das Auftreten so kleiner Zahlen überhaupt unerklärbar. Die Quantentheorie muß dagegen die „Elektronenzahlen“ als Maß für die Wahrscheinlichkeit gewisser Übergänge ansehen.[1]) Dann bedeutet also das Resultat, daß der Übergang, welcher der Resonanzlinie entspricht, beim Chlorion im Salz häufiger ist als beim freien Argonatom, ferner im Kaliumsalz etwas häufiger als im Natriumsalz. Dabei ist bemerkenswert, daß die Elektronenzahlen des Hauptgliedes (des zweiten) im Salz etwas kleiner sind als die entsprechenden Zahlen des Argons. Nur macht der Unterschied *verhältnismäßig* wenig aus. Die Summe der Elektronenzahlen der beiden Glieder ist dagegen recht genau gleich der Summe beim Argon, nämlich:

KCl $4{,}19 + 0{,}25 = 4{,}44$,
NaCl $4{,}41 + 0{,}19 = 4{,}60$,
Argon $4{,}58 + 0{,}03 = 4{,}61$.

Das bedeutet also, daß die Gesamtübergangswahrscheinlichkeit nur vom Bau des Gebildes selbst abhängt; beim Einbau in ein Salz nimmt die Übergangswahrscheinlichkeit zur nächsten Bahn auf Kosten der Wahrscheinlichkeit vollständiger Abtrennung zu.

Eine andere Deutung, welche wir den beiden letzten Gliedern der Dispersionsformel geben können, ist folgende:

Wenn wir die Theorie von Wentzel annehmen, nach welcher für die Dispersion nur die Resonanzlinie maßgebend ist, die Dispersionsformel also nur ein Glied (pro Ion) zu enthalten hat, wobei aber die Eigenfrequenz ν_0 in gewissem Maß veränderlich ist, so muß die zweigliedrige Darstellung als bloße Interpolation gelten, und man stellt die Dispersion besser abschnittsweise durch eingliedrige Formeln dar, wie es beim NaCl auf S. 48 geschehen ist. Da man beim Argon mit einer eingliedrigen Formel für den ganzen gemessenen Bereich auskommt, was nur sehr weit von der Eigenfrequenz möglich ist, so hat man die Argonformel dann mit der im roten Gebiet geltenden Dispersionsformel für das NaCl zu vergleichen, wobei die Übereinstimmung der p mäßig ist. Je weiter man ins Violette geht, zu desto größeren Wellenlängen rückt die scheinbare Eigenfrequenz, d. h. desto mehr nähert sie sich dem wahren Wert.

---

[1]) R. Ladenburg, a. a. O.

Auch hier wie bei den Gasen kann zwischen diesen beiden Möglichkeiten erst entschieden werden, wenn die Messungen noch wesentlich näher bis an die Eigenfrequenz herankommen.

Auch die dreigliedrigen Formeln vermögen die Messungen nicht ganz genau darzustellen. Es bleibt ein Gang von derselben Größe wie bei den Gasen, den man entweder wie dort nach der Wentzelschen Theorie oder durch das Mitwirken der tieferen Niveaus[1]) erklären kann.

VI. Die Deutung der auftretenden Wellenlängen.

Bei der eben besprochenen Zuordnung der Wellenlängen 975 (bzw. 936) und 1580 (bzw. 1543) zum Chlorion als Ionisierungs- und Resonanzwellenlänge ist aber noch folgendes zu beachten. Wenn die kürzere der beiden erwähnten Wellen tatsächlich derjenigen Absorption entspricht, welche bei der vollständigen Loslösung eines Elektrons aus dem Chlorion zustande kommt, so wäre zu erwarten, daß die langwellige Grenze des kontinuierlichen Spektrums dieser Absorption etwa um 90 Å.-E. weiter nach rot liegt, als diese Wellenlänge angibt, also etwa bei 1065 bzw. 1025. Ihre Schwingungszahl müßte mit der Ablösearbeit des Elektrons, d. h. der sogenannten Elektronenaffinität Q_E des Chlors, durch die Beziehung zusammenhängen:

$$N_L h \nu = Q_E. \tag{9}$$

Da Q_E etwa = 88 Kcal ist, so entspricht das einer Wellenlänge von 3280 Å.-E., mit anderen Worten: Es müßte diese Absorption einfach dem von Franck vorausgesagten kontinuierlichen Spektrum des Chlors entsprechen. In Wirklichkeit sind aber die Chloride in der Gegend von 3000 Å.-E. vollkommen durchsichtig und unsere Absorption liegt sehr viel weiter im Ultraviolett, d. h. ihre Schwingungszahl ist sehr viel größer; demnach muß zur Elektronenaffinität der Gleichung (9) noch ein wesentlich höherer Arbeitsbetrag hinzukommen. Wenn man sich überlegt, welche Arbeit zur Entfernung eines Elektrons aus dem *im Gitter eingebauten* Chlorion nötig ist, dann sieht man sofort ein, daß hierzu nicht nur die Arbeit gegen die Anziehung von Seite dieses Ions selbst geleistet werden muß, welche der Elektronenaffinität entspricht, sondern auch Arbeit gegen die umgebenden Ladungen des übrigen Gitters. Die Arbeit, die nötig ist, um aus einem Gitterpunkt die Elementarladung entgegen den Anziehungen, die von den in den anderen Gitterpunkten sitzenden Überschußladungen herrühren, zu entfernen, beträgt beim NaCl-Typus:

---

[1]) In unserer früheren Arbeit a. a. O. S. 90 haben wir leider übersehen, daß die Mitwirkung tieferer Niveaus bei der Refraktion der Edelgase schon sehr ausführlich von R. Ladenburg und F. Reiche, „Die Naturwissenschaften" 12. S. 596. 1923, erörtert worden ist.

$$Q_G = N_L \frac{1{,}742\, e^2}{r} = \frac{576}{r}\,\mathrm{Kcal}$$

(r in Å.-E. der Gitterabstand zweier Ionen).

Das ist das Coulombsche Anziehungsglied der Gitterenergie. Für KCl ($r = 3{,}140$ Å.-E.) ergibt sich diese Größe zu 183 Kcal, hierzu die Elektronenaffinität von 88 ergibt eine Gesamtarbeit von 271 Kcal. Dieser entspricht eine Wellenlänge von 1065 Å.-E. Das liegt um 90 Å.-E. von der gefundenen Wellenlänge weiter nach rechts als die Eigenwellenlänge, wie wir es erwartet haben. Bei NaCl ($r = 2{,}816$ Å.-E.) finden wir die vom Gitter herrührende Anziehung zu 204, die Gesamtarbeit zu 292, demnach die Wellenlänge zu 990, also einen Abstand von 55 Å.-E. von der gefundenen.

Wir haben als Abtrennungsarbeit gegenüber den Anziehungskräften des übrigen Gitters nur diejenige gerechnet, die gegen die Überschußladungen zu leisten ist (Coulombsche Anziehung). Außer dieser kommt noch eine Anziehung hinzu, welche gegen die induzierten Ladungen zu leisten ist, die durch das Vorhandensein des nachher zu entfernenden Elektrons an seinem Gitterpunkt erzeugt werden. (Diese entsprechen etwa der Bornschen Deutung[1]) der Hydratationswärme.) Aber dieser Effekt braucht nicht noch einmal berücksichtigt zu werden, denn er ist es gerade, welcher den Unterschied zwischen der erregenden Kraft und der äußeren Feldstärke bedingte (II.). Er ist durch die Verwendung der Formel für $\frac{n^2-1}{n^2+2}$ statt der für n^2-1 ausgeschaltet. Ferner wären noch die Kräfte zu berücksichtigen, die von den Elektronenhüllen (Neutralkubus) der Nachbarionen auf das Elektron ausgeübt werden. Doch wissen wir über diese nichts und lassen sie daher in erster Näherung weg.

---

[1]) M. Born, Ztschr. f. Phys. 1. S. 45. 1920.

Bei der Deutung der folgenden Wellenlängen (1575, 1580) als Resonanzlinie haben wir eine ähnliche Überlegung zu machen. Ist das Chlorion vollkommen frei, so kann die die Arbeit, die nötig ist, um das Elektron aus seiner Grundbahn in die nächste erlaubte zu heben, nicht größer sein als die, die nötig ist, um es ganz zu entfernen. Für das freie Chlorion müßte daher die Resonanzlinie, wenn es eine solche überhaupt gibt, eine Wellenlänge größer als 3300 haben. Die Wellenlänge der Resonanzlinie für das ins Gitter eingebaute Chlorion dagegen muß wieder kleiner sein, weil beim Herausheben auch Arbeit gegen die Ladungen, die in anderen Gitterpunkten sitzen, zu leisten ist. Allerdings kann man hier gar nicht angeben, wie groß diese Arbeit ist, wenn man die Größe und Form dieser nächsten Bahn des Elektrons nicht kennt. Sie wird irgendein Bruchteil der Größe Q_G sein. Der Wellenlänge 1580 entspricht eine Arbeit von etwa 183 Kcal. Wir wissen aber nicht, wie wir dieses auf Arbeit gegen das eigene Ion (Resonanzlinie des freien Chlorions) und auf Arbeit gegen das Gitter aufzuteilen haben.

Nimmt man statt der bisher festgehaltenen Deutung die Wentzelsche Auffassung an, nach welcher die in der Dispersionsformel auftretende Eigenfrequenz nur eine scheinbare ist, die je nach dem betrachteten Gebiet ihren Wert wechselt und nur in unmittelbarer Nähe der Resonanzlinie in den Wert übergeht, welcher der Frequenz der Resonanzlinie entspricht, so muß man doch jedenfalls schließen, daß diese Resonanzlinie im Gitter wirklich kurzwelliger ist als 1800 Å.-E., da sich bei der Durchmessung bis zu dieser Wellenlänge keinerlei Absorption zeigt. Es muß also auch nach dieser Auffassung die wahre Frequenz der Resonanzlinie des freien Chlorions wesentlich höher sein, als man es nach der Elektronenaffinität des freien Chlorions erwarten würde, d. h. es muß eben noch ein wesentlicher Anteil der Gitterenergie hinzukommen; wieviel, läßt sich allerdings nicht angeben, da weder die wahre Frequenz aus den bisherigen Messungen sich erschließen läßt, noch, wie vorhin auseinandergesetzt, derjenige Bruchteil der Gitterenergie von vornherein berechnet werden kann, welcher beim Herausheben des Elektrons in die nächste Bahn geleistet werden muß.

Qualitativ ergibt sich jedenfalls aus unseren Anschauungen sehr schön der von Fajans und Joos a. a. O. aus den Messungen abgeleitete Einfluß des Kations auf die Molekularrefraktion des Anions, der darin besteht, daß ein Kation mit stärkerer Feldwirkung die molekulare Refraktion des Anions stärker herabsetzt. (Deformation.) Denn je stärker die Feldwirkung, desto höher ist die Gitterenergie, desto mehr Arbeit muß also bei der Entfernung des Elektrons aus dem Gitter geleistet werden, auch dann, wenn die Bahn des Elektrons in dem Chlorion, zu welchem es ursprünglich gehört, bei allen Salzen dieselbe ist. Der einzige wesentliche Unterschied gegen die Zahlen von Fajans und Joos besteht darin, daß wir diesen Verfestigungseffekt gegenüber dem vollkommen freien Ion als sehr viel größer ansehen, als dies Fajans und Joos tun. Für das vollkommen freie Ion würden wir eine Absorptionswellenlänge bei 3200 Å.-E. mit einer Molekularrefraktion von etwa 140 für die *D*-Linie erwarten. Der Einbau in das Salz bewirkt demnach eine sehr große Verminderung der Molekularrefraktion, die bei allen Alkalihalogeniden von etwa derselben Größenordnung ist, weil die Gitterenergien alle von derselben Größenordnung sind.

Wenn wir nun zur Diskussion der Eigenwellenlänge des Kations übergehen, so werden wir, wie schon erwähnt, dieser eine ähnliche Deutung als Schwerpunkt des kontinuierlichen Spektrums geben, das der Losreißung eines Elektrons aus dem Kation entspricht. Die dem Kaliumion zugeschriebene Wellenlänge von 515 Å.-E. läßt die Grenze der Absorption bei etwa 590 Å.-E. erwarten, was einer Energie von 490 Kcal entspricht. Bei dieser Losreißungsarbeit ist aber folgendes zu beachten:

Während für das negative Ion die Arbeit gegen die Anziehungskräfte des Gitters zur Elektronenaffinität des freien Ions hinzukam, ist hier die entsprechende Arbeit von der Ionisierungsspannung des freien Ions abzuziehen, denn wir haben ein negatives Elektron von einem solchen Gitterpunkte zu entfernen, der mit einer positiven Ladung besetzt ist. Die umgebenden Gitterpunkte üben auf die positive Ladung dieses Punktes Anziehungskräfte aus, demnach auf das dort sitzende Elektron Abstoßungskräfte, und es gilt daher:

$$Q_I - Q_G = Q, \tag{10}$$

d. h. man erhält die Arbeit zur Losreißung eines Elektrons Q durch Subtraktion der Größe $Q_G = \frac{576}{r}$ von der Ionisierungsarbeit des freien Ions Q_I. Da Q 490 ist, Q_G 183, ergibt sich die Ionisierungsarbeit des freien Kaliumions Q_I zu 673 Kcal. Die entsprechende Rechnung für das Natrium liefert als Grenze 410 Å.-E., daher $Q = 705$ und mit Q_G 204 also Q_I 909, was zu dem seinerzeit[1]) geschätzten Wert gut paßt.

Auch hier bewähren sich wieder die Überlegungen von Fajans und Joos, nach welcher das Kation durch die Wirkung des Anions gelockert wird, desto mehr, je stärker dessen Feldwirkung ist; im allgemeinen ist aber die Wirkung des Anions auf das Kation viel schwächer als umgekehrt. Bei uns kommt das so heraus, daß durch die Subtraktion der Gitterenergie die Wellenlänge nach Rot verschoben wird (Lockerung), desto mehr, je stärker die Feldwirkung, d. h. je größer die Gitterenergie ist. Bei den sehr hohen Werten der Ionisierungsarbeit der freien Kationen aber machen die Unterschiede der Gitterenergieen verhältnismäßig sehr viel weniger aus als bei den Anionen (für das Kaliumion bedeutet ein Unterschied von 20 Kalorien in den Gitterenergien einen Unterschied von 4 Proz. in der Wellenlänge, für das Chlorion einen Unterschied von 7,5 Proz.). Ebenso entspricht die von Fajans und Joos hervorgehobene Tatsache, daß die Auflockerung desto stärker ist, je größer die Molekularrefraktion des Kations an sich schon ist, dem Umstand, daß die Gitterenergieen verhältnismäßig desto mehr ausmachen, je kleiner an und für sich die Ionisierungsarbeit des freien Ions ist.

---

1) H. G. Grimm u. K. F. Herzfeld, Ztschr. f. Phys. 19 S. 141. 1923.

Zusammenfassung.

In der vorliegenden Arbeit wird auf den zu erwartenden Zusammenhang zwischen der Dispersion der Alkalihalogenide und der Edelgase hingewiesen, der sich sowohl auf die „Elektronenzahlen“ als auch auf die Wellenlängen der Absorptionslinien bezieht. Nach einer Zwischenüberlegung, welche den Zusammenhang zwischen der $\frac{n^2-1}{n^2+2}$-Formel und der $n^2 - 1$-Formel für Substanzen mit mehreren Eigenfrequenzen klarlegt, werden Dispersionsformeln für NaCl und KCl aufgestellt. Diese enthalten drei Glieder. Eines davon wird dem Kation, die beiden anderen dem Anion zugeordnet. Die Elektronenzahlen für das Chlorion ergeben sich dabei sehr nahe gleich den Elektronenzahlen des entsprechend gebauten Argonatoms. Die beiden Absorptionen, die dem Chlorion zugeordnet werden, lassen sich als Schwerpunkt der kontinuierlichen Absorption und als Resonanzlinie deuten. Die kontinuierliche Absorption wird wie bei den Edelgasen als hervorgerufen durch die vollkommene Loslösung eines Elektrons angesehen. Die Diskussion dieser Wellenlängen ergibt, daß zur Loslösung des Elektrons nicht nur die Arbeit gegen die Anziehung des eigenen Chlorions (Elektronenaffinität) zu leisten ist, sondern auch gegen die Anziehung, die von den Überschußladungen der anderen Gitterpunkte herrührt (Coulombscher Anteil der Gitterenergie). Hieraus lassen sich die Wellenlängen mit guter Annäherung berechnen. Umgekehrt kann man dann aus den Wellenlängen des Kations die zugehörigen Ionisierungsspannungen von K^+ und Na^+ berechnen.

(Eingegangen 12. August 1925.)

---

3. *Der elektrodenlose Ringstrom;*

von R. Wachsmuth und W. Schütz.

1. Wenn man den alten Versuch von J. J. Thomson[1] wiederholt und eine Glaskugel in eine Drahtspule hält, die von dem hochfrequenten Entladungsstrom einiger Leidener Flaschen durchflossen wird, so zeigt sich mit fortschreitender Druckabnahme in der Kugel zunächst ein rosa leuchtender Ring, dann ein blendend weißer Ring. Diese Doppelerscheinung haben Wachsmuth[2]) und Winawer[3]) auf Grund einiger Versuche zu erklären versucht. Durch Einsetzen zweier kleiner Elektroden senkrecht zu der Ebene des Ringes, d. h. in Richtung seiner Achse, und durch Anlegen einer Spannung von etwa 50 Volt wurde galvanometrisch der durch die Spannung erzeugte Querstrom gemessen und seine wechselnde Größe als Leitfähigkeit, d. h. als Maß der Ionisierung im Innern der Kugel angesprochen. Durch den Nachweis zweier Maxima des Leitvermögens schien die Erklärung für die beiden, durch ein Druckintervall voneinander getrennten, verschieden gefärbten Ringe aus dem Ionisationszustand des Gases möglich.

Gegen die Richtigkeit dieser Erklärung spricht, daß bei Anwendung anderer[4]) Meßmethoden ein Stromeffekt sich nur im Gebiet der weißen Entladung nachweisen ließ. Auch eigene neue Messungen[5]) führten zu der gleichen Erfahrung. Es erschien daher wünschenswert, die Erscheinungen selbst wie ihre Erklärung erneut zu prüfen.

---

1) J. J. Thomson, Phil. Mag. (3) 32. S. 321. 1891.

2) R. Wachsmuth, Ann. d. Phys. 39. S. 611. 1912.

3) R. Wachsmuth u. B. Winawer, Ann. d. Phys. 42. S. 585. 1913.

4) Z. B. E. Lecher, Phys. Ztschr 4. S. 32. 1902/03. Die Literatur über elektrodenlose Entladungen ist von G. Mierdel, Phys. Ztschr. 25. S. 240. 1924 sehr sorgfältig zusammen gestellt und besprochen.

5) R. Wachsmuth, Festschrift zur Jahrhundertfeier des Physikal. Vereins Frankfurt a. M. S. 39. 1924.

J. J. Thomson glaubte durch die Anordnung seiner Versuche bereits alle elektrostatischen Wirkungen ausgeschlossen zu haben und Bergen-Davis vermied eine letzte Fehlerquelle, indem er die mit Hochfrequenz beschickte Spule statt schraubenförmig in einer ebenen Spirale wickelte, eine Anordnung, die alle Nachfolger von ihm übernommen haben. Der Nachweis, daß trotzdem statische Wirkungen bleiben und daß das erste Maximum des Querstroms auf solche zurückgeführt werden muß, ist das Resultat der nachfolgenden Arbeit.

Hr. A. Hartmann[1]) hat in einer uns erst nach Abschluß unserer Versuche bekannt gewordenen, weil schwer zugänglichen Baseler Dissertation durch eine Gegenschaltung der beiden Hälften einer in der Mitte geteilten Spule deren dynamische Wirkung (den weißen Ring) vernichtet, die statische Wirkung dagegen unverändert erhalten und glaubt festgestellt zu haben, daß das erste Maximum durch Influenzwirkung der an der Spule auftretenden Ladungen hervorgerufen wird. Aber sein Versuch ist nicht beweiskräftig, weil er, wie er selbst beschreibt, zylindrisch gelegte Windungen benutzte, bei denen nach allgemeiner Übereinstimmung stets ein statisches Feld zwischen den äußersten Enden besteht.

Unsere Messungen zerlegen die „Querstrom“-Kurve, wie sie, ohne in die Bezeichnung eine Erklärung hineinzulegen, von Hrn. Hartmann bezeichnet wurde, in einen elektrostatischen Teil, dem das erste Maximum zugehört, und in einen dynamischen, der sich mit der Lecherschen Energiekurve, wie sie von Mierdel gezeichnet wurde, so ziemlich deckt und der auch der von Wachsmuth kürzlich veröffentlichten Kurve entspricht. Im Gegensatz zu den in der „Festschrift“ angegebenen Resultaten mit ungedämpften Schwingungen bezieht sich die vorliegende Arbeit ausschließlich auf gedämpfte Entladungen, nachdem dort festgestellt war, daß man für die weiße Entladung höherer Spannungsgradienten bedarf, als die zur Verfügung stehende Senderöhre hergab.

2. Zur Erregung der Hochfrequenzschwingungen diente ein großer Induktor der Firma Apps in London, dessen

---

1) A. Hartmann, Leitfähigkeitsmessungen bei der elektrodenlosen Ringentladung. Inaug.-Diss. Basel. 1918. Verkürzter Abdruck. Bull. Schweiz. Elektrot. Vereine. 10. S. 52. 1919.

Deprezunterbrecher durch einen solchen nach Wehnelt ersetzt war. Die Sekundärspule führte zu einer Zinkfunkenstrecke und von dort zu der Innenbelegung von je einer großen Leidener Flasche von 3 Tausendstel M. F. Kapazität, die auf isolierenden Glasplatten standen. Die Wellenlänge des Hochfrequenzstromes betrug 250 m. Die Außenbelegungen der Flaschen waren durch die bereits früher benutzte ebene Spule von 6 Windungen („Anregungsspule") geschlossen, deren Mitte, um die Symmetrie vollkommen zu machen, an Erde gelegt wurde. In das Innere der Spule führten wir Glaskugeln oder längere Glaszylinder von etwa 10,6 cm Durchmesser ein, die durch eine Molekularpumpe nebst Kapselvorpumpe nach Gaede luftleer gemacht werden konnten. Ein Glashahn ermöglichte das Fortschreiten der Verdünnung in kleinere Stufen, ein Mac Leodmanometer diente zur Druckmessung.

Die Vakuumröhren erhielten wieder an zwei gegenüberliegenden Enden, senkrecht zur Ebene der Erregerspule, je eine Sonde, deren Größe und Länge jedoch variiert wurde (vgl. unten). Die eine Sonde war über ein Galvanometer (Siemens & Halske, Empfindlichkeit durch Nebenschluß in weitem Bereich veränderlich) zur Erde geführt. Die Einstellung des Meßinstrumentes ließ sich objektiv durch Lichtzeiger an einer Skala ablesen.

Vorversuche lehrten den großen Einfluß ungenügender Erdung; Erdung durch dünne Kupferdrähte war völlig unzureichend. Infolgedessen erhielt ein Tisch, der unter die Vakuumröhre geschoben war und den Halter für die Anregungsspule trug, eine Belegung mit einer großen Zinkplatte. Diese wiederum war durch ein breites Band von Messingflitter mit der Wasserleitung verbunden. An diese Zinkplatte wurden weiterhin, ebenfalls durch Flitterband, alle Punkte angelegt, die sicher geerdet werden sollten.

Verwendet wurde zunächst eine schon früher benutzte Kugelröhre, bei der die Sonden in kleine Elektrodenscheibchen (15—20 mm Durchmesser) endeten. Die Scheibchen lagen etwa in der Peripherie der Kugel. Ohne jeden äußeren elektrostatischen Schutz zeigte sich, wenn beide Elektroden mit dem Galvanometer verbunden waren, auch ohne angelegte Spannung ein Ausschlag, sobald die Anregungsspule von dem Hochfrequenzstrom durchflossen wurde und die entsprechende Verdünnung in der Kugelröhre eingetreten war. Dieser Strom fiel fort, wenn man die Elektrode tief in das Innere des Vakuumrohrs rückte. Zu diesem Zweck wurde die Kugelform durch eine zylindrisch gestreckte ersetzt. Ebenso ließen sich die Sonden durch Stanniolkappen schützen, die über die Einschmelzungsansätze geklebt und gut (Bänder) geerdet waren.[1]) Ohne Hilfsspannung blieb nunmehr das Galvanometer in Ruhe.

3. Legt man, nach Beseitigung dieser Störungsquelle, eine Spannung an (meist 50 Volt), so zeigte sich bei fortschreitender Verdünnung genau der schon vor 12 Jahren gefundene Stromverlauf: Bei einigen Millimetern Druck tritt blaues Glimmlicht auf und zwar bei geerdeten Kappen zuerst an deren Enden, ohne Kappen gehen Büschelentladungen von Elektrode zu Elektrode, jedoch ohne daß ein meßbarer Strom auftritt. Die Bedeutung der Büschelentladung für den Querstrom wird von Hrn. **Hartmann** erheblich überschätzt. Denn erst wenn das Glimmlicht die ganze Elektrode bedeckt und die Büschelentladung durch gleichmäßige Aufhellung des Kugelinneren ersetzt ist, beginnt bei etwa 0,9 mm gleichzeitig mit dem rosa leuchtenden Ring ein Strom, d. h die meßbare Ionisierung in der Kugel. Der Strom hat bei 0,5 mm ein Maximum. Er nimmt wieder ab, während der Ring bereits beginnt, sich weißlich zu färben, und erreicht seinen tiefsten Wert etwa bei 0,2 mm. Von da ab steigt er schnell zu sehr beträchtlicher Höhe und ist von blendendem Licht begleitet, das, von Ringform ausgehend, allmählich die ganze Kugel erfüllt (zweites Maximum unterhalb 0,1 mm); der Strom verschwindet dann rasch, gleichzeitig mit dem Erlöschen der Leuchterscheinung.

Nachfolgende Fig. 1 (Nr. 10 der nachfolgenden Tabellen) mag den Vorgang in die Erinnerung zurückrufen. Die Kurve wurde an einer Zylinderröhre mit tief eingeführten kleinen Elektroden ohne elektrostatischen Schutz bei einer angelegten Spannung von 50 Volt aufgenommen. Der Durchmesser der Elektrodenscheibchen blieb für die Art der Erscheinung ohne Einfluß, auch wenn in einer neuen Röhre die Scheiben (80 mm

---

1) Als sicherster Schutz gegen alle elektrostatischen Einflüsse erwies sich ein in die Spule eingeführter, geerdeter, ungeschlossener Blechring (vgl. unten).

Durchmesser) fast den ganzen kreisförmigen Querschnitt des Zylinders ausfüllten. Die gleiche Figur erhielten wir auch an Kugelröhren bei geerdeten Stanniolkappen. Nur wenn die Kappen zu weit gegen die Anregungsspule herangeschoben waren, blieb das erste Maximum fort, doch war die Leuchterscheinung gleichzeitig sehr geschwächt, infolge elektrodynamischer Abschirmung, die sich in starker Erwärmung der Kappen zeigte.

Um diese elektrodynamische Abschirmung zu vermeiden und trotzdem elektrostatischem Schutz der Elektroden vor der Spule zu haben, wurde die Anregungsspule mit Flitterband umwickelt. Nunmehr fiel der ganze erste Teil der Kurve fort und es blieb nur der Wiederanstieg. Noch überzeugender und sicherer war die Einführung eines etwa 2 $^1/_2$ cm breiten, einseitig geerdeten Blechstreifens in Form eines ungeschlossenen Ringes („Schutzring") zwischen Spule und Röhre. Diese Versuche brachten uns einwandfrei das Resultat, daß die erste Hälfte der Kurve nur auf elektrostatische Wirkung zurückzuführen ist. Der Blechring in der Spule verhindert das Auftreten des Glimmlichtes in dem Gebiet höherer Drucke bis herunter zu 1 mm. Der rosa Ring verschwindet aber merk-

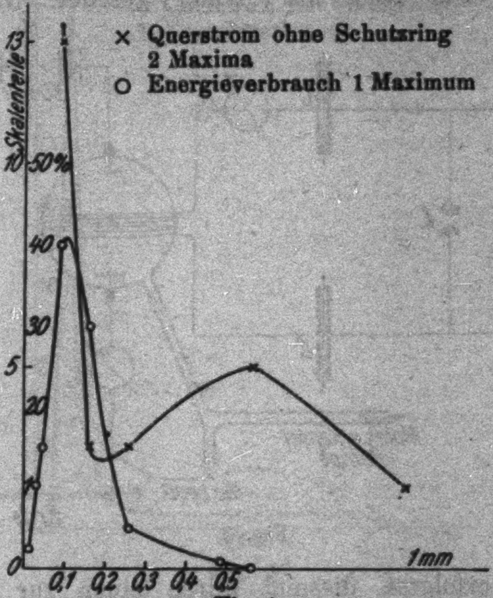


Fig. 1.

würdigerweise nicht, obwohl der Querstrom in seinem Gebiet zu Null wird. Ein weißes Leuchten tritt erst mit der Zunahme des Energieverbrauchs auf. In der „Festschrift" war dieser durch Induktionswirkung auf eine in der Achsenrichtung *hinter* der Anregungsspule in einiger Entfernung aufgestellte Meßspule mit statischem Voltmeter gemessen, nicht, wie meist üblich, im Spulenkreis selbst.

4. Die endgültigen Versuche beschäftigen sich nunmehr mit den Erscheinungen des Energieverbrauchs mit und ohne Schutzring. Der Ring war immer geerdet. Die Energiemessungen erfolgten diesmal durch einen zur Vermeidung statischer Einflüsse in der Ebene der Anregungsspule *seitlich* aufgesteckten Drahtring, dessen Enden mit einem aus sehr feinen Drähten hergestellten Thermokreuz (Eisen-Konstantan 0,05 mm) verbunden waren. Zum Schutz gegen äußere Beeinflussung befand sich das auf einer Peralitscheibe aufgezogene Thermokreuz in einer geerdeten Blechdose, von außen durch Tücher gegen Temperaturschwankungen geschützt. Vom Thermokreuz führten Drähte zu einem zweiten Galvanometer (Hartmann & Braun); sein Spiegel warf das Bild einer zweiten Lampe auf die gleiche Skala, die auch für die Ablesung von Galvanometer I diente.

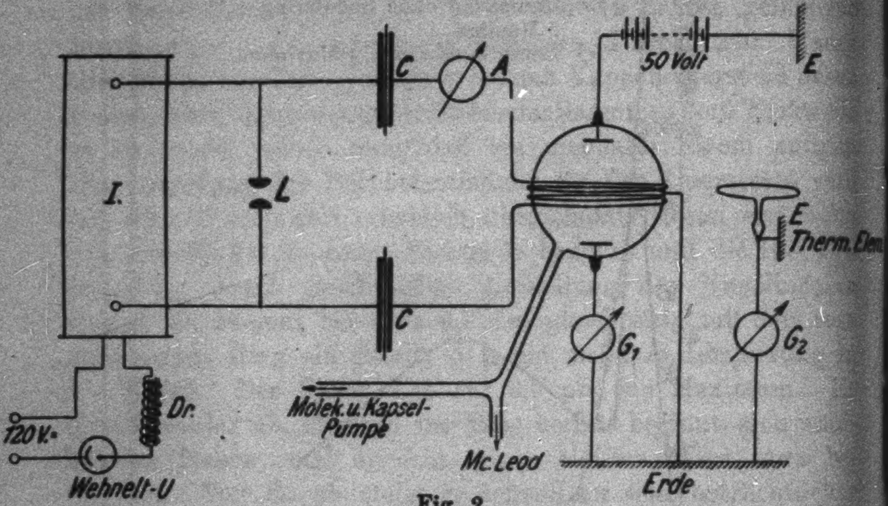


Fig. 2.

Bei Einschaltung des Hochfrequenzstromes reagierte das

Thermoelement mit einem Maximalstrom. Energieverbrauch in der Anregungsspule bewirkte einen Rückgang. Der Quotient: Rückgang durch Gesamtausschlag war das Maß des Energieverbrauches und zwar in dem Komplex Spule plus Vakuumröhre. Ein Hochfrequenzamperemeter, für dessen Beschaffung das Kaiser-Wilhelm-Institut für Physik die Mittel gewährt hat, ermöglichte gleichzeitig die Messung des von der Spule entnommenen Stroms. Die Schaltung ist am einfachsten

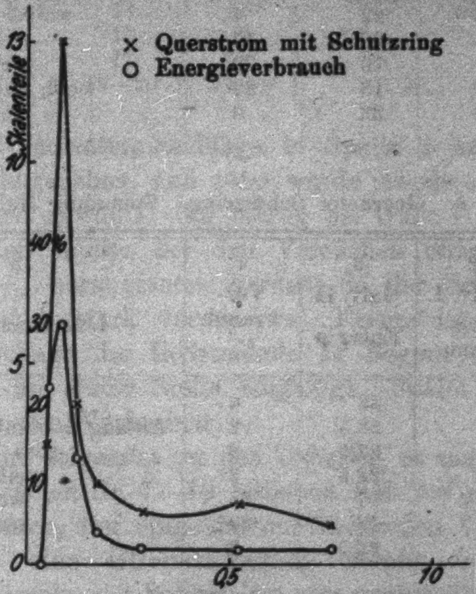


Fig. 3.

aus Fig. 2 zu ersehen. Hier ist nur, der Deutlichkeit halber, die Anregungsspule entgegen der Wirklichkeit auseinandergezogen.

In erster Linie wurden an Zylinder- und Kugelröhren mit und ohne Schutzring und mit und ohne Spannung an den Sonden Meßreihen aufgenommen, in denen der Strom von Sonde zu Sonde (Querstrom) mit dem durch Meßring und Thermoelement ermittelten relativen Energieverbrauch verglichen wurde. Wir lassen zunächst als Beispiel vier solche zusammenhängende Reihen folgen. Fig. 1 ist, wie oben erwähnt, die graphische Darstellung der Meßreihe Nr. 10, also mit Spannung von 50 Volt, aber *ohne* Schutzring, Fig. 3 zeigt die entsprechenden Werte *mit* Schutzring.

Nr. 7. Geerdeter Schutzring. Spannung 50 Volt.

1 Druck mm	2 Galv. I Querstrom	3 Galv. II Energie	4 Verbrauch %	5 Leuchterscheinung
760	0	23	0	
0,750	1	22,5	2	bläulich, mattrosa
0,522	1,5	22,5	2	roter Ring
0,282	1,3	22,5	2	weißl. roter Ring
0,172	2	22	4	weißer Ring
0,120	4	20	13	weiß
0,082	13	16	30	weiß
0,052	3	18	22	weiß, aussetzend
0,034	0	23	0	Ende

Nr. 8. Geerdeter Schutzring. Spannung Null.

1 Druck mm	2 Galv. I Querstrom	3 Galv. II Energie	4 Verbrauch %	5 Leuchterscheinung
	0	23	0	
0,800	0	22,5	2	Anfang d. bläulichroten Rings
0,432	0	22,5	2	rosa Ring
0,192	0	22,5	2	weißlich
0,118	0,2	17	26	weiß
0,060	0,3	18	22	weiß
	0	22,5	2	

Nr. 9. Ohne Schutzring. Spannung Null.

1 Druck mm	2 Galv. I Querstrom	3 Galv. II Energie	4 Verbrauch %	5 Leuchterscheinung
5—7	0	23	0	Glimmlicht an beiden Elektroden gegen die Mitte
1,086	– 1	23	0	Elektroden gleichmäßig blau, ebenso Spulenebene
0,528	– 1,5	22	4	roter Ring Elektrodenblau
0,236	– 1,5	21	9	weißl. Ring
0,130	– 0,5	13	43,5	weißer Ring
0,044	0	11	57	weiß erfüllt
0,010	0	12	48	dgl.

Nr. 10. Ohne Schutzring. Spannung 50 Volt.

1 Druck mm	2 Galv. I Querstrom	3 Galv. II Energie	4 Verbrauch %	5 Leuchterscheinung
7	0,5	20	0	wie bei Nr. 9
0,942	2	20	0	„
0,564	5	20	0	roter Ring
0,256	3	19	5	weißlich bis rot
0,160	3	14	30	weiß
0,089	13	12	40	„
0,044	< 13	17	15	„
0,010	$\ll 13$	15—20	2,5—0	„

Die Galvanometerausschläge in Spalte 2 und 3 sind in Skalenteilen angegeben, und zwar wurde jeweils eine geeignete Empfindlichkeit gewählt. Sie betrug bei Galv. I normal etwa 10^{-6} Amp. und mußte bei den Versuchen ohne Schutzring jeweils auf $^1/_{10}$ herabgesetzt werden, da der Schutzring den Energieverbrauch stark vermindert. Ferner ist in Spalte 2 und 3 die Nullage der Instrumente zu Beginn des Versuchs unter Strom an erster Stelle eingefügt. Spalte 4 zeigt den mit 3 errechneten Verbrauch. —

Es ist nun folgendes zu den Tabellen zu sagen: Die mitgeteilten Meßreihen Nr. 7—10 beziehen sich auf eine Zylinderröhre mit kleinen, tief eingeführten Elektroden. *Ohne* Schutzring beginnt eine Glimmentladung bereits bei mehreren Millimetern Druck, *mit* Schutzring erst unterhalb von 1 mm. Dabei setzt die Glimmentladung in letzterem Fall, bevor sie auf die Elektroden übergeht, meist an der Glaswand gegenüber dem Ring ein und zwar rot an der Seite der Erdung, blau an dem von der Erdung am weitesten entfernten Ende, so daß also der ganze Vorgang vom negativen Glimmlicht bis zur positiven Säule sich längs der geerdeten Außenelektroden, wenn man sie einmal so auffassen darf, abspielt. Mit Erscheinen des rosa Ringes hört die Glimmentladung auf. Es darf hier weiter auf den überraschenden Gegensatz zu den ungedämpften Schwingungen¹) hingewiesen werden. Blauem Glimmlicht und rotem Ring entspricht bei sonst gleichem

---

1) A. Wachsmuth, Festschrift usw. S. 40.

Aufbau der ungedämpften Erregung positives Licht an den Elektroden und ein intensiver Ring in der Mitte.

Die Meßreihen Nr. 8 und Nr. 9, beide ohne Spannung, zeigen deutlich den Einfluß des Schutzringes sowohl auf den Energieverbrauch, wie auf die Leuchterscheinung. Galvanometer I bleibt natürlich beide Male ohne Strom. Bei den Reihen Nr. 7 und 10 wurde Spannung angelegt. Ohne Schutzring (Nr. 10) ist das erste Maximum des Sondenstroms stark ausgeprägt (obwohl die Empfindlichkeit auf $^1/_{10}$ herabgesetzt war), bei Nr. 7 ist es vordem angedeutet. Auch hier ist der Energieverbrauch ohne Schutzring erheblich größer. Vielleicht darf man aber doch der geringen Verbrauchssteigerung im Gebiet des Ringes bei Nr. 7 Realität zusprechen, weil sie zur Aufrechterhaltung des elektrostatischen Feldes dienen muß.

Schließlich darf noch generell darauf hingewiesen werden, daß die Kurven für Energiemessung und Querstrommessung in ihrem Verlauf nicht zusammenfallen, sondern gegeneinander verschoben sind. Dies liegt in der Verschiedenheit der Methode begründet. Die Leitfähigkeit, im Querstrom gemessen, wirkt sich erst bei niederen Drucken aus und verschiebt das Maximum nach niederen Drucken gegenüber der Energiemessung.

5. Im Verlauf der Messungen, insbesondere bei sehr hohen Verdünnungen zeigte sich eine uns zunächst überraschende Erscheinung: Das Galvanometer II war bereits auf seinen durch die Stärke des Hochfrequenzstromes im Meßring induzierten Anfangswert 20 zurückgekehrt; da aber das weiße Licht die Kugel noch erfüllte, wurde weiter evakuiert. Dann wanderte der Lichtzeiger über seine Maximallage hinaus, d. h. das Meßring erhielt eine Energiezufuhr. Das Hochfrequenzamperemeter, das den der Anregungsspule zugeführten Strom maß, zeigte diese Energiezunahme nicht an. Also mußte sie in der Kugelröhre selbst gesucht werden. Erhöhung der angelegten Spannung (bis 300 Volt) lenkte den Lichtzeiger von Galv. II weit über die Grenzen der Skala hinaus ab. Ein in den Stromkreis der 50 Voltbatterie eingebautes Telefon tönte vom ersten Augenblick des Anschlusses an mit zunehmender Stärke (dazwischen ein schwaches Minimum), bis die Entladung aussetzte.

Um einen Überblick über die Erscheinung zu geben, sei zunächst eine Meßreihe mitgeteilt.

Nr. 14. Kugelrohr ohne Schutzring. Spannung 50 Volt.

1 Druck mm	2 Galv. I Querstrom	3 Galv. II Energie	4 Verbrauch %	5 Leuchterscheinung
760	0	20	0	
6	2	20	0	blaues Glimmen an den Elektroden
0,498	12	21,5	− 7,5	roter Ring
0,468	8−6	16,5	17,5	weiß
0,240	8,5	11	45	„
0,072	9	10,5	47,5	„
0,030	13	16,5	17,5	„
0,006	> 13	21,0	− 5	„
		24	− 20	„
0,0005	1	20	0	Auslöschen

Die Meßreihe zeigt bereits am Anfang eine kleine Schwankung von Galvanometer II bei 0,5 mm, vor allem aber bis zu 20 Proz. vergrößerte Ausschläge, sobald der Druck in die Tausenstel Millimeter geht und Galvanometer I einen Querstrom über 13 Skalenteile, der Grenze seines Meßbereiches, anzeigt.

Es konnte diese Erhöhung des Stromes im Meßring nur von der Induktion der in der Röhre zwischen den Sonden bei angelegter Spannung gebildeten Querströmen herrühren. Aus dem Auftreten einer dauernden Induktion muß man schließen, daß die Querströme intermittieren, daß also bei einer Unterbrechungszahl des Wehnelt von 130—150 per Sekunde in den Zwischenzeiten nach Abklingen der Schwingung die Ionisierung des Gases bereits erheblich abgenommen hatte.

6. In der Tat, wenn man den Meßring dem Sondenstrom *parallel* stellt, also die Induktion der Anregungsspule ausschaltet, so tritt die alte, als Leitfähigkeit bezeichnete Erscheinung wieder auf. Auch hierfür geben wir ein Beispiel an einer Kugelröhre. Insbesondere ist in Nr. 15 die Übereinstimmung zwischen Galv. I und II in ihrem Gang überzeugend. Zum Vergleich gehen zwei Meßreihen mit Schutzring (ohne Spannung und mit 50 Volt) voran.

Nr. 18. Kugelröhre mit Schutzring. Ohne Spannung.
Meßring ⊥ zu Anregungsspule.

Druck mm	Hochfrequenz Amp.	Verbrauch %	Querstrom Galv. I Empf. $^1/_5 = 2\cdot 10^{-6}$ A.	Galv. II hochempf.	Leuchterscheinung
0,468	2,75	0	0	8,5	halb rot, halb blau
0,268	2,75	0	0	8,5	
0,166	2,2	20—18	0,4	6,0	
0,058	2,70	0	0	8,5	

Nr. 7. Kugelröhre mit Schutzring. Spannung 50 Volt.

Druck mm	Hochfrequenz Amp.	Verbrauch %	Querstrom Galv. I Empf. $^1/_5 = 2\cdot 10^{-6}$ A.	Galv. II hochempf.	Leuchterscheinung
0,642	2,7	0	0	9,0	
0,294	2,7	0	0,1	8,0	
0,192	2,5	7,5	1,2	7,5	
0,130	2,2	18,5	4,5	7,0	
0,068	2,7	0	$\frac{6}{0}$	8,5	

Nr. 15. Kugelröhre ohne Schutzring. Spannung 50 Volt.

Druck mm	Hochfrequenz Amp.	Verbrauch %	Querstrom Galv. I Empf. $^1/_{100} = 4\cdot 10^{-5}$ A.	Galv. II hochempf.	Leuchterscheinung
760	2,7	0	0	0,7	
2	2,7	0	1	2,1	
0,432	2,7	0	1,5 1,2	2,5	Erstes Maximum
0,224	2,6	3,7	1	1,8	
0,144	2,0	26	0,8	1,5	Minimum
0,061	2,0	26	2,0	2,8	
0,020	2,1	22	6	9	
0,007	2,2	18,5	10	15	
	2,7	0	0	0,7	

7. Nachdem solcher Gestalt der Einfluß des Querstroms in der Vakuumröhre auf den ihm parallel gerichteten Meßring festgestellt war, ergab sich ohne weiteres auch die Wirkung seines Streufeldes auf den zu ihm senkrecht gestellten Ring.

Um diese Größe mußte also die bisherige Energiemessung falsch gewesen sein.

Um dies zu erweisen, wurde der Meßring wieder der Anregungsspule parallel gestellt und der Verlauf der Thermoströme mit den Ausschlägen eines Amperemeters, das im Hochfrequenzkreis lag, verglichen.

Nachfolgende zwei Meßreihen, die auch in Fig. 4 als Kurven dargestellt sind, zeigen deutlich, daß der Energieverbrauch im Hochfrequenzkreis unabhängig ist von einer etwa an die Sonden angelegten Spannung, daß dagegen der mit Thermoelement bestimmte Energieverbrauch von der angelegten Spannung abhängt. Der Querstrom drückt auf den im Meßring fließenden Strom und bewirkt so nicht nur den negativen Wert bei 0,5 mm (entsprechend seinem eigenen „ersten Maximum"), sondern er verschiebt auch die Lage des großen Energiemaximums zwischen 0 und 0,1 mm, wie besonders aus der Figur ersichtlich ist. Es ist selbstverständlich, daß sich der Einfluß des Querstroms dort am meisten geltend macht, wo er selbst seine höchsten Werte erreicht, das ist im Gebiete der hohen Verdünnungen.

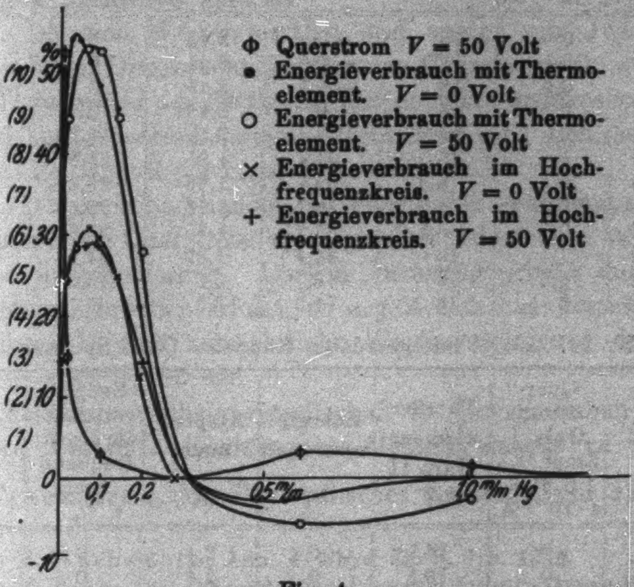


Fig. 4.

Da Schutzring und geerdete Polkappen den Energiekonsum beträchtlich verringern, so ist — was bei der Willkürlichkeit des Maßstabes erlaubt erscheint — in Fig. 4 der Wert des Querstroms in dreifachem Maß eingezeichnet.

Nr. 23. Kugel mit geerdeten Kappen. 50 Volt Spannung.

Druck mm	Querstrom Galv. I Empf. $^1/_{100}$ 1 S. T. = $4 \cdot 10^{-5}$ A.	Thermoelement Galv. II S. T.	Energieverbrauch %	Amperemeter A.	Energieverbrauch im Hochfrequenzkreis %	
760	0	18	0	2,45	0	
1,08	0,1	18,5	− 2,8	2,45	0	
0,588	0,2	19	− 5,5	2,45	0	rosa Ring
0,320	0	18	0	2,45?	0?	weiß
0,202	0	13	28	2,1	14,3	
0,140	0	10	44,4	1.85	24,5	
0,095	0	8,5	52,7	1,75	28,6	
0,064	0	8,5	52,7	1,75	28,6	
0,063	0,1	8,5	52,7	1,75	28,6	
0,019	1	10	44,4	1.85	24,5	
0,005	3,5	15	16,7	2,1	14,3	
0,001	5	16	11,5	2,3	6,1	Aussetzen

Nr. 24. Kugel mit geerdeten Kappen. Ohne Spannung.

Druck mm	Querstrom Galv. I Empf. $^1/_{100}$ 1 S. T. = $4 \cdot 10^{-5}$ A.	Thermoelement Galv. II S. T.	Energieverbrauch %	Amperemeter A	Energieverbrauch im Hochfrequenzkreis %	
7,60	0	16,5	0	2,4	0	
0,972	0	16,5	0	2,4	0	
0,552	0	17	− 3	2,4	0	rosa Ring
0 282	0	16	+ 3	2,4	0	
0,194	0	13	21,2	2,1	12,5	
0,139	0	9	45,5	1,8	25	
0,093	0	8,5	48,5	1,7	29	
0,067	0	8	51,5	1,65	31	
0,042	0	7,5	54,5	1,7	29	
0,024	0	7,5	54.5	1,75	27	
0,012	0	8,5	48 5	1,8	25	
0,006	0	10,5	36,5	2,0	16,5	
0,002	0	12	27,2	2,1	12,5	

Zusammenfassend kann man sagen:

1. Der Querstrom wird verändert, sobald man durch einen Schutzring die trotz aller Vorsichtsmaßregeln noch zurückgebliebene statische Wirkung der Anregungsspule beseitigt.

Von den zwei Maxima bei etwa 0,5 mm und unterhalb 0,1 mm bleibt nur das letztere, während die Stromleitung bei den höheren Drucken fast verschwindet.

2. Der — in Luft — rosa Ring bleibt, wenn auch geschwächt, trotzdem bestehen; wie die Versuche lehren, verdankt er sein Entstehen wesentlich statischen Einflüssen, indem die Anregungsspule bzw. auch der Schutzring als Außenelektrode wirkt. Eine Mitwirkung der Sonden (Büschelentladung) ist dabei nicht erforderlich, da der rosa Ring auch ohne jede Elektrode auftritt.

3. Die von Wachsmuth[1]) und später von Jung[2]) bei verschiedenen Drucken aufgenommene Charakteristik weist auf einen Unterschied der Sättigung, der auch im spektroskopischen Befund zum Ausdruck kommt. Trotzdem wird sich die a. a. O. aufgestellte Hypothese nicht halten lassen.

4. Der zwischen Sonden, an denen eine Spannung angelegt ist, auftretende Querstrom vermag selbst induzierend zu wirken, ist also intermittierend. Da die Anregung primär mit einem Wehneltunterbrecher erfolgt, so ergibt sich aus dessen Unterbrechungszahl eine beträchtliche Wiedervereinigung der Gasionen in etwa 1/150 sec.

Der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft für Physik haben wir für mehrere wertvolle Hochfrequenz-Meßinstrumente zu danken.

Frankfurt a. M., Physikalisches Institut, Juni 1925.

---

1) R. Wachsmuth, Ann. d. Phys. 39. S. 619. 1912.

2) H. Jung, Die elektrodenlose Ringentladung in Quecksilber- und Natriumdampf. Inaug.-Diss. Frankfurt a. M. 1922. Auszug in Dissertationen der Nat. Fak. der Univ. Frankfurt 2. S. 108. 1924.

(Eingegangen 8. August 1925.)

4. *Röntgenographische Untersuchungen von wasserstoffbeladenen Palladium-Silberlegierungen*

von F. Krüger und A. Sacklowski.

(Hierzu Tafel I.)

Von A. Sieverts ist gezeigt worden, daß neben dem reinen Palladium manche Palladiumlegierungen ebenfalls die Eigenschaft starker Wasserstoffabsorption besitzen. Dies gilt speziell auch von den Palladium-Silberlegierungen[1]), die sogar zum Teil, z. B. besonders die an Silber 40 proz. Legierungen, wenigstens bei Beladungen bei Temperaturen zwischen 100 bis 400° wesentlich stärker Wasserstoff absorbieren als das reine Palladium. Es bietet daher besonderes Interesse, die Beeinflussung der Struktur dieser Legierungen durch die Wasserstoffbeladung zu untersuchen, da man hoffen darf, daraus etwas über die Natur dieser Absorption zu erfahren.

Die Wasserstoffabsorption am Palladium selbst ist in physikalisch-chemischer Hinsicht in zahlreichen Arbeiten[2]) eingehend untersucht, ohne daß eine völlige Aufklärung der komplizierten Verhältnisse erzielt wäre. Ergänzend sind neben diese Arbeiten neuerdings röntgenographische Untersuchungen getreten, in denen die Struktur von mit Wasserstoff beladenem Palladium bestimmt worden ist. M. Yamada[3]) und W. L. McKeehan[4]) haben derartige Messungen vorgenommen. Beide finden das gleiche flächenzentriert kubische Gitter wie beim gasfreien Palladium, ferner eine Erweiterung des Gitters. Diese beträgt im Palladium, das bei Zimmertemperatur mit Wasserstoff gesättigt ist, nach M. Yamada 2,8 Proz., nach McKeehan 3,5 Proz. Die Unterschiede sind wohl dadurch zu erklären, daß die Sättigungsgrade doch nicht gleich waren.

---

1) A. Sieverts, Ztschr. f. anorg. Chem. 92. S. 329. 1915.

2) Vgl. die Literaturzusammenstellung bei W. L. McKeehan, Phys. Rev. 21. S. 334. 1923.

3) M. Yamada, Phil. Mag. 45. S. 241. 1922.

4) W. L. Mc Keehan, Phys. Rev. 21. S. 334. 1923.

Das Vorhandensein einer Verbindung Pd_2H, das McKeehan für wahrscheinlich hält, verneint Yamada. Es sind aus dem Röntgenogramm auch keine sicheren Schlüsse zugunsten der Verbindung Pd_2H zu ziehen. Zu den gleichen Ergebnissen wie bei Yamada führen die hier vorliegenden Versuche; sie ergeben eine Erweiterung des Gitters von 3,89 Å auf 4,00 Å, d. h. um 2,3 Proz., ohne auf das Vorhandensein der Verbindung Pd_2H hinzudeuten.

Bei Beantwortung der Frage nach dem Vorhandensein der Verbindung Pd_2H handelt es sich um die Entscheidung zwischen zwei Fällen: entweder befinden sich die Wasserstoffatome zwischen den Palladiumatomen — das würde zur Bildung von Verbindungen führen können — oder sie nehmen deren Stelle ein, was einen Mischkristall bedeuten würde. Röntgenographisch kann eine Entscheidung auf diesem Wege nicht herbeigeführt werden, weil der Unterschied zwischen den Atomgewichten beider Elemente zu groß ist. Die von einem eventuell vorhandenen Wasserstoffgitter reflektierten Röntgenstrahlen besitzen gegenüber den von dem Palladiumgitter reflektierten eine so geringe Intensität, daß sie nicht nachweisbar sind. Man kann röntgenographisch eben nur eine Erweiterung des Palladiumgitters feststellen.

Dagegen kann folgende Überlegung eine Klärung bringen, indem sie gegen einen Ersatz der Palladiumatome durch die absorbierten Wasserstoffatome spricht. Bei einer Wasserstoffabsorption von dem 623fachen des Palladiumvolumens (bei 0° C und 760 mm Hg) kommt auf 2 Palladiumatome ein Wasserstoffatom. Das Gitter des Palladiums im wasserstoffbeladenen Zustand ist bekannt (flächenzentriert kubisch $a = 4{,}00$ Å); man kann also seine Dichte für den Fall berechnen, daß die Wasserstoffatome an Stelle der Palladiumatome sitzen. Auf jeden flächenzentrierten Würfel kommen vier Atome, deren jedes ein Durchschnittsatomgewicht von $\frac{2 \cdot 106 + 1}{3} = 71$ hat. Da jedes dieser Atome $71 \cdot 1{,}65 \cdot 10^{-24}$ g wiegt, beträgt das Gesamtgewicht eines Würfels $4 \cdot 71 \cdot 1{,}65 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{g} = 468 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{g}$. Für einen Würfel von der Kantenlänge $a = 4{,}00$ Å folgt daraus eine Dichte $s = 7{,}3$. Dieser Wert stimmt mit den beobachteten von 10,76[1]) gar nicht überein; hingegen erhält man unter der Annahme, daß nur die Palladiumatome die Plätze im flächenzentrierten Kubus besetzen, eine Dichte von 10,9. Es geht also mit Sicherheit aus diesen Überlegungen hervor, daß die absorbierten Wasserstoffatome keine Plätze der Palladiumatome einnehmen, sondern sich zwischen sie drängen. Demnach besteht keine Mischbarkeit, wie sie für Mischkristalle von Salzen und Metallen die Grundlage zu dem Vegardschen Gesetz bildet. Über die Art, wie sich die Wasserstoffatome

---

[1]) Mc Keehan, Phys. Rev. 21. S. 334 1923.

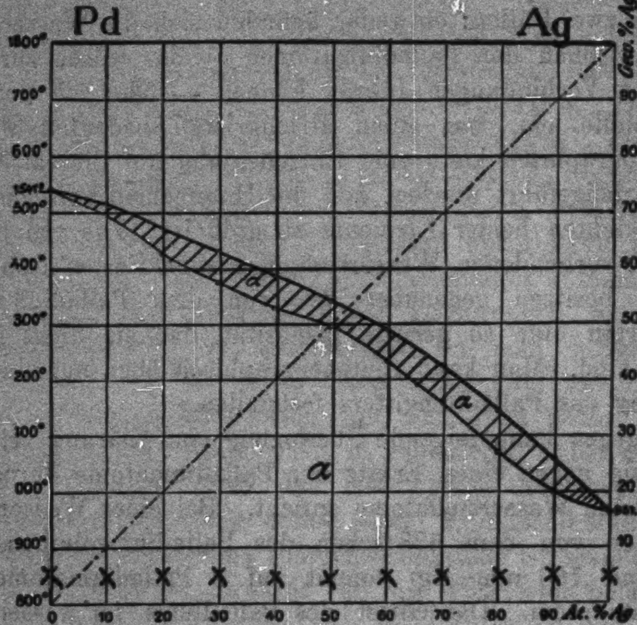


Fig. 1.

im Palladiumgitter anordnen, ob also tatsächlich die Verbindung Pd_2H besteht, kann aber noch nichts ausgesagt werden; deshalb sind im folgenden die Bezeichnungen „feste Lösung" und „Mischkristalle" für das System Palladium-Wasserstoff beibehalten worden.

Um die Änderung des Gitters der Palladium-Silberlegierungen durch Wasserstoffabsorption bestimmen zu können, mußte zuerst die Struktur dieser Legierungen selbst durch röntgenographische Untersuchung aufgeklärt werden.

Die Palladium-Silberlegierungen besitzen, wie durch die

Untersuchungen von Ruer[1]) gezeigt wurde, eine lückenlose Reihe von Mischkristallen (vgl. das Zustandsdiagramm in Fig. 1). Da die beiden Komponenten ein gleiches Gitter — kubisch flächenzentriert mit den Kantenlängen $a_{Pd} = 3{,}89$ Å (Hull[2]) $a = 3{,}950$ Å; McKeehan[3]) $a = 3{,}889 - 3{,}906$ Å) und $a_{Ag} = 4{,}06$ Å[4]) — besitzen, ist also für die Mischkristalle eine Gitterkonstante, entsprechend dem Vegardschen Gesetz[5]), nach dem die Änderung der Gitterkonstante proportional der Konzentration ist, zu erwarten. Die Röntgenogramme wurden ebenso wie in der Arbeit von A. Sacklowski[6]), nach der Methode von Bohlin-Seemann und mit derselben Apparatur aufgenommen.

Die Legierungen wurden im hiesigen Institut durch Zusammenschmelzen der entsprechenden Mengen Palladium und Silber, im ganzen jedesmal ungefähr 10 g, hergestellt und dann zu Blechen ausgewalzt. Als solche wurden sie bei den röntgenographischen Untersuchungen auch benutzt. Die verhältnismäßig große Unschärfe der Linien rührt von der Inhomogenität der Legierungen her und ist durch ihre Herstellungsweise zu erklären.

Fig. 2 auf Tafel I zeigt 6 Aufnahmen dieses Systems. Sehr deutlich ist zu sehen, wie mit wachsendem Silbergehalt, der eine Gittererweiterung bedingt, die Linien der Röntgenogramme zusammenrücken.[7])

Die Annahme der Gültigkeit des Vegardschen Gesetzes findet sich bestätigt. In Fig. 3 sind die gefundenen und berechneten Gitterkonstanten für die einzelnen Legierungen ein-

---

1) R. Ruer, Ztschr. f. anorg. Chem. 51. S. 315. 1906.

2) A. Hull, Phys. Rev. 17. S. 581. 1921.

3) W. L. McKeehan, Phys. Rev. 20. S. 82. 1922; 21. S. 334. 1923.

4) L. Vegard, Phil. Mag. 31. S. 83. 1916.

5) L. Vegard, Ztschr. f. Phys. 5. S. 21. 1921.

6) A. Sacklowski, Ann. d. Phys. 77. S. 241. 1925.

7) Durch die physikalischen Berichte (Heft 17, 1923) erhielten wir erst nachträglich Kenntnis von einer Arbeit von L. W. McKeehan (Phys. Rev. 20. S. 424. 1922), in welcher u. a. über röntgenographische Untersuchungen von Silber Palladiumlegierungen berichtet wurde. Verf. stellte ebenfalls eine Änderung der Gitterkonstante entsprechend dem Vegardschen Gesetz fest. Abweichungen von einer genauen Linearität erklärte er durch die besondere Art der Bearbeitung, da die Legierungen mehrmals gewalzt und angelassen wurden.

getragen. Die gefundenen sind durch Kreuze, die berechneten durch die ausgezogene Grade, deren Endpunkte die Werte für a_{Pd} und a_{Ag} sind, bezeichnet.

Berücksichtigt man die Meßgenauigkeit, die bei diesem System ungefähr 0,5 Proz. beträgt, so ist das Vegardsche Gesetz auch hier erfüllt.

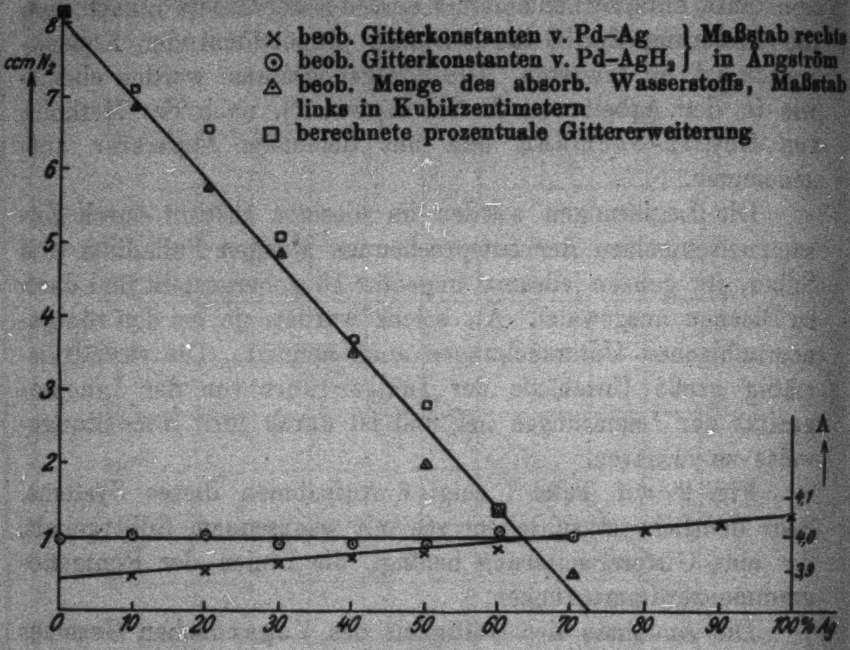


Fig. 3.

Die Absorption des Wasserstoffs in diesen Legierungen hat A. Sieverts[1]) in der Weise untersucht, daß er dünne Bleche der Legierungen bei Temperaturen zwischen 138° bis 820°, nach dem sie im Vakuum ausgeglüht waren, stundenlang auf der Versuchstemperatur im Wasserstoff von Atmosphärendruck gehalten, bis Sättigung eingetreten war. Die Versuche ergeben die auffallende Tatsache, daß die Absorption in Abhängigkeit von der Menge Zusatzmetall bei ungefähr 40 Proz. ein ausgesprochenes Maximum besitzt. In der Fig. 4 ist diese Abhängigkeit für das System Palladium-Silber graphisch dargestellt. Die verschiedenen Kurven gelten

---

1) A. Sieverts, a. a. O.

für die verschiedenen, besonders angegebenen Temperaturen. Für das System Palladium-Gold verlaufen diese Kurven ganz ähnlich, nur sind die absoluten Mengen des absorbierten Wasserstoffes etwas geringer.

Bei Temperaturen unter 140° sind die Zeiten bis zum Eintritt der Sättigung schon so lang, daß die Wasserstoffabsorption der Legierungen auf diese Weise nicht bestimmt werden konnte.

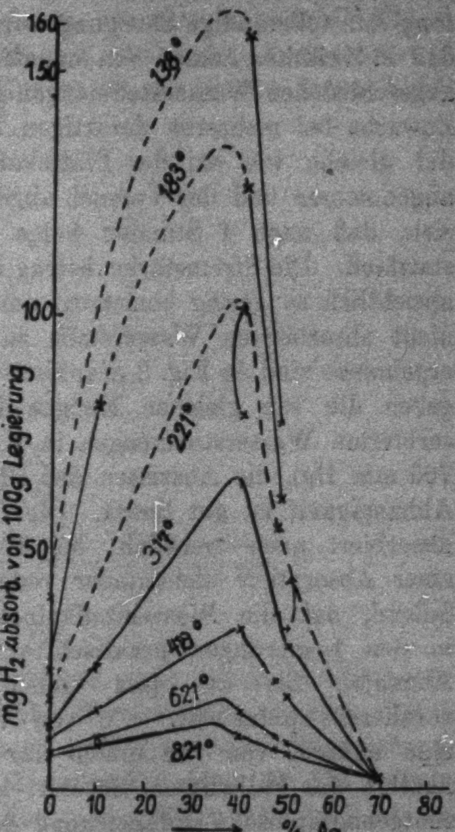


Fig. 4.

Man kann jedoch die Absorption des Wasserstoffs in Palladium und Palladium-Silberlegierungen bei Zimmertemperatur leicht untersuchen, indem man diese Metalle bzw. Legierungen elektrolytisch mit Wasserstoff belädt. Die Beladung findet hier viel schneller statt als nach der ersteren Methode, die absorbierte Menge ist bequem zu bestimmen. Nach diesem elektrolytischen Verfahren wurde die Abhängigkeit der Wasserstoffabsorption des Palladiums von der Menge Silberzusatz bei Zimmertemperatur bestimmt. Ähnlich wie es Berry[1]) gemacht hat, wurden in einer Reihe von elektrolytischen, mit verdünnter Schwefelsäure gefüllten Bädern als Anode ein Platindraht, als Kathode Palladiumbleche mit jedesmal verschiedenem Silbergehalt genommen und der abgeschiedene Wasserstoff in kleinen

---

1) A. J. Berry, Journ. chem. Soc. London. 99. S. 463. 1911.

Meßzylindern durch Wasserverdrängung aufgefangen. Durch Hintereinanderschalten sämtlicher Bäder wurde erreicht, daß an allen Kathoden die gleiche Menge Wasserstoff abgeschieden wurde. Die Differenzen der über den Palladiumlegierungen aufgefangenen Wasserstoffvolumina gegenüber dem an einer Platinkathode aufgefangenen Wasserstoffvolumen gaben die von jeder Kathode absorbierte Menge Wasserstoff an. Eine Prüfung auf vollständige Sättigung wurde in der Weise ausgeführt, daß in Zwischenräumen von ungefähr einer halben Stunde die abgeschiedenen Wasserstoffmengen gemessen wurden. War der Zuwachs bei mehreren derartigen Proben bei allen Kathoden der gleiche wie bei der Platinkathode, so konnte Sättigung angenommen und der Versuch abgebrochen werden. Es zeigte sich, daß nach 4 Stunden keine meßbare Absorption mehr stattfand. Die Stromstärke betrug ungefähr 10 mA.; sie wurde absichtlich so gering bemessen, um möglichst geringe Mengen nicht absorbierten Wasserstoffs zu erzeugen. Die Versuchsergebnisse sind in Fig. 3 graphisch dargestellt. Die Ordinaten geben die von gleichen Mengen Legierung (je 100 mg) absorbierten Wasserstoffmengen in Kubikzentimetern (15° C und 760 mm Hg), die Abszissen den Prozentgehalt Silber an. Die Abhängigkeit ist gut linear. Die Legierung mit 70 Proz. Ag absorbiert noch merklich; bei 80 Proz. Ag kann man von einer Absorption nicht mehr reden. Es ist immerhin auffallend, daß die Wasserstoffaufnahme bei 70—80 Proz. Ag in den Legierungen praktisch auf Null sinkt; eine lineare Abnahme bis zu dem reinen Silber hin wäre von vornherein plausibler. Ob von 70—80 Proz. Ag an doch eine andere, von der ersten nur wenig verschiedene Modifikation des Palladiums einsetzt, könnte nur eine eingehende röntgenographische Untersuchung des reinen Palladiums sicher lehren.

Diese bei Zimmertemperatur gemessen und durch elektrolytische Beladung erzeugten Wasserstoffbeladung nahm also linear mit zunehmendem Silbergehalt der Legierung ab, um bei etwa 70—80 Proz. Silbergehalt auf Null zu sinken. Jedenfalls ist von einem Maximum der Beladung bei einer Legierung von etwa 40 Proz. Silber kein Rede mehr. So könnte es scheinen, als ob ein Widerspruch vorläge mit den Messungen von **Sieverts**, der dieses Maximum nach seiner Meßmethode fand, allerdings bei Temperaturen zwischen 183 und 800°.

Dies scheint sich jedoch aufzuklären, wenn man die Temperaturabhängigkeit der Wasserstoffabsorption durch Palladium und seine Legierungen näher ins Auge faßt. Die nebenstehende Fig. 5 zeigt die von **Sieverts** gemessenen Temperaturabhängigkeitskurven der Wasserstoffabsorption für verschiedene Legierungen. Die Kurven fallen, wie dies ja auch die Theorie verlangt, etwa exponential mit steigender Temperatur ab. Aus den **Sievertsschen** Kurven ist die Stärke dieses Abfalls für die verschiedenen Legierungen nicht mit Sicherheit zu erkennen. Man darf aber wohl die Annahme machen, daß je stärker die Absorption, um so stärker auch ihre Wärmetönung ist. Dann würde also bei Zimmertemperatur die Absorptionswärme beim reinen Palladium am größten sein und mit zunehmendem Silbergehalt abnehmen, um bei 70—80 Proz. Silber mit der Absorption selbst auf Null zu sinken. Nach der Formel des Absorptionsschemas $c = c_0 \cdot e^{-q/RT}$, worin q die Wärmetönung der Absorption bedeuten soll, fällt die Absorptionskurve um so steiler mit zunehmender Temperatur ab, je größer diese Wärmetönung ist. Berücksichtigt man das, so ergibt sich für den Abfall der Kurven etwa folgendes schematische Bild (Fig. 6).

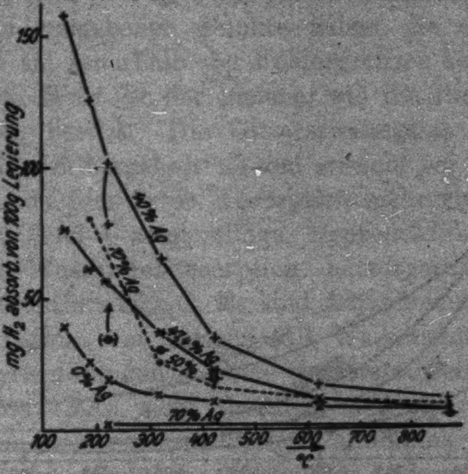


Fig. 5.

Bei diesem Kurvenverlaufe ergibt sich in der Tat, daß bei Zimmertemperatur die Wasserstoffabsorption mit zunehmendem Silbergehalt der Legierung linear abnimmt, während für höhere Temperaturen etwa von über 100° an die 40 proz. Silber-Palladium, die maximale Löslichkeit besitzt. Ob diese Betrachtung zur Erklärung des ausgesprochenen Maximums der Wasserstoffabsorption bei der 40 proz. Legierung allein ausreicht, mag dahingestellt bleiben. Es wäre vielleicht möglich, daß für diese Legierung bei den höheren Temperaturen, bei denen die Zwischenräume zwischen den Kristalliten durch deren Dehnung größer geworden sind, der an der Oberfläche der einzelnen Kristalliten adsorbierte Wasserstoff einen größeren Anteil bildet.

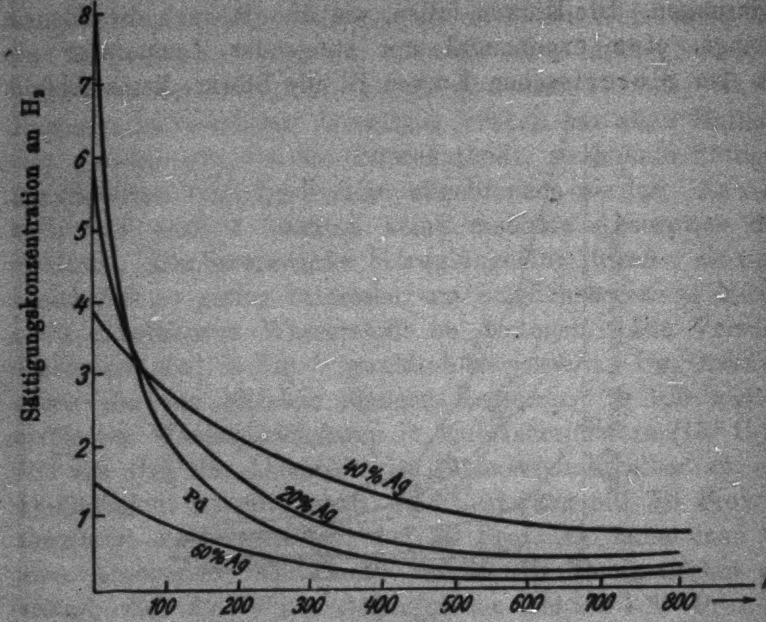


Fig. 6.

Zwischen dem wirklich absorbierten oder gelösten und dem an der Oberfläche der Einzelkristallite adsorbierten Wasserstoff würde man röntgenographisch unterscheiden können, da nur der erstere eine Dehnung des Kristallgitters bedingt. Das soll in einer nachfolgenden Arbeit über den Einfluß des bei höheren Temperaturen aufgenommenen Wasserstoffs auf die Gitterstruktur der Legierungen geschehen. Hier soll zunächst der Einfluß des elektrolytisch bei Zimmertemperatur aufgenommenen Wasserstoffs auf die Struktur festgestellt werden.

In derselben Weise wie beim reinen Palladium wurden auch die Gittererweiterungen der wasserstoffbeladenen Palladiumlegierungen untersucht. Die Röntgenogramme wiesen Linien mit sehr unscharfen Kanten auf. Das ist ein Zeichen dafür, daß die Kriställchen der an sich schon unhomogenen Legierungen den Wasserstoff nicht gleichmäßig absorbieren. Die Ergebnisse sind in Fig. 3 graphisch dargestellt: die von kleinen Kreisen umgebenen Punkte geben die a-Werte an. Man sieht, daß sie innerhalb der Fehlergrenzen konstant sind. Dieser konstante Wert ist der gleiche, wie ihn die Legierung mit 70 Proz. Ag besitzt. Die Gittererweiterung nimmt also mit zunehmendem Silbergehalt ab und erreicht bei 70 Proz. Ag den Wert Null, da hier keine Absorption mehr stattfindet.

Fig. 7 auf Tafel I zeigt einige Reproduktionen, welche die durch die Wasserstoffabsorption hervorgerufene Gittererweiterung veranschaulichen. Es sind Aufnahmen von wasserstofffreiem Palladium, von einigen mit Wasserstoff beladenen Palladium-Silberlegierungen und von wasserstofffreiem 30 Proz. Pd, 70 Proz. Ag. Man sieht deutlich, daß die Linien der Röntgenogramme des wasserstofffreien Palladiums um ein beträchtliches Stück gegenüber denen der anderen Röntgenogramme verschoben sind. Dieser Unterschied entspricht der durch die Wasserstoffabsorption hervorgerufenen Gittererweiterung. Die anderen Röntgenogramme dagegen weisen keine merklichen Verschiedenheiten auf; dies ist also ein Zeichen für die gleiche Gitterkonstante. Fig. 7 zeigt also ebenso wie die graphische Darstellung in Fig. 3, daß das Gitter der Palladiummischkristalle durch die Wasserstoffabsorption bis zu derselben Größe erweitert wird, welche die wasserstofffreie Legierung 30 Proz. Pd, 70 Proz. Ag besitzt.

Zeichnet man die prozentuale Gittererweiterung, für reines Palladium auf den gleichen Maßstab mit der Wasserstoffabsorption gebracht, in Fig. 3 ein, so erhält man eine Kurve, die angenähert mit der Kurve der Wasserstoffabsorption gleichläuft. Die Übereinstimmung kann sogar als gut bezeichnet werden, wenn man die Ungenauigkeit dieser Prozentwerte berücksichtigt. Eine Überschlagsrechnung möge das zeigen. Die Werte der Gitterkonstanten stimmen auf $^1/_2$ Proz.; d. h. sie können um 0,02 Å abweichen. Die Gittererweiterung beträgt maximal 0,11 Å; der Fehler von 0,02 Å dann schon 18 Proz. Bei den anderen Legierungen wird diese Vergrößerung des Zählers noch erheblicher. Bei 20 Proz. Ag z. B. ergibt sich der zulässige Fehler von 0,02 Å auf 0,09 Å gleich 22 Proz., während der eingezeichnete Wert der prozentualen Gittererweiterung nur um 15 Proz. zu groß ist. Aus diesem Beispiel ist zu ersehen, daß die Übereinstimmung der beiden Kurven durchaus zufriedenstellend ist.

Von der Wasserstoffabsorption in Palladium-Silberlegierungen kann man sich also folgendes Bild machen. Wasserstoff geht mit Palladium feste Lösungen bis zu einer gewissen Sättigung ein. Wie bei allen Mischkristallen findet auch hier eine Gittererweiterung statt. Durch den Zusatz von Silber wird das Palladiumgitter ebenfalls erweitert, entsprechend dem Vegardschen Gesetz. Ist für eine Legierung das Gitter kleiner als das des gesättigten Palladiums, so kann sie noch Wasserstoff absorbieren, da dessen Menge nur von der noch möglichen Gittererweiterung abhängt. Bei ungefähr 70 Proz. Ag gleicht das Gitter ohnehin schon dem des gesättigten Palladiums; von dieser Zusammensetzung an ist eine Erweiterung nur durch zugesetztes Silber, nicht aber durch Wasserstoff möglich, d. h. von 70 Proz. Ag an wird kein Wasserstoff mehr absorbiert.

Die zu den Röntgenaufnahmen benutzte Radio-Silex-Apparatur wurde aus Mitteln der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft beschafft, wofür auch an dieser Stelle der verbindlichste Dank ausgesprochen sei.

Greifswald, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 27. Juli 1925.)

5. *Die lichtelektrische Wirkung der Gesamtstrahlung fester Körper;*

von A. Becker.

In einer früheren Arbeit¹) habe ich versucht, aus der damals vorliegenden Kenntnis der lichtelektrischen Wirkung homogener Strahlen auf die Summenwirkung bei Erregung durch die Gesamtstrahlung eines festen Temperaturstrahlers zu schließen. Dieser Versuch führte zu dem bemerkenswerten Ergebnis, daß der Emissionsvorgang in bezug auf Absolutwert und Verteilung der Austrittsgeschwindigkeiten und in bezug auf die Temperaturabhängigkeit der Menge der austretenden Elektronen praktisch in ganz gleicher Weise abläuft, ob ein Metall thermisch oder durch die gleiche Temperaturstrahlung lichtelektrisch erregt wird.

Da die für diese Schlüsse maßgebende Kenntnis gewisser Teilvorgänge seither von mehrfacher Seite eine Erweiterung erfahren hat, ist es aussichtsreich, das Problem noch weiter zu verfolgen. Außerdem schien es mir aber besonders wichtig, durch die unmittelbare, möglichst umfassende *experimentelle* Untersuchung der Erscheinung eine Prüfung und Vertiefung der bisherigen Einsicht vorzunehmen. Denn diese Untersuchung vermag nicht nur den Umfang der Genauigkeit der der theoretischen Betrachtung zugrunde liegenden Einzelkenntnisse zu prüfen, sondern auch vor allem zu entscheiden, ob die beobachtbare physikalische Summe im betrachteten Fall mit der rein mathematischen Summierung der Einzelvorgänge zusammenfällt, ob also die letzteren völlig unabhängig nebeneinander verlaufen.

---

1) A. Becker, Ann. d. Phys. 60. S. 30. 1919.

I. Die emittierte Elektronenmenge.

1. Wie zuerst Hr. Lenard[1]) nachgewiesen und eine Reihe späterer Beobachtungen[2]) in weiten Grenzen bestätigt hat, ist bei konstanter Wellenlänge die Anzahl der von einem Körper emittierten Elektronen in allen Fällen der wirksamen, das ist der absorbierten[3]) *Lichtenergie* proportional.

Bei Bestrahlung eines Körpers mit dem Absorptionsvermögen A_λ' wird also die von ihm emittierte Elektronenmenge durch den Ausdruck

$$n = f(\lambda) \cdot A_\lambda' \cdot E_\lambda \cdot d\lambda$$

dargestellt, wenn $E_\lambda d\lambda$ die auffallende Energie des Wellenbereichs $d\lambda$ ist und $f(\lambda)$ diejenige Elektronenmenge bezeichnet, welche von der Einheit der absorbierten Energie der betreffenden Wellen in Freiheit gesetzt wird.

2. Ändern wir die Wellenlänge, so hat $f(\lambda)$ die Bedeutung der sog. *spektralen lichtelektrischen Empfindlichkeitsverteilung* des betreffenden Körpers. Die Kenntnis derselben, die für unser Problem von grundlegender Bedeutung ist, ist neuerdings namentlich durch Hrn. Suhrmann[4]) erweitert worden, nachdem von den älteren hierhergehörigen Untersuchungen[5]), da sie meist noch nicht die Lichtabsorptionsverhältnisse berücksichtigten, bisher vorwiegend nur diejenige von Hrn. Werner für unsre Zwecke verwertbar gewesen war.

Allen Beobachtungen gemeinsam ist die Feststellung eines von einer gewissen langwelligen Grenze ausgehenden, erst langsamen, dann beschleunigten Anstiegs der lichtelektrischen Wirkung mit abnehmender Wellenlänge. Ein Versuch, die Empfindlichkeitsverteilung auf theoretischem Wege herzuleiten, liegt nur von Hrn Richardson[1]) vor. Sein Ergebnis vermag aber, wie schon Hr. Werner gezeigt hat, den experimentellen Befund in keiner Weise quantitativ darzustellen. Demgegenüber habe ich in der angeführten früheren Arbeit[2]) gezeigt, daß nach Hrn. Werners Beobachtungen $f(\lambda)$ für verschiedene Metalle offenbar in Annäherung als gleiche Funktion der Wellenlänge anzusehen ist und durch den empirischen Ausdruck

---

[1]) P. Lenard, Ann. d. Phys. 8. S. 154. 1902.

[2]) Z. B.: F. K. Richtmyer, Phys. Rev. 29. S. 71 u. 404. 1909; J. Elster u. H. Geitel, Phys. Ztschr. 13. S. 468. 1912.

[3]) Vgl. J. Elster u. H. Geitel, Phys. Ztschr. 10. S. 457. 1909; R. Pohl, Verh. d. D. Phys. Ges. 11. S. 339 u. 609. 1909; P. Lenard u. C. Ramsauer, Heid. Akad. d. Wiss. A. 24. 1911.

[4]) R. Suhrmann, Ann. d. Phys. 67. S. 43. 1922; Ztschr. f. Phys. 33. S. 63. 1925. Weniger weitgehende ähnliche Messungen liegen noch von F. G. Tucker, Phys. Rev. 22. S. 574. 1922 und von J. W. Hornbeck, Phys. Rev. 24. S. 631. 1924 vor.

[5]) E Ladenburg, Verh. d. D. Phys. Ges. 9. S. 504. 1907; Phys. Ztschr. 8. S. 590. 1907; H. Mohlin, Diss. Upsala 1907; W. Hallwachs, Ann. d. Phys. 30. S. 593. 1909; R. Pohl u. P. Pringsheim, Verh. d. D. Phys. Ges. 12. S. 215 u. 349. 1910; S. Werner, Diss. Upsala 1913; R. Pohl u. P. Pringsheim, Verh. d. D. Phys. Ges. 15. S. 111. 1913.

$$f(\lambda) = \text{const} \times \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2$$

analytisch dargestellt werden kann[3]), wenn mit λ_0 die Grenzwelle des Körpers bezeichnet wird.

Um diese Beziehung, die der früheren theoretischen Betrachtung zugrunde gelegt worden war, an dem reichen Versuchsmaterial Hrn. Suhrmanns zu prüfen, habe ich den gesamten Inhalt seiner Tabellen in der Weise graphisch ausgewertet, daß ich jeweils die für die Einheit der absorbierten Lichtenergie beobachtete emittierte Elektronenzahl als Funktion von λ/λ_0 aufzeichnete. Einen gewissen Spielraum läßt dabei allerdings die Wahl der Grenzwelle, da die lichtelektrische Empfindlichkeit schon in deren Nähe so klein wird, daß schon geringe Störungen der Beobachtung etwa durch falsches Licht eine merkliche Unsicherheit in der Lage dieser Grenze herbeiführen können. Durchweg wurde als Grenze eine Wellenlänge angenommen, bei welcher die beobachtete Wirkung mindestens auf $^1/_{1000}$ ihres höchsten gemessenen Werts gesunken ist.

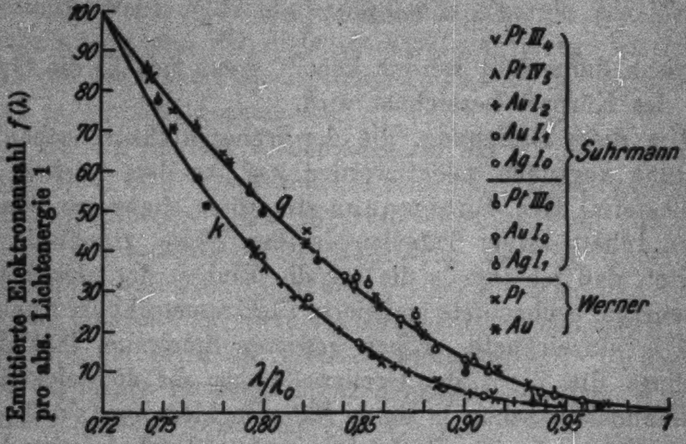
---

1) O. W. Richardson, Phil. Mag. 23. S. 615 u. 24. S. 570. 1912.

2) A. Becker, a. a. O. S. 44.

3) Da bei den Metallen der Gang der Lichtabsorption mit der Wellenlänge im allgemeinen erheblich hinter dem Gang der lichtelektrischen Empfindlichkeit zurückbleibt, so muß dieser Ausdruck, wenn ihm allgemeinere Gültigkeit zukommen soll, auch die älteren, nur auf *auffallende* Lichtenergie bezogenen Beobachtungen wenigstens angenähert wiedergeben. Dies ist in der Tat fast immer der Fall. Insbesondere vermag er auch die über das große Wellenintervall von 217 bis 578 $\mu\mu$ ausgedehnten Messungen von Hallwachs an K gut darzustellen. Vom allgemeinen Verlauf weichen nur die Angaben Ladenburgs im Sinne eines stärkeren Ganges erheblicher ab.

Einen Überblick über das Ergebnis dieses Verfahrens gibt die Fig. 1. Man erkennt, daß die Gesamtheit der verzeichneten Punkte sich mit großer Annäherung um zwei Kurven gruppiert, auf denen auch die der Übersichtlichkeit wegen nicht aufgetragenen Punkte Pt III_2, Pt III_3, Au I_3 (*k*) und Ag II_2 (*q*) liegen, während nur die ebenfalls nicht aufgetragenen Punkte der beiden in gleicher Weise behandelten Metalle Pt II_1 und Pt III_1 zwischen beiden Kurven liegen. Eine Vereinigung aller Punkte auf einer einzigen ausgleichenden Kurve, etwa durch geeignete Wahl der jeweiligen Grenzwelle, erscheint unmöglich,



$f(\lambda) = \mathrm{const} \times \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2$ für *q*, $f(\lambda) = \mathrm{const} \times \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^3$ für *k*.

Fig. 1.

solange man die Sicherheit der von Hrn. Suhrmann gegebenen Daten nicht in Frage stellt. Man muß also annehmen, daß für die lichtelektrische Geschwindigkeitsverteilung offenbar zwei durch die Stärke des Anstiegs sich unterscheidende Gesetze in Betracht kommen. Für die Zugehörigkeit zu diesen Gesetzen entscheidet nicht die chemische Natur, sondern die physikalische Beschaffenheit der einzelnen Metalle. Das unterscheidende Merkmal der verschiedenen Proben des gleichen Metalls, welche Hr. Suhrmann untersucht hat, ist der verschiedene Gasgehalt. Während die mit dem Index Null versehenen Proben vor jeglichem Erhitzen benutzt worden sind und daher oberflächlich und im Metallinneren mit Gas beladen sind, sind die mit dem Index I versehenen Proben durch kurzes Glühen von ihrer Oberflächenhaut befreit und die Proben mit höherem Index durch wiederholtes längeres Glühen im Vakuum auch innerlich zunehmend entgast. Bei Platin und Gold liegen die gashaltigen Proben auf der q-Kurve, und die entgasten treten auf die k-Kurve über. Das Verhalten des Silbers ist demgegenüber das umgekehrte. Daß auch die von Hrn. Werner beobachteten Pt- und Au-Werte, wie Fig. 1 zeigt, auf der q-Kurve liegen, entspricht dem Gasgehalt dieser Proben. Ein Unterschied der Schichtdicke — Hr. Werner benutzte dünnste Kathodenzerstäubungsschichten, Hr. Suhrmann dagegen erheblich dickere Metallfolien — macht sich also am Kurvenverlauf nicht bemerkbar. Damit erweisen sich auch Einflüsse von Elektronenabsorption auf die betrachtete Erscheinung als unmerklich, wie dies auch aus der Gleichartigkeit des Kurvenverlaufs für verschiedene Metalle zu folgern ist.[1])

Fragen wir jetzt nach der analytischen Gleichung der ausgezeichneten Kurven, so zeigt sich, daß die Kurve q durch unsere genannte quadratische Formel wiedergegeben wird, während für die Kurve k eine ganz gleich gebaute kubische Formel

$$f(\lambda) = \text{const} \times \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^3$$

gilt. Wie weit diese Formen als zutreffender theoretischer Ausdruck des lichtelektrischen Grundvorganges gelten können, muß dahingestellt bleiben. Für uns genügt die Feststellung ihrer meist ausgezeichneten Wiedergabe der beobachteten Zusammenhänge, deren weitere quantitative Verwertung sie ohne irgendwelche Einbuße an Sicherheit des Verfahrens sehr erheblich vereinfachen.

Wie weit der Gültigkeitsbereich unserer Formeln sich in das noch nicht näher untersuchte Gebiet kürzester Wellen erstreckt, ist für unsere augenblicklichen Fragen nicht von wesentlicher Bedeutung, da bei allen verfügbaren festen, d. h. nicht stark selektiven Temperaturstrahlern[2]) das Wellengebiet

---

1) Vgl. A. Becker, a. a. O. S. 43, Anm. 4.

2) Bei außerirdischen Strahlern höherer Temperatur wird das intensivere kurzwellige Ultraviolett durch Absorption in der Erdatmosphäre ausgeschieden.

unter etwa 200 $\mu\mu$ mit so geringer Intensität vertreten ist, daß es nahezu wirkungslos bleibt. Immerhin kann bemerkt werden, daß die von den Formeln angezeigte dauernde Zunahme der Kurvensteigung nach kürzeren Wellen hin

$$\left(-\frac{d f(\lambda)}{d \lambda}\right)_q = \frac{\text{const}}{\lambda_0} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\right)$$

und

$$\left(-\frac{d f(\lambda)}{d \lambda}\right)_k = \frac{\text{const}}{\lambda_0} \cdot \left(1 - \frac{2\lambda}{\lambda_0} + \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2}\right)$$

mit bisheriger Kenntnis nicht in Widerspruch zu stehen scheint.

3. Wenn wir uns jetzt der Frage nach der *lichtelektrischen Wirkung der Gesamtstrahlung* eines Körpers zuwenden, so sollen die früheren Überlegungen dieser Art nach zwei Richtungen erweitert werden. Wir lassen einerseits die Beschränkung der Betrachtung auf schwarze Körper fallen und untersuchen andererseits den Einfluß, welchen der Übergang von der quadratischen zur kubischen Empfindlichkeitsverteilung auf das Ergebnis hat.

Die Erregung erfolge durch einen Temperaturstrahler mit der absoluten Temperatur θ und dem Absorptionsvermögen A_λ. Dann ist die vom bestrahlten Körper mit dem Absorptionsvermögen A_λ' in der Zeiteinheit emittierte Elektronenzahl allgemein

$$n = \text{const} \times \int_0^{\lambda_0} f(\lambda) \cdot A_\lambda \cdot A_\lambda' \cdot \lambda^{-5} \cdot e^{-\frac{c_2}{\lambda\theta}} \, d\lambda\,,$$

wenn für die Strahlenenergie das Plancksche Gesetz in der vereinfachten Wienschen Form eingeführt wird, was hier streng zulässig ist.

Die Durchführung der Integration setzt voraus, daß außer $f(\lambda)$ die Größen A_λ und A_λ' als Funktion der Wellenlänge bekannt sind. Da der Integrationsbereich, wie aus dem späteren (vgl. Fig. 7) noch ersichtlich werden wird, praktisch immer ein relativ begrenzter ist, wird man für dieselben im allgemeinen den Ansatz

$$A_\lambda = a + b\,\frac{\lambda}{\lambda_0} + c\,\frac{\lambda^2}{\lambda_0^2}\,,$$

$$A_\lambda' = a' + b'\,\frac{\lambda}{\lambda_0} + c'\,\frac{\lambda^2}{\lambda_0^2}$$

machen können, wo die variable Wellenlänge mit der Grenzwelle des erregten Körpers gemessen wird, so daß die Konstanten dimensionslos und also unabhängig von dem Maß der Wellenlänge werden. Bei sehr ausgesprochen selektiven optischen Eigenschaften eines benutzten Körpers, wo dieser Ansatz nicht für das ganze Integrationsgebiet ausreichte, wäre etwa eine Zerlegung des Integrals in kleinere Teile vorzunehmen.

a) *Im Falle quadratischer Empfindlichkeitsverteilung* wird das Integral[1])

$$n_2 = \text{const} \times \int_0^{\lambda_0} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2 A_\lambda \cdot A_\lambda' \cdot \lambda^{-5} \cdot e^{-\frac{c_2}{\lambda\theta}} \cdot d\lambda\,.$$

Die Ausführung desselben führt zunächst auf die Form

$$\begin{aligned} n_2 = e^{-\frac{c_2}{\lambda\theta}} \cdot \Big\{ & \frac{6\,a\,a'}{c_2^4}\,\theta^4 + (6\,a\,a' + 2\,k)\frac{\theta^3}{c_2^3 \cdot \lambda_0}(3\,a\,a' + 2\,k + g)\frac{\theta^2}{c_2^2 \cdot \lambda_0^2} + \\ & + (a\,a' + k + g + f)\frac{\theta}{c_2\,\lambda_0^3} + \left(p + \frac{c\,c'}{2}\right)\frac{1}{\lambda_0^4} - \frac{c\,c'}{2} \cdot \frac{c_2}{\lambda_0^5\,\theta}\Big\} + \\ & + Ei\left(-\frac{c_2}{\lambda_0\,\theta}\right) \cdot \left\{p\,\frac{c_2}{\lambda_0^5\,\theta} - \frac{h}{\lambda_0^4} - \frac{c\,c'}{2}\,\frac{c_2^2}{\lambda_0^6\,\theta^2}\right\}. \end{aligned}$$

Wird das Exponentialintegral in eine beim Auftreten praktisch verschwindend kleiner Glieder abbrechende Reihe entwickelt und für die abkürzenden Konstanten *f, g, h, k, p* ihr Ausdruck eingesetzt, so heben sich eine Reihe von Gliedern auf, und es resultiert die einfache Lösung

$$n_2 = \text{const} \times 2\,\frac{\theta^3}{c_2^3} \cdot \left[\frac{3\,l}{c_2} \cdot \theta + \frac{m}{\lambda_0}\right] \cdot e^{-\frac{c_2}{\lambda_0\,\theta}}\,,$$

worin die beiden Konstanten durch die obigen Absorptionskonstanten in folgender Weise ausgedrückt sind:

$$l = a\,a' - 2\,b'\,c - 2\,b\,c' - 3\,c\,c' - a'\,c - b\,b' - a\,c'\,,$$

$$m = a\,a' + a'\,b + b'\,a + a'\,c + b\,b' + a\,c' + b'\,c + b\,c' + c\,c'\,.$$

Die emittierte Elektronenmenge wird also allgemein durch eine von den optischen Eigenschaften der beiden Körper — des strahlenden und des bestrahlten — unabhängige Exponentialfunktion und durch einen „Temperaturfaktor“ bestimmt, dessen Wert zu einem Teil von den optischen Eigenschaften der Körper beeinflußt wird.

---

[1]) Der Index von *n* soll auf die betreffende quadratische bzw. kubische Empfindlichkeitsverteilung hinweisen.

Sind beide Körper *schwarze*, so wird $l = m = 1$, und der erhaltene allgemeine Ausdruck geht, wie es sein muß, in den entsprechenden der früheren Arbeit[1]) über. Handelt es sich um zwei *graue*[2]) Körper, so wird $l = m < 1$, und die beiden Konstanten sind also gleiche echte Brüche. In allen anderen Fällen müssen die optischen Eigenschaften der Körper, insbesondere im Ultraviolett bekannt sein, was zurzeit nur sehr mangelhaft der Fall ist. Für die beiden in den mitzuteilenden Versuchen benutzten Metalle Wolfram (als Strahler) und Aluminium (als bestrahlter Körper) entnehmen wir das Absorptionsvermögen den, soweit bekannt, einzigen für das Ultraviolett bisher hierüber vorliegenden Angaben von Hrn. Hulburt[3]) und setzen

$$\begin{array}{llll} \text{für Wolfram} & a = +1{,}10, & \text{für Aluminium} & a' = +1{,}46, \\ & b = -0{,}70, & & b' = -2{,}38, \\ & c = +0{,}28, & & c' = +1{,}19, \end{array}$$

so daß für $l = 0{,}221$ und $m = 0{,}184$ resultiert, das sind also relativ kleine echte Brüche.

Wägen wir nach diesen Feststellungen die beiden Summanden in der eckigen Klammer des Temperaturfaktors gegeneinander ab, so zeigt sich, daß in allen drei betrachteten Fällen bei Temperaturen unter 5000° der zweite Summand über den ersten, selbst bei der relativ großen Grenzwelle des Aluminiums, merklich überwiegt und daß dadurch der Einfluß der optischen Eigenschaften der beiden Körper auf den Temperaturgang von n nahezu herausfällt. Eine genaue Kenntnis dieser Eigenschaften ist also glücklicherweise für unsere Folgerungen nicht erforderlich.[4]) Wir schließen daher:

---

1) A. Becker, a. a. O. S. 45.

2) Als „grauer" Körper wird ein solcher bezeichnet, dessen Absorptionsvermögen kleiner als 1 und von der Wellenlänge unabhängig ist.

3) E. D. Hulburt, Astroph. Journ. **42.** S. 203. 1915; **45.** S. 149. 1917; Bull. Nela Res. Lab. **1.** S. 336. 1922.

4) Es spielt also auch eine etwa vorhandene geringe Temperaturabhängigkeit der Absorption der Metalle keine Rolle. Über diese siehe z. B. J. Koenigsberger, Verh. d. D. Phys. Ges. **1.** S. 247. 1899; A. G. Worthing, Phys. Rev. **10.** S. 377. 1917; Ztschr. f. Phys. **22.** S. 9 u. **23.** S. 336. 1924; W. Weniger u. A. H. Pfund, Phys. Rev. **14.** S. 427. 1919; A. G. Worthing u. W. E. Forsythe, Phys. Rev. **18.** S. 144. 1921; F. Henning u. W. Heuse, Ztschr. f. Phys. **16.** S. 63. 1923; E. Lax u. M. Pirani, Ztschr. f. Phys. **22.** S. 275. 1924.

Im Falle quadratischer Empfindlichkeitsverteilung wird der „Temperaturfaktor" der Elektronenmenge mit guter Annäherung unabhängig von den optischen Eigenschaften der beiden Körper der dritten Potenz der absoluten Temperatur des Strahlers proportional.

b) *Bei kubischer Empfindlichkeitsverteilung* folgt für die emittierte Elektronenmenge

$$n_3 = \mathrm{const} \times \int\limits_0^{\lambda_0} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^3 \cdot A_\lambda \cdot A_\lambda' \cdot \lambda^{-5} \cdot e^{-\frac{c_2}{\lambda \theta}} \cdot d\lambda\,.$$

Die Integration führt hier zunächst auf die Form

$$\begin{aligned} n_3 = e^{-\frac{c_2}{\lambda_0 \theta}} \cdot \Big\{ & 6 a a' \frac{\theta^4}{c_2^4} + (6 a a' + 2 d) \frac{\theta^3}{c_2^3 \lambda_0} + (3 a a' + 2 d + e) \frac{\theta^2}{c_2^2 \cdot \lambda_0^2} + \\ & + (a a' + d + e + b) \frac{\theta}{c_2 \lambda_0^3} + \left(r + \frac{s}{2} - \frac{c c'}{3}\right) \frac{1}{\lambda_0^4} + \\ & + \left(\frac{c c'}{6} - \frac{s}{2}\right) \frac{c_2}{\lambda_0^5 \theta} + \\ & + Ei\left(-\frac{c_2}{\lambda_0 \theta}\right) \cdot \left\{ -\frac{t}{\lambda_0^4} + r \frac{c_2}{\lambda_0^5 \theta} - s \frac{c_2^2}{2 \lambda_0^6 \theta^2} - \frac{c c'}{6} \frac{c_2^3}{\lambda_0^7 \theta^3} \right\}. \end{aligned}$$

Nach Reihenentwicklung des Exponentialintegrals und Zusammenfassung der abkürzenden Konstanten b, d, e, r, s, t findet sich infolge Wegfallens einer großen Zahl von Gliedern das außerordentlich einfache Resultat

$$n_3 = \mathrm{const} \times 6\, m \frac{\theta^4}{c_2^4} \cdot e^{-\frac{c_2}{\lambda_0 \theta}}\,,$$

worin die Konstante m mit der gleichbenannten des vorbetrachteten Falles identisch ist. Die optischen Konstanten der beiden Körper erscheinen hier also nur in einem einzigen Proportionalitätsfaktor des ganzen Ausdrucks und werden daher auf den Temperaturgang von n_3 völlig einflußlos. Wir schließen:

Im Falle kubischer Empfindlichkeitsverteilung wird der „Temperaturfaktor" der Elektronenmenge für alle Körper streng der vierten Potenz der absoluten Temperatur des Strahlers proportional.

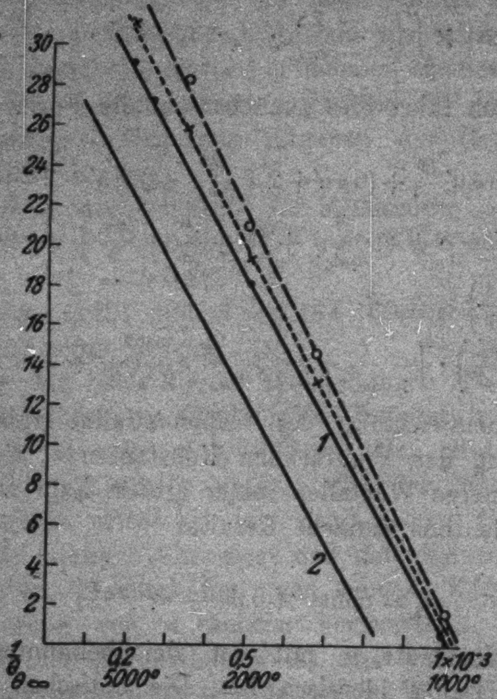
4. In beiden Fällen erscheint die Exponentialfunktion als Faktor, und sie übt bei allen praktisch in Betracht kommenden Temperaturen einen weit überwiegenden Einfluß auf den

Temperaturgang von n aus. Logarithmiert man die beiden erhaltenen Ausdrücke und trägt

das eine Mal $\log n_3 - 3 \log \theta - \log \left[\frac{3\,l}{c_2}\theta + \frac{m}{\lambda_0}\right]$,

das andere Mal $\log n_3 - 4 \log \theta$

als Funktion von $1/\theta$ auf, so erhält man bei gleichem λ_0 naturgemäß zwei streng parallele Geraden, deren Richtungstangente bei Benutzung natürlicher Logarithmen den Wert von c_2/λ_0 hat.



Ordinate
1 $\log n_3 - 3 \log \theta - \log \left[\frac{3}{c_2}\theta + \frac{1}{\lambda_0}\right] + \text{const.}$
2 $\log n_3 - 4 \log \theta + \text{const.}$
● $\log n_3 - 3 \log \theta + \text{const.}$
× $\log n_3 - 3 \log \theta + \text{const.}$
○ $\log n_3 - 2 \log \theta + \text{const.}$

Fig. 2.

Wie geringfügig im allgemeinen der Einfluß der eckigen Klammer von n_3 auf die Steigung der Geraden ist, wird aus Fig. 2 ersichtlich, in welcher durch die eingezeichneten

Punkte • die Veränderung dieser Steigung durch Weglassen des Klammerwertes (für schwarze Körper) veranschaulicht wird. Daß man aber auch noch dann in weitem Temperaturbereich mit sehr großer Annäherung eine logarithmische Gerade erhält, wenn man fälschlicherweise n_2 etwa einen der dritten oder gar der zweiten statt der vierten Potenz der Temperatur proportionalen Temperaturfaktor zuordnet, lassen die diesen Fällen entsprechenden Kreuze × und Ringe ○ der Fig. 2 erkennen. Das Auftreten einer logarithmischen Geraden ist also an sich nicht für die Richtigkeit des für n benutzten Ausdrucks beweisend; es spricht nur für das starke Überwiegen des Gangs der Exponentialfunktion über denjenigen des Temperaturfaktors.

5. Dieser überwiegende Einfluß der Exponentialfunktion legt es nahe, die *„lichtelektrischen Geraden"* zur Bestimmung der Grenzwellenlänge λ_0 eines Körpers heranzuziehen, da auf diesem Wege prinzipiell eine Genauigkeit erwartet werden darf, welche diejenige der anderen hierfür verfügbaren Methoden wesentlich übersteigt. Hierauf ist von Hrn. Suhrmann[1]) hingewiesen worden. Der Art seiner Durchführung dieses Gedankens kann ich aber nicht beistimmen. Denn Hr. Suhrmann setzt[2]) (für schwarze Körper) von vornherein, um vermeintlich mit der Theorie der Glühelektronen[3]) in Einklang zu kommen,

$$n = \int_0^{\lambda_0} f(\lambda) \cdot E_\lambda \cdot d\lambda = M \cdot \theta^2 \cdot e^{-\frac{c_2}{\lambda_0' \theta}}$$

und glaubt diesen Ansatz dadurch „experimentell" bestätigt zu haben, daß er nach graphischer Ausführung des Integrals unter Benutzung der von ihm experimentell untersuchten Empfindlichkeitsverteilung $f(\lambda)$ zu logarithmischen Geraden kommt. Das Ergebnis der graphischen Integration muß nun aber letzten Endes mit den vorstehenden mathematischen Ergebnissen übereinstimmen und also mit Notwendigkeit zu Temperaturfaktoren

---

1) R. Suhrmann, Ztschr. 33. S. 63. 1925.

2) Wenn die Buchstabenbezeichnung sinngemäß den vorstehenden Betrachtungen angepaßt wird.

3) Bekanntlich hat auch diese bisher zu recht verschiedenen Potenzen des Temperaturfaktors geführt. Über die experimentelle Entscheidungsmöglichkeit vgl. das Nachfolgende.

führen, welche der dritten bzw. vierten Potenz der Temperatur proportional sind. Dann muß auch die in der Exponentialfunktion auftretende Grenzwelle mathematisch notwendig mit der oberen Grenze des Integrals übereinstimmen. Daraus folgt, daß die Bestimmung der Grenzwellenlänge auf dem von Hrn. Suhrmann eingeschlagenen Wege überhaupt undurchführbar ist und daß ein Erfolg nur von der unmittelbaren experimentellen Festlegung des Ganges von n mit der Temperatur des Strahlers zu erwarten ist.

Daß eine *zwangsweise Abänderung* der Potenz des Temperaturfaktors ebenfalls praktisch zu logarithmischen Geraden führt, ist oben gezeigt worden. Man erkennt aus Fig. 2 weiter, daß eine Herabsetzung der Potenz zu größerer Steilheit der Geraden, d. h. zu kleinerem λ_0 führt. Dadurch wird das Auftreten zweier verschiedener Grenzwellen λ_0 und λ_0' (wo $\lambda_0' < \lambda_0$) vollständig erklärt. Es werden damit alle Deutungsversuche Hrn. Suhrmanns, insbesondere auch die Annahme eines Temperatureinflusses auf den lichtelektrischen Effekt und der Schluß auf den absoluten Nullpunkt, gegenstandslos.

6. *Experimentelle Ermittlung des Ganges der emittierten Elektronenmenge mit der Temperatur des Strahlers.*

Der Versuch einer solchen Bestimmung ist bisher nur von Hrn. Bergwitz[1]) durchgeführt worden. Er benutzte als Strahlenquelle einen elektrisch geheizten Platintiegel, dessen Strahlung eine Kaliumzelle lichtelektrisch erregte, und fand einen der ursprünglichen Richardsonschen Gleichung des Glüheffekts entsprechenden Verlauf.

Die Versuchsanordnung für die eigenen Messungen, die gleichzeitig dem Zweck der Geschwindigkeitsmessung der emittierten Elektronen dienen mußte, wird aus Fig. 3 ersichtlich. Als Strahler diente ein Wolframband[2]) von 1,5 mm Breite, das elektrisch geheizt wurde und so eingespannt war, daß die Strahlung der einen Seite durch mehrere Blenden *Bl* in den lichtelektrischen Meßraum fiel, während die Rückseite zum Zweck der Temperaturmessung mittels Pyrometers anvisiert werden konnte. Wegen der erforderlichen sehr hohen Lichtintensitäten mußte für die Temperaturmessung, die immer gleichzeitig mit der zugehörigen lichtelektrischen Messung erfolgte, eine Abschwächung des Lichtes auf $^1/_{100}$ mit Hilfe eines eingeschalteten rotierenden Sektors vorgenommen werden. Aus der dabei festgelegten schwarzen Temperatur θ_s des Wolframs

---

[1]) R. Bergwitz, Verh. d. D. Phys. Ges. 3. Reihe. 3. S. 25. 1922.

[2]) Ich verdanke dasselbe dem außerordentlichen Entgegenkommen der Osram-Gesellschaft Berlin, insbesondere deren Direktor, Hrn. Prof. Dr. Gehlhoff.

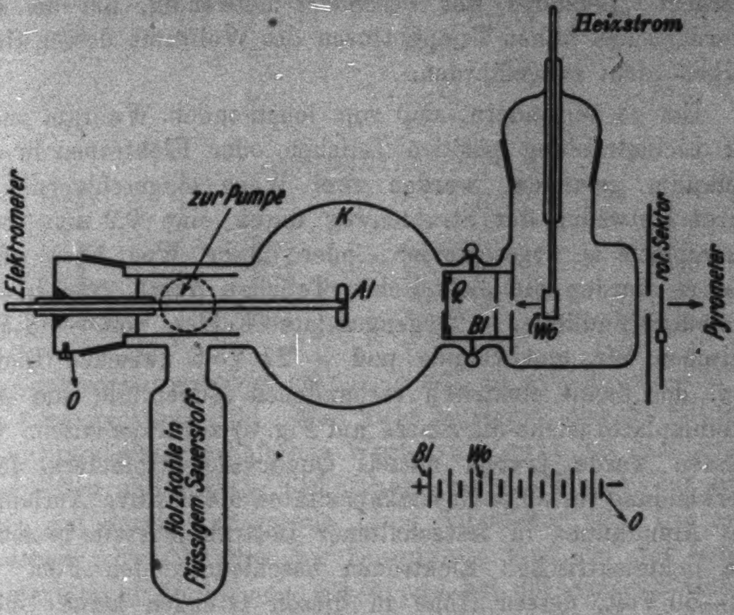


Fig. 3.

fand sich dessen zugehörige wahre Temperatur θ durch die Beziehung

$$\frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta_s} - \frac{\lambda}{c_2} \log \text{nat} \frac{100}{A_\lambda},$$

wo $c_2 = 1{,}43$ cm × Grad und A_λ das Absorptionsvermögen des Wolframs[1]) bei der vom Rotglas des Pyrometers durchgelassenen Wellenlänge $\lambda = 6{,}43 \cdot 10^{-5}$ cm ist.

Die Wolframstrahlung fiel auf eine geschmirgelte Aluminiumplatte von 2 cm Durchmesser, die sich, mit Elektrometerableitung versehen, in der Mitte einer innen verkupferten Glaskugel[1]) von 10 cm Durchmesser befand. Das Ganze wurde unter gleichzeitigem Erhitzen von außen mittels der Pumpe sorgfältig evakuiert und nach Abschließen der Verbindung mit der Pumpe durch Eintauchen des Rohransatzes mit zuvor entgaster Holzkohle in flüssigen Sauerstoff[2]) auf höchstes Vakuum gebracht. Letzteres war besonders notwendig, um bei den erforderlichen hohen Temperaturen des Wolframs dessen Haltbarkeit nicht zu gefährden.

---

[1]) Dasselbe ist im sichtbaren Gebiet und im Ultrarot durch mehrere Arbeiten sehr gut bekannt. Vgl. W. W. **Coblentz** und W. B. **Emerson**, Bull. Bur. of Stand. **14**. S. 312. 1918; M. **Pirani**, Ztschr. f. Elektrochem. **29**. S. 5. 1923 und die an früherer Stelle genannten Arbeiten über Temperaturabhängigkeit des Absorptionsvermögens.

Um zu verhindern, daß vom leuchtenden Wolfram außer der Lichtstrahlung positive Teilchen oder Elektronen in den Meßraum gelangen, wurden zwei Wege eingeschlagen. Es wurde entweder der Strahlenweg durch eine 0,2 mm dicke Quarzplatte Q abgeschlossen, oder dieser Weg blieb offen, und es wurden die elektrischen Teilchen durch zwei hintereinanderbefindliche, entgegengesetzte Felder von -8 Volt zwischen Wo und Blende und $+22$ Volt zwischen Blende bzw. der damit elektrisch verbundenen Kugelhülle und Aluminiumplatte (siehe die Skizze auf Fig. 3) zurückgehalten. Gemessen wurde jeweils mittels Quadrantelektrometers unter Verwendung variabler Zusatzkapazitäten die positive Aufladung des Aluminiums in festgehaltener Bestrahlungszeit in einem die lichtelektrischen Elektronen beschleunigenden Feld von 22—50 Volt, dessen Höhe in diesen Grenzen keine Unterschiede hervorrief. Die Tab. 1 enthält die Mittelwerte mehrerer Versuchsreihen, auf gleiche Kapazität des Meßsystems und auf gleiche Empfindlichkeit umgerechnet.

Man erkennt die sehr erhebliche Steigerung der Elektronenausbeute bei verhältnismäßig geringen Temperatursteigerungen, wie dies für einen exponentiellen Gang charakteristisch ist. Trägt man

das eine Mal $\log n - 3 \log \theta$
das andre Mal $\log n - 4 \log \theta$

---

[1]) Die Verkupferung wurde in entgegenkommender Weise von der Gasglühlicht-Auer-Gesellschaft in Berlin ausgeführt.

[2]) Die Herren Gebr. Leferenz in Heidelberg haben wiederum in dankenswerter Weise bereitwilligst den erforderlichen Sauerstoff zur Verfügung gestellt.

Tabelle 1.

Mit Sektor gemessene schwarze Temperatur θ_g abs.	wahre Temp. des Wolframs θ abs.	$\frac{1}{\theta}$	Austretende Elektronenmenge n in Sk/Sek.
	mit Quarzfenster		
1503°	2355°	$0{,}424 \cdot 10^{-3}$	0,49
1628	2674	0,374	4,25
1673	2801	0,357	15,40
1741	3000	0,333	42,00
1810	3215	0,311	85,10
	ohne Quarzfenster		
1396°	2105°	$0{,}475 \cdot 10^{-3}$	0,060
1428	2179	0,459	0,139
1573	2534	0,395	2,00
1642	2723	0,367	9,10
1688	2849	0,351	16,12
1720	2941	0,340	21,70

als Funktionen von $1/\theta$ graphisch auf, so erhält man das in Fig. 4 verzeichnete Bild. Man sieht zunächst, daß die mit und ohne Quarzfenster erhaltenen Werte sich recht gut aneinander anschließen und daß ihr Temperaturgang in beiden Fällen etwa gleich gut durch eine gerade Linie darstellbar ist. Die vorhandenen Abweichungen der Einzelwerte sind bei der hohen Temperaturempfindlichkeit von n und bei der experimentellen Schwierigkeit einer völligen Konstanthaltung der erforderlichen hohen Temperaturen während der jeweiligen Versuchsdauer nicht verwunderlich.

Die Ergebnisse der Beobachtung sind also insofern als mit denjenigen unserer theoretischen Betrachtungen in Einklang stehend zu bezeichnen, als sie *den überwiegenden Einfluß einer die Temperatur enthaltenden Exponentialfunktion* anzeigen. Was die experimentelle Entscheidung bezüglich des zutreffenden *Temperaturfaktors* betrifft, so kann man diese nicht aus der Tatsache der Geradlinigkeit sondern ehestens aus der Größe der Liniensteigung, d. h. aus dem zugehörigen Wert der Grenzwelle λ_0 herleiten. Dieser berechnet sich aus der Geraden 2 zu $3{,}87 \cdot 10^{-5}$ cm und aus der Geraden 3 zu $4{,}18 \cdot 10^{-5}$ cm Beide Werte sind mit sonstiger Kenntnis gut verträglich; der letztere fällt nahe zusammen mit dem von den Herren Richard.

son und Compton[1]) für Aluminium gefundenen ($4{,}11 \cdot 10^{-5}$ cm). Eine Entscheiduung für die eine oder andere Gerade aus diesen Werten erscheint nicht möglich, solange nicht der wahre Wert von λ_0 für die gerade benutzte Aluminiumprobe auf anderem Wege gleichzeitig festgelegt wird. Betrachten wir umgekehrt unsere theoretischen Angaben als zutreffenden Ausdruck der Wirklichkeit, setzen wir also voraus, daß die physikalische Gesamterscheinung, die wir beobachten, tatsächlich einfach die mathematische Summe der Wirkungen der Einzelwellen ist, so würde man sich im Hinblick auf den Gasgehalt des benutzten Aluminiums wohl für die dritte Potenz des Temperaturfaktors zu entscheiden und daher $\lambda_0 = 3{,}87 \cdot 10^{-5}$ cm als wahre Grenzwelle unseres Aluminiums zu betrachten haben. Daß diese

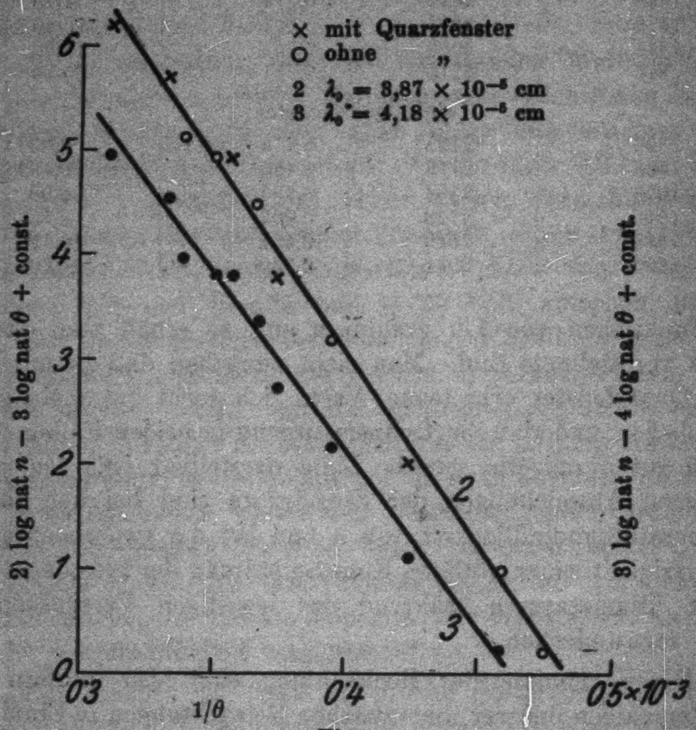


Fig. 4.

---

[1] O. W. Richardson und K. T. Compton, Phil. Mag. 24. S. 585. 1912.

Grenzwelle noch tiefer liegen sollte, ist nach aller Kenntnis der lichtelektrischen Eigenschaften des Aluminiums nicht anzunehmen. Es würde denn auch eine niedrigere Potenz des Temperaturfaktors als 3 ausgeschlossen und unsere theoretische Voraussage von dieser Seite voll bestätigt sein.

Um ausreichende lichtelektrische Wirkungen selbst bei Aluminium zu erzielen, bedarf es, wie unsere Versuche zeigten, relativ hoher Temperaturen des Strahlers. Der für die Beobachtung verfügbare Temperaturbereich bleibt infolgedessen selbst bei dem hochschmelzenden Wolfram verhältnismäßig eng begrenzt, und diese Begrenzung würde noch weit größer werden, wenn man an Stelle von Aluminium etwa ein Schwermetall benutzen wollte. Einen erheblich weiteren Meßbereich stellen demgegenüber die Alkalimetalle zur Verfügung. Man könnte daher von ihrer Verwendung, sofern man das Hinzukommen des selektiven Effekts ausschalten und eine gleichzeitige direkte Ermittlung von λ_0 etwa mit spektral zerlegtem Licht vornehmen könnte, eine noch zwingendere experimentelle Entscheidung der Sicherheit unserer theoretischen Aussagen erwarten.

II. Die Austrittsgeschwindigkeiten.

7. Ein anderer Weg zu diesem Ziele ist derjenige der *Messung der Austrittsgeschwindigkeiten der von der Gesamtstrahlung erregten Elektronen.* Solche Messungen mit unzerlegtem Licht sind zwar schon frühzeitig ausgeführt worden, bevor man eine spektrale Zerlegung vornahm. Da aber ihr Zweck und ihre Methode andre waren und keine Bezugnahme auf die Zusammensetzung der Lichtstrahlung und die Temperatur der Strahlenquelle, die für uns gerade das wesentliche ist, erfolgte, kommen sie hier nicht in Betracht.

Die für unsere Messungen benutzte, durch Fig. 3 gegebene *Versuchsanordnung* wurde oben bereits beschrieben. Die einzige Abänderung gegen früher bestand darin, daß der Durchmesser der belichteten Aluminiumscheibe auf 1 cm verkleinert wurde. Die von ihr austretenden Elektronen unterliegen dann der Einwirkung eines gut radialen elektrischen Feldes, wenn die Blendenanordnung zusammen mit der Kupferhaut der Glaskugel auf eine bestimmte Spannungsdifferenz gegenüber der mit dem ursprünglich geerdeten Elektrometer verbundenen

Scheibe gebracht wird. Der Zusammenhang zwischen der beobachtbaren positiven Aufladung der Scheibe und der Größe einer Gegenspannung gibt dann die (integrale) Verteilung der Voltgeschwindigkeiten, mit denen die Elektronen das Aluminium verlassen. Dabei darf die Unabhängigkeit dieser Geschwindigkeiten von der Emissionsrichtung durch ältere lichtelektrische Untersuchungen als gesichert gelten.[1])

Einer besonders sorgfältigen Berücksichtigung bedarf bei den sich zeigenden kleinen Elektronengeschwindigkeiten das Vorhandensein der *Kontaktpotentialdifferenz* zwischen Aluminiumscheibe und Hülle, um welche die angelegte und leicht exakt meßbare Spannung zu verändern ist, um die wahre wirksame Spannungsdifferenz im Meßraum zu erhalten. Um sie möglichst homogen zu machen, wurde die ins Kugelinnere gerichtete Wand der Blende *Bl*, die aus Messing bestand, durch starkes Erhitzen bis zum Zinkaustritt leicht verkupfert. Zu ihrer Messung habe ich zwei verschiedene Methoden angewandt, von denen mir die eine neu zu sein scheint. Da diese Methode einen freien Strahlweg vom Wolfram zum Aluminium voraussetzt, während bei den Geschwindigkeitsmessungen die Einschaltung der dünnen Quarzplatte nicht zu umgehen war, so mußte allerdings der Apparat zum Zweck der Entfernung bzw. Einführung der Platte geöffnet werden. Die Wiederholung der Messungen und die Kombination der verschiedenen Verfahren läßt aber eine dadurch etwa auftretende Unsicherheit nicht merklich erscheinen.

Das gewählte *Meßverfahren* für die Durchführung einer zusammenhängenden Versuchsreihe war das folgende:

Der Apparat wurde zuerst bei fehlender Quarzplatte mit frisch geschmirgelter Aluminiumscheibe zusammengesetzt und unter ständigem starken Erhitzen der Holzkohle mit der rotierenden Gaedepumpe einige Stunden lang ausgepumpt. Nach Stehen über Nacht und nochmaligem Erhitzen und Auspumpen erfolgte das Eintauchen der Kohle in flüssigen Sauerstoff und nach einiger Zeit die erste Messung des Kontaktpotentials.[2])

---

1) Vgl. A. **Becker**, Ann. d. Phys. 58. S. 465. 1919.

2) Diese erfolgt also unter genau denselben Bedingungen des Vakuums, unter denen auch die Geschwindigkeiten der Elektronen gemessen werden.

Bei mäßigem Glühen des geerdeten Wolframs, das nach seiner längeren Benutzung zu den früheren Versuchen keine merkliche positive Strahlung mehr abgab, wurde das Blendensystem so lange auf wachsende negative Spannung[1]) gebracht, bis gerade seine Aufladung durch Elektronen verhindert war. Die hierzu nötige Spannung wurde dann um einen genau meßbaren Betrag verringert, so daß jetzt Elektronen, deren Geschwindigkeit maximal gerade dieser Verringerung der Gegenspannung gleichzusetzen war, durch das Blendensystem hindurch zur Aluminiumplatte gelangen konnten. Dann wurde diese so hoch negativ gegen die Hülle aufgeladen, bis jetzt auf ihr das Auftreffen von Elektronen gerade verhindert war. Die Differenz der hierzu erforderlichen Spannung und der am Blendensystem vorgenommenen Spannungsverringerung war dann der im Meßraum wirksamen Kontaktpotentialdifferenz gleichzusetzen.

Der Apparat wurde hierauf nach Entfernen der Kühlung und Erhitzung der Holzkohle[2]) geöffnet und nach Einsetzen der Quarzplatte und erneutem Schmirgeln der Aluminiumscheibe wieder geschlossen und in der vorbeschriebenen Weise weiterbehandelt. Dann erfolgte die Messung der Elektronengeschwindigkeiten bei bestimmter pyrometrisch gemessener Temperatur des Wolframs. Um die Temperatur während längerer Meßzeiten genügend sicher reproduzierbar zu erhalten, wurde eine Reihe von dickdrähtigen Widerständen zur Heizstromregulierung derart kombiniert, daß erhebliche Drahterwärmungen nicht auftraten und die auf Hundertel Weber genau meßbare Stromstärke in kleinsten Beträgen regulierbar war. Um außerdem etwaigen Veränderungen des Wolframbandes zu folgen, wurden die bei variierter Spannung der Hülle gemachten Beobachtungen auf Kontrollmessungen bezogen, die bei jeweils gleicher Spannung in kurzen Intervallen eingeschaltet wurden.

Der Apparat wurde dann geöffnet und nach Befestigen eines in dünnes durchlöchertes Papier gehüllten Polonium-

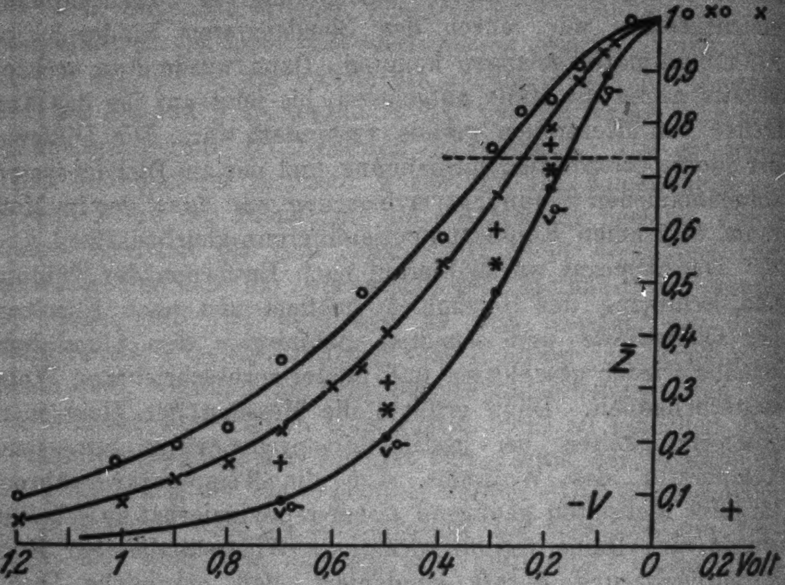
---

[1]) Oder das isolierte Wolframband bei geerdeten Blenden auf positive Spannung.

[2]) Die Holzkohle wurde während der ganzen Zeit, in der der Apparat zwischen zwei Versuchen offen stehen mußte, auf hoher Temperatur gehalten.

COLLEGE

präparats[1]) neben der Aluminiumscheibe wieder geschlossen und in genannter Weise evakuiert. Nach mehreren Stunden wurde trockene Luft eingelassen bis zur Herstellung von etwa 1 mm Druck. Die hierbei bei geerdeter Hülle auftretende Selbstaufladung wurde durch Anlegung einer meßbaren Gegenspannung an der Hülle kompensiert, was erneut zur Kenntnis des Kontaktpotentials führte. Der Mittelwert der zwei auf



Wo-Al.

× beobachtet für $\theta = 2580°$
○ beobachtet für $\theta = 3180°$
berechnet für 2000° ● für $V_w = \frac{2}{3} V_m$ } quadr. Empfindlichkeitsverteilg.
o- „ $V_w = \frac{1}{2} V_m$ }
+ „ $V_w = \frac{1}{2} V_m$ kub. „ „

Schwarze Körper.

berechnet für 2000° V für $V_w = \frac{2}{3} V_m$ quadr. Empfindlichkeitsverteilg.
✱ „ $V_w = \frac{1}{2} V_m$ kub. „ „

Fig. 5.

etwa 5 v. H. übereinstimmenden Verfahren (durchschnittlich − 0,90 Volt Hülle gegen Aluminium) wurde den Spannungsangaben zugrunde gelegt.

---

[1]) Ich verdanke dieses gleichzeitig anderen Zwecken dienende Präparat dem großen Entgegenkommen der Chininfabrik Braunschweig.

Das *Ergebnis* zweier den Wolframtemperaturen 2530° und 3180° abs. zugehöriger ausgedehnter Versuchsreihen wird durch die Kreuze × und Ringe ○ der Fig. 5 wiedergegeben. Die dadurch angezeigte Geschwindigkeitsverteilung folgt mit zum Teil ausgezeichneter Übereinstimmung den zugehörigen ausgezogenen Kurven. Daß die bei der höheren Temperatur erhaltenen Beobachtungspunkte (○) unregelmäßiger liegen, erklärt sich durch die größere Schwierigkeit, die höhere Temperatur für die ganze Versuchsreihe völlig konstant zu halten.

Die ausgezogenen Kurven geben aber die Geschwindigkeitsverteilung glühelektrischer Elektronen. Die Folgerung der früheren Arbeit, daß *die relative Verteilung der Voltgeschwindigkeiten der aus einem* (schwarzen) *Körper lichtelektrisch durch Bestrahlung mit weißem Licht ausgelösten Elektronen identisch sei mit derjenigen der thermisch ausgelösten Elektronen*, wird hier zum erstenmal (für nicht schwarze Körper) *experimentell bestätigt.*[1])

Die wahrscheinlichsten Voltgeschwindigkeiten ergeben sich durch die Abszissen der Schnittpunkte der gestrichelten Horizontalen mit den Kurven. Sie betragen:

$$\begin{array}{ll|c|c} \theta_1 = 2530^0 & V_{w_1} = 0{,}25 \text{ Volt} & \dfrac{\theta_1}{\theta_2} = 0{,}795 & \dfrac{V_{w_1}}{V_{w_2}} = 0{,}820 . \\ \theta_2 = 3180^0 & V_{w_2} = 0{,}305 \ \text{,,} & & \end{array}$$

Die wahrscheinlichsten Voltgeschwindigkeiten sind also, ebenfalls in Übereinstimmung mit der früheren Forderung, innerhalb der Versuchsgenauigkeit *der absoluten Temperatur der Lichtquelle proportional.*

8. Wenn sich sonach die unmittelbare Erfahrung namentlich auch bezüglich der Elektronengeschwindigkeiten in so trefflichem Einklang mit den älteren theoretischen Folgerungen zeigt, so ist aber zu beachten, daß die letzteren einerseits nur für schwarze Körper bindend sind und daß sie andererseits — soweit sie Aussagen über Elektronengeschwindigkeiten machen

---

1) Die Weiterverfolgung des Kurvenverlaufs zeigt nach größeren Geschwindigkeiten ziemlich raschen Abfall der Menge gegen den Nullwert, der bereits bei etwa 1,5—2 Volt erreicht ist. Der angedeutete geringfügige Weiteranstieg der Beobachtungspunkte im beschleunigenden Feld, der bis zu einigen Volt verfolgbar ist, erklärt sich wohl durch die Rauhigkeit der emittierenden Oberfläche.

— auf einer Grundlage gewonnen worden sind, die man in neuerer Zeit begonnen hat anzuzweifeln, nämlich auf der durch Hrn. **Ramsauers** Versuche[1]) gestützten Annahme, daß die Kurve der Geschwindigkeitsverteilung der durch homogenes Licht erregten Elektronen asymptotisch abnehmend nach beliebig großen V-Werten laufe.

Wenn hier auch keineswegs eine Entscheidung in der Frage der Geschwindigkeitsgrenze beabsichtigt ist, so ist es doch für unser gegenwärtiges Problem von großem Interesse, zu untersuchen, welche Veränderungen die bisherigen Folgerungen erleiden, wenn die Annahme einer Höchstgeschwindigkeit der Elektronen gemacht wird, da dies erkennen läßt, wie weit etwa der Ausfall der gegenwärtigen Beobachtungen etwas zu dieser Frage beitragen könnte. Gleichzeitig kann das Problem dann für den Fall nicht schwarzer Körper verallgemeinert werden.

9. Die Lösung der gestellten Aufgabe setzt die Kenntnis der der neuen Forderung entsprechenden Geschwindigkeitsverteilungskurve voraus. Da einwandfreie absolute Messungen solcher Art bis jetzt nicht ausgeführt worden sind, und da auch die von Hrn. **Klemperer**[2]) mitgeteilten relativen Messungen nicht Anspruch auf Vollständigkeit machen, so sind wir genötigt, zunächst mehr versuchsweise an den zur Verfügung stehenden Verteilungskurven der Herren **Richardson** und **Compton**[3]) und des Hrn. **Ramsauer**[4]) Abänderungen im Sinne des Vorhandenseins einer Höchstgeschwindigkeit vorzunehmen.

Nach den Beobachtungen von Hrn. **Millikan**[5]), **Hennings** u. **Kadesch**[6]) und **Sabine**[7]) entspricht die Höchstgeschwindigkeit V_m der von Licht der Wellenlänge λ ausgelösten Elektronen der Quantenbedingung:

---

[1]) C. **Ramsauer**, Ann. d. Phys. **45**. S. 1121. 1914 und Heidelb. Akad. d. Wiss. A. **20**. 1914.

[2]) O. **Klemperer**, Ztschr. f. Phys. **16**. S. 280. 1923.

[3]) O. W. **Richardson** u. K. T. **Compton**, Phil. Mag. **24**. S. 575. 1912.

[4]) C. **Ramsauer**, a. a. O.

[5]) R. A. **Millikan**, Phys. Rev. [2] **7**. S. 18 u. 355. 1916; Phys. Ztschr. **17**. S. 217. 1916.

[6]) A. E. **Hennings** u. W. H. **Kadesch**, Phys. Rev. [2] **8**. S. 209 u. 221. 1916.

[7]) P. E. **Sabine**, Phys. Rev. [2] **9**. S. 260. 1916.

$$V_m = \frac{h\,c}{e}\,\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0 \cdot \lambda},$$

wenn λ_0 die Grenzwelle des emittierenden Körpers angibt. Da hiernach V_m eine lineare Funktion der Frequenz ist, und da dies nach Hrn. Ramsauers Versuchen auch für die wahrscheinlichste Geschwindigkeit der Elektronen gilt, so muß

$$V_w = a_w \cdot V_m$$

sein, wo a_w ein konstanter echter Bruch ist.

10. Um seine Werte mit der Quantenbedingung absolut in Übereinstimmung zu bringen, setzte Hr. Ramsauer $a_w = 0{,}7$. Wir wollen statt dessen den noch geeigneteren Wert $a_w = {}^2/_3$ festhalten. Wir fordern damit also zunächst, daß *die wahrscheinlichste Geschwindigkeit der Elektronen* $^2/_3$ *der auftretenden Höchstgeschwindigkeit* sei. Man kann für diesen Fall leicht einen analytischen Ausdruck für die Verteilungskurve angeben, der sich im Geschwindigkeitsgebiet unterhalb V_w vollständig den Ramsauerschen Beobachtungen anschließt. Derselbe lautet:

$$P(V)\,dV = \frac{V}{V_w^{\,3}}(V_m - V)\cdot e^{V/V_w}\cdot dV \quad \left(V \leqq \tfrac{3}{2} V_w\right).$$

Der Verlauf von $P(V)$ wird durch die Kurve 1 der Fig. 6 veranschaulicht. Die Abweichungen im Gebiet der größeren Geschwindigkeiten von den Ramsauerschen Werten sind, wie man sieht, sehr groß. Dies veranlaßte mich schon bei früherer Gelegenheit[1]), dem Zweifel Ausdruck zu geben, daß diese Beobachtungen in diesem Gebiet so erhebliche Korrektur erlauben sollten. Wir halten aber zunächst an dieser Veränderung fest und fragen sofort nach der *Zentralfeldkurve*, welche auf Grund dieser Verteilungskurve der durch homogene Wellen erregten Elektronengeschwindigkeiten *bei Erregung mit weißem Licht* zu erwarten wäre. Ihre Gleichung lautet allgemein für nicht schwarze Körper:

$$Z = {}_V\!\!\int\limits_{V}^{V_m} {}_\lambda\!\!\int\limits_{0}^{\lambda_0} \frac{1}{V_w^{\,3}}\, V\cdot(V_m - V)\cdot e^{V/V_w}\cdot f(\lambda)\cdot A_\lambda\cdot A_\lambda'\cdot\lambda^{-5}\cdot e^{-\frac{c_2}{\lambda\theta}}\,d\lambda\cdot dV.$$

---

1) A. Becker, Ann. d. Phys. 75. S. 217, Anm. 2. 1924.

Führt man die Integration über V aus, so wird:

$$Z = \int_0^{\lambda_0} f(\lambda) \cdot A_\lambda \cdot A_\lambda' \cdot e^{-\frac{c_2}{\theta \lambda}} \cdot$$

$$\left[e^{V/V_w} \cdot \left(\frac{V^2}{V_w^2} - 3{,}5 \frac{V}{V_w} + 3{,}5 \right) - 2{,}241 \right] d\lambda .$$

Dieses Integral muß im allgemeinen numerisch gelöst werden. Man hält hierzu jeweils einen bestimmten V-Wert fest, berechnet den Integranden für alle in Betracht kommenden Wellenlängen[1]) und bestimmt dann das von der betreffenden Kurve eingeschlossene Flächenstück. Ich habe eine solche Auswertung des Integrals zunächst für:

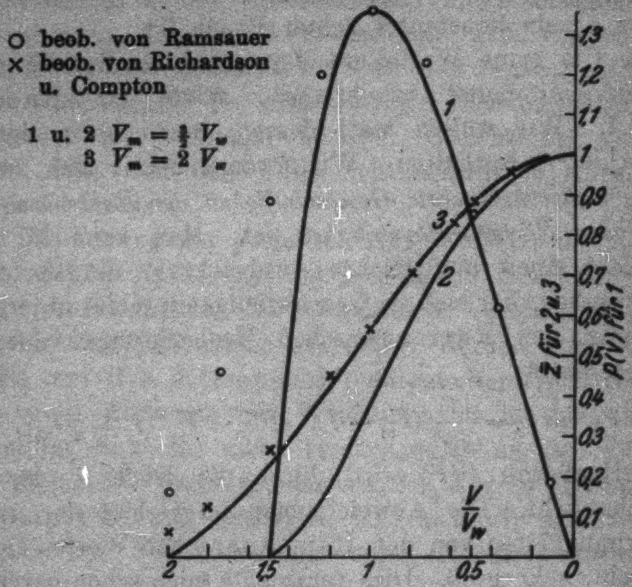


Fig. 6.

$$f(\lambda) = \text{const} \times \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2,$$

die Temperatur 2000° absolut sowohl für das Körperpaar Wolfram-Aluminium als für schwarze Körper (mit $\lambda_0 = 4 \cdot 10^{-5}$ cm) durchgeführt. Einen Überblick über eine dabei für verschiedene V-Werte erhaltene Kurvenschar gibt Fig. 7. Man erkennt hier die Wellenbereiche, welche zu den Z-Werten bei den einzelnen Geschwindigkeiten beitragen. Die Verschiebung der rechten Ansatzstellen der Kurven nach kürzeren Wellen entspricht der Forderung, daß jeder Welle eine maximale Elektronengeschwindigkeit zukommt und daß infolgedessen größere Geschwindigkeiten nur von kleineren Wellen erzeugbar sind.

---

[1]) Wobei auch V_w für jede Wellenlänge gemäß der Quantenbedingung einen verschiedenen Wert erhält.

Das Ergebnis der Ausrechnung wird durch die in Fig. 5 eingetragenen Punkte • und Ringstriche o– dargestellt. Zur Beurteilung des Verlaufs ist wieder eine Glühelektronenkurve hinzugezeichnet. Man erkennt, daß auch jetzt wieder *für die lichtelektrischen und für die glühelektrischen Elektronen die gleiche Geschwindigkeitsverteilung* vorhanden ist. Dies gilt sowohl für schwarze als für nicht schwarze Körper. Deutlich bemerkbar machen sich die optischen Eigenschaften der Körper aber in der Kurven*lage,* d. h. in der Größe der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit. Auf diese wird im nachfolgenden zurückzukommen sein.

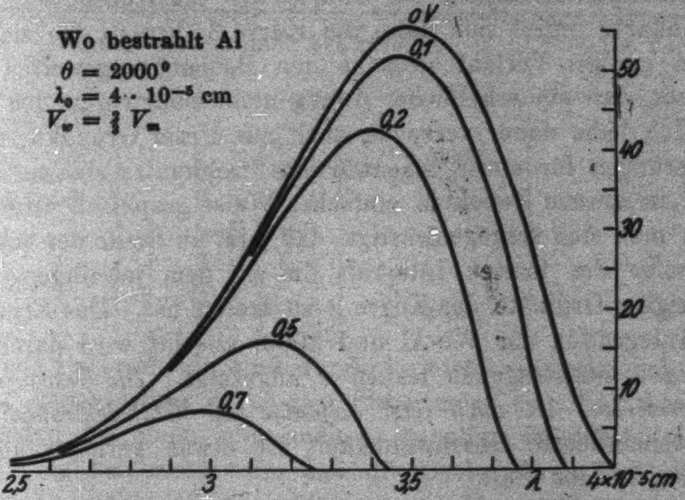


Fig. 7.

11. Trotz dieser an sich günstigen Feststellungen vermag man sich kaum mit der großen Diskrepanz zu versöhnen, welche zwischen den sorgfältigen Beobachtungen mit homo-

genem Licht und der der vorstehenden Betrachtung zugrundegelegten Verteilungskurve besteht. Besonders unbefriedigend ist es, daß diese Diskrepanz auch gegenüber den Beobachtungen von Hrn. Richardson und Compton vorhanden ist, wie man erkennt, wenn man in Fig. 6 die zu 1 gehörige Zentralfeldkurve 2 mit der Lage der Beobachtungspunkte × vergleicht.

Es zeigt sich nun, daß die Übereinstimmung der Ramsauerschen Absolutwerte mit der Quantenbedingung kaum geringer, bei Zink sogar merklich besser wird, wenn man $a_w = 0{,}5$ setzt und also fordert, *daß die wahrscheinlichste Elektronengeschwindigkeit die Hälfte der maximalen sei.* Als Grundkurve ergibt sich dann die Kurve 3 (Fig. 6), die sich in ihrem ganzen Verlauf so nahe den Beobachtungswerten anschließt, daß ein erheblicher Zwang nicht mehr vorhanden ist.[1])

Ich habe daher versucht, auch aus dieser Grundkurve die Folgerungen für unser gegenwärtiges Problem zu ziehen. Man kann zu diesem Zweck in einfacher Weise graphisch vorgehen, wenn man sich vergegenwärtigt, daß jetzt an Stelle der eckigen Klammer des letzten Integrals die zu dem jeweiligen V/V_m gehörige z-Ordinate der Kurve 3 zu treten hat. Das Ergebnis der Integration für Wo-Al und 2000° absolut wird durch die in Fig. 5 eingetragenen Haken v angezeigt. *Die Geschwindigkeitsverteilung ist auch jetzt diejenige der Glühelektronen*; die wahrscheinlichste Geschwindigkeit ist etwas geringer als im vorhergehenden Fall.

12. Es bleibt schließlich noch die Frage nach dem *Einfluß der lichtelektrischen Empfindlichkeitsverteilung* $f(\lambda)$ auf das Ergebnis. Die vorstehenden Berechnungen beziehen sich, wie bemerkt, auf eine *quadratische* Empfindlichkeitsverteilung. Es bleibt also noch die Untersuchung der *kubischen.* Ohne mehr auf Einzelheiten der Durchführung einzugehen, soll sogleich das Resultat angegeben werden. Dasselbe ist in Fig. 5 für Wo-Al und für schwarze Körper für die Annahme $V_w = \frac{1}{2} V_m$ durch die Zeichen + und ∗ eingetragen. Die Kurven*form* bleibt auch jetzt erhalten; die Kurven*lage* entspricht einer nicht unerheblichen Verschiebung nach höheren Geschwindig-

---

1) Es wäre natürlich auch noch die Möglichkeit einer etwas anderen Annäherung der abgeänderten Kurve an die beobachtete und einer etwas veränderten Grenze zugelassen.

keiten, was ohne weiteres verständlich ist, da die kubische Empfindlichkeitsverteilung eine Verschiebung des Schwergewichtes der Wirkung nach kürzeren Wellen bedeutet.

13. Während alle unsere versuchten Annahmen die Form der Geschwindigkeitsverteilungskurve unverändert lassen, machen ich spezifische Einflüsse derselben auf die Absolutwerte der Geschwindigkeiten geltend. Um diese näher zu erkennen, seien die den verschiedenen Fällen entsprechenden *Absolutwerte der wahrscheinlichsten Geschwindigkeiten* V_w zusammengestellt.

Tabelle 2.

Aus der Beobachtung bei 2530°			0,198 Volt
„ „ „ „ 3180°			0,192 „
Berechnet für			
schwarze Körper	$V_w = \frac{2}{3} V_m$	$f(\lambda)$ quadr.	0,15
	$V_w = \frac{1}{2} V_m$	„ kub.	0,19
	$V_m = \infty$	„ quadr.	0,17
	$a_w = 0{,}7$		
Wo-Al	$V_w = \frac{2}{3} V_m$	„ „	0,17
	$V_w = \frac{1}{2} V_m$	„ „	0,15
	$V_w = \frac{1}{2} V_m$	„ kub.	0,215

Die Unterschiede sind durchweg nicht sehr erheblich, und es ist daher kaum durch das Experiment eine Entscheidung zugunsten der einen oder anderen Annahme möglich. Immerhin ist es bemerkenswert, daß die Beobachtung dem letzten berechneten Fall am nächsten kommt. Da der Übergang von $V_w = \frac{1}{2} V_m$ zu $V_w = \frac{2}{3} V_m$ unter sonst gleichen Umständen eine Erhöhung von V_w mit sich bringt, so spricht die Beobachtung eher zugunsten der Annahme $V_w = \frac{1}{2} V_m$, die von vornherein größere Wahrscheinlichkeit für sich hatte. Ob beim Aluminium allerdings die kubische Empfindlichkeitsverteilung bevorzugt ist, ist auf Grund direkter Versuche bisher nicht bekannt. Die früher erkannte gute Übereinstimmung des λ_0-Wertes aus der zugehörigen lichtelektrischen Geraden mit den Angaben von Hrn. **Richardson** und **Compton** könnte im gleichen Sinne sprechen.

Zusammenfassung.

1. Die *experimentelle Untersuchung* der lichtelektrischen Erregung von Aluminium durch die Gesamtstrahlung von

Wolfram im Temperaturbereich 2100—3200° absolut führt zu folgenden Ergebnissen:

a) Die erregte *Elektronenmenge* ist mit der absoluten Temperatur des Strahlers durch die Gleichung:

$$n = \text{const} \times \theta^x \cdot e^{-\frac{c_2}{\lambda_0 \theta}}$$

verknüpft. Die Potenz x des Temperaturfaktors ist größer als 2 und wahrscheinlich 3—4.

b) Die *Geschwindigkeitsverteilung* der lichtelektrischen Elektronen ist mit derjenigen der glühelektrischen identisch.

c) Die *wahrscheinlichste Austrittsgeschwindigkeit* der Elektronen ist der absoluten Temperatur der Strahlenquelle proportional und von gleicher Größenordnung wie diejenige der Glühelektronen.

Es besteht also ein voller Parallelismus zwischen der lichtelektrischen und der glühelektrischen Wirkung eines Temperaturstrahlers.

2. Die *theoretische Summierung* der lichtelektrischen Teilwirkungen der einzelnen unendlich kleinen Wellenbereiche des Temperaturstrahlers führt nirgends zu einem Widerspruch mit der Beobachtung. Diese Teilwirkungen verlaufen daher offenbar unabhängig nebeneinander, und die Wirkungsbereiche der einzelnen Wellen im belichteten Körper greifen offenbar nicht merklich übereinander.

3. Diese theoretische Betrachtung zeigt im einzelnen noch folgendes:

a) Die bisher beobachtete spektrale lichtelektrische Empfindlichkeitsverteilung der Metalle läßt sich mit großer Genauigkeit durch zwei Formeln ausdrücken:

$$f(\lambda) = \text{const} \times \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2$$

und

$$f(\lambda) = \text{const} \times \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^3.$$

Für das Zutreffen der einen oder anderen Formel entscheidet nicht so sehr die chemische Natur als die physikalische Beschaffenheit (Gasgehalt) des Metalls.

b) Die Potenz x des Temperaturfaktors der Elektronenmenge ist bei quadratischer Empfindlichkeitsverteilung praktisch = 3, bei kubischer streng = 4.

c) Die optischen Eigenschaften (Absorptionsvermögen) der Metalle sind auf den Temperaturgang der Elektronenmenge praktisch ohne Einfluß.

4. Zu Aussagen über die Geschwindigkeiten der Elektronen bedarf es der Kenntnis der Geschwindigkeitsverteilungskurve der durch homogene Wellen erregten Elektronen. Es sind hier drei Möglichkeiten untersucht worden:

a) Die Elektronengeschwindigkeit hat keine Höchstgrenze (Ramsauersche Kurve).

b) Die Elektronengeschwindigkeit hat eine Höchstgrenze bei $^3/_2$ der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit.

c) Die Höchstgrenze liegt bei der doppelten wahrscheinlichsten Geschwindigkeit.

5. Die Betrachtung dieser Fälle hat folgendes Ergebnis:

a) Die Geschwindigkeitsverteilung der lichtelektrischen Elektronen ist in allen Fällen praktisch identisch mit derjenigen der glühelektrischen Elektronen.

b) Die optischen Eigenschaften der Metalle sind auf die Geschwindigkeitsverteilung praktisch stets ohne Einfluß.

c) Die Absolutwerte der Geschwindigkeiten zeigen in den einzelnen Fällen Unterschiede, die aber so gering bleiben, daß eine Entscheidung durch Beobachtungen der gegenwärtig betrachteten Art kaum möglich erscheint.

d) Die optischen Eigenschaften der Metalle beeinflussen die Absolutwerte der Geschwindigkeiten in ähnlich kleinen Grenzen.

Es wäre vom Standpunkt dieser Untersuchung von besonderem Interesse, wenn es gelänge, experimentell zu entscheiden, wieweit die physikalischen Eigenschaften der Metalle etwa auch Einfluß auf die Glühelektronengeschwindigkeiten haben könnten.

Heidelberg, Radiologisches Institut und Theoretisch-Physikalischer Apparat.

(Eingegangen 26. August 1925.)

6. *Bemerkung zur Arbeit von Felix Schmieder „Über die Ökonomiekoeffizienten der Phosphore"*[1]; *von S. I. Wawilow.*

In der obengenannten Abhandlung bespricht Hr. Schmieder meine Messungen der Fluoreszenzausbeute der fluoreszierenden Farbstofflösungen[2]) und betrachtet meine Ergebnisse als rohe Mittelwerte aus dem Grunde, daß die Erregung durch weißes Licht geschah. Derselbe Einwand wurde mir schon von Herren Valentiner und Rössiger[3]) gemacht und von mir abgelehnt.[4]) Die Gründe dafür sind in der diesbezüglichen Notiz dargelegt, auf die ich auch diesenfalls verweisen genötigt bin.

---

1) F. Schmieder, Ann. d. Phys. 77. S. 383. 1925.
2) S. I. Wawilow, Ztschr. f. Phys. 22. S. 226. 1924.
3) S. Valentiner u. M. Rössiger, Berl. Ber. S. 210. 1924.
4) S. I. Wawilow, Ztschr. f. Phys. 32. S. 236. 1925.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

100
80
60
40
20
0
% Ag
0
20
40
60
80
100
% Pd

Fig. 2.

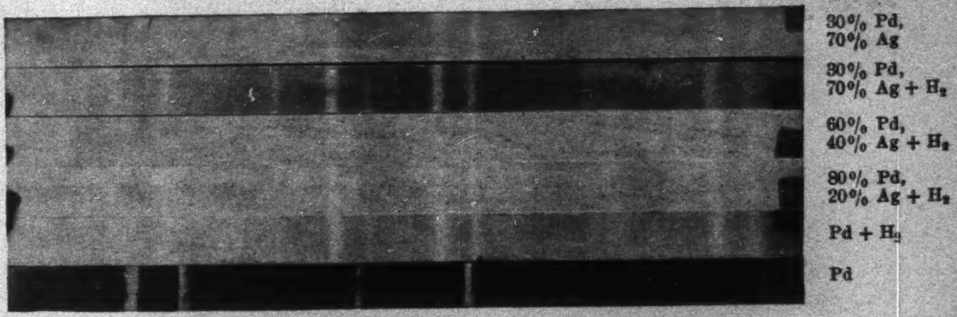

30% Pd, 70% Ag
30% Pd, 70% Ag + H_2
60% Pd, 40% Ag + H_2
80% Pd, 20% Ag + H_2
Pd + H_2
Pd

Fig. 7.

F. Krüger u. A. Sacklowski.

1925. № 18.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 78.

1. *Über die Ozonbildung durch Elektronenstoß;*
von F. Krüger und O. Utesch.

Durch die grundlegenden Versuche von E. Warburg[1]) z. T. gemeinsam mit Leithäuser angestellt, sind wir über die Bedingungen der Ozonbildung in den Ozonröhren und besonders über die Abhängigkeit der technischen Ausbeuteverhältnisse von den verschiedensten Faktoren eingehend unterrichtet. Wegen der Kompliziertheit der Entladungserscheinungen in solchen Röhren wurde der Mechanismus der Ozonbildung früher keineswegs völlig durchsichtig. Klarere Einblicke hier durfte man erwarten, wenn man die Ozonbildung durch Kathodenstrahlen von den Entladungsvorgängen selbst völlig trennen konnte, wie das möglich ist bei Verwendung einer Kathodenstrahlröhre mit Lenardschem Fenster. Solche Versuche wurden zuerst von dem einen von uns (F. Krüger[2]) und M. Moeller[3]) unternommen.

Bei den chemischen Umsetzungen durch den Stoß von Elektronen war man anfänglich geneigt, in Analogie zu den elektrolytischen Vorgängen die Gültigkeit des Faradayschen Gesetzes zwischen den umgesetzten Mengen und den von den Elektronen transportierten Elektrizitätsmengen anzunehmen. Versuche von E. Bose[4]) und vor allem von E. Warburg[5]) bestätigten diese Auffassung nicht, vielmehr war speziell die gebildete Ozonmenge das Hundert- bis Tausendfache der den primären Strahlen entsprechenden Elektrizitätsmenge. Von F. Krüger[6]) wurde dann zuerst die Auffassung ausgesprochen, daß ein Zusammenhang zwischen der Menge der durch die

---

1) E. Warburg, Zusammenfassendes Referat, Jahrb. der Radioaktivität und Elektronik 6. S. 181. 1909.

2) F. Krüger, Physikal. Zeitschrift. 13. S. 1340. 1912.

3) M. Moeller, Dissertation, Danzig 1912.

4) E. Bose, Zeitschr. f. wissenschaftl. Photographie. 2. S. 223. 1904.

5) E. Warburg, Ann. d. Phys. 13. S. 464. 1904.

6) F. Krüger, a. a. O.

Kathodenstrahlen sekundär gebildeten Ionen und der Menge des entstandenen Ozons wahrscheinlicher sei. Nach dieser Hypothese würde also ein O_2-Molekül durch den Stoß der primären Kothodenstrahlen ionisiert und in O-Atomen dissoziert werden; jedes freie O-Atom würde sich dann in einem sekundären Prozeß mit einem neutralen O_2-Molekül zu einem Ozonmolekül vereinigen. Bei der Bildung von einem Ionenpaar müßten also jedesmal zwei Ozonmoleküle gebildet werden.

Die Versuche von M. Moeller[1]) ergaben aber, daß das Verhältnis der entstandenen Ozonmoleküle M zu der Zahl der durch Elektronenstoß gebildeten Ionen N nicht entsprechend der Annahme, gleich zwei war, vielmehr zwischen zwei bis elf schwankt, wobei besonders bei größeren Intensitäten die Abweichungen von dem theoretischen Werte größer wurden. Es wurde vermutet, daß die Ionenmenge wegen des chemischen Prozesses zu gering ausfiele, daß man daher in einem indifferenten Gase, wie Stickstoff, der ja nahezu die gleiche Dichte hat wie Sauerstoff, die der in Sauerstoff gebildeten Ozonmenge entsprechende Ionenmenge finden würde. Moeller fand in der Tat, in Stickstoff eine weit stärkere Ionisierung als in Sauerstoff und zwar die der in Sauerstoff durch dieselben Elektronenmenge gebildeten Ozonmenge entsprechende. Die erheblich stärkere Ionisierung in Stickstoff als in Sauerstoff unter den gleichen Verhältnissen steht jedoch mit dem Gesetz von Lenard in Widerspruch, nach dem die Ionisation der Dichte nahezu proportional geht; sie widerspricht auch den experimentellen Ergebnissen von Mc Lennan[2]), der bei denselben Gasen und ungefähr der gleichen Kathodenstrahlgeschwindigkeit eine genaue Bestätigung des Lenardschen Gesetzes von der Massenproportionalität fand. Moeller sucht die von ihm gefundene Abweichung der Ionisation sowie der Massenproportionalität dadurch zu begründen, daß die Untersuchungen über die Massenproportionalität bei geringerer Intensität gemacht sind und daher Abweichungen durch chemische Effekte nicht festgestellt werden konnten. Das ist jedoch wenig wahrscheinlich. Näher liegt die Annahme, daß die Resultate von Moeller durch Versuchsfehler entstellt sind, die ihren Grund in seiner Meßmethode haben, auf die man damals angewiesen war, nämlich der Verwendung eines gasgefüllten Rohres und eines Tesla-Kreises als Hochspannungsquelle, die sicher großen Intensitätsschwankungen unterworfen war.

---

[1]) M Moeller, a. a. O.

[2]) J. C. Mc Lennan, Phil. Mag. A. 195. S. 49. 1901.

Nun scheint allerdings nach einer Arbeit von S. C. Lind[1] für die Ozonbildung durch α-Strahlen ein engerer Zusammenhang zwischen Ionisation und Ozonbildung zu existieren. Lind findet, daß das Verhältnis der gebildeten Ozonmoleküle zu der Zahl der durch Rechnung gefundenen Ionen manchmal gleich einhalb ist. Das würde heißen, daß nur jedesmal das Ion einer Ladung, von den durch die α-Strahlen gebildeten Ionen ein Ozonmolekül bildet. Aber in vielen Fällen ist jenes Verhältnis noch wesentlich kleiner und sinkt bis auf ein elftel. Die Resultate erscheinen daher doch als etwas zu schwankend, um sichere Schlüsse daraus ziehen zu können, vor allem doch nicht für die offenbar wesentlich anderen Verhältnisse bei der Ozonbildung durch Kathodenstrahlen, bei denen ja umgekehrt stets mehr Ozonmoleküle gebildet werden als der vorhandenen Ionisation entspricht.

Mehr Aufklärung für die Ozonbildung durch den Stoß von Elektronen ist zu erwarten, wenn man die Verhältnisse bei der photochemischen Ozonbildung durch ultraviolettes Licht in Betracht zieht; denn es besteht ja nach der Einsteinschen[2] Hypothese eine sehr enge Beziehung zwischen der photochemischen Wirkung eines Lichtquants $h\nu$ von der Frequenz ν und dem Stoß eines Elektrons mit der kinetischen Energie $\frac{1}{2}mv^2$, beide sind einander völlig äquivalent. Wir können also Schlüsse über die Wirkung des Stoßes von Elektronen ziehen aus der entsprechenden Wirkung eines Lichtquants.

Nun besteht die primäre photochemische Wirkung eines Lichtquants zwar in vielen Fällen in der Auslösung eines Elektrons, aber durchaus nicht in allen; so zeigten Lenard und Ramsauer[3], daß bei der Ozonbildung und Le Blanc und Volmer[1], daß bei der Chlorwasserstoffbildung keine Ionenbildung bei dem photochemischen Vorgang der Bildung dieser Substanzen auftritt. Dagegen ist in vielen Fällen der photochemischen Wirkung eine Dissoziation der Moleküle, die eine indirekte Folge der primären photochemischen Reaktion ist, zu beobachten: Hier sind vor allem die Versuche von E. Warburg[2] über die Zersetzung von Brom und Jodwasserstoff zu nennen, die eine befriedigende Übereinstimmung mit dem Einsteinschen photochemischen Äquivalentgesetz ergaben.

---

[1] S. C. Lind, Amer. chem. Journal. 47. S. 397. 1912; vgl. auch S. C. Lind, The chemical effects of α-particles and electrons, New York 1921.

[2] A. Einstein, Ann. d. Phys. 37. S. 832. 1912.

[3] Ph. Lenard und C. Ramsauer, IV. und V. Sitzungsber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss. 16. u. 24. Abh. 1911.

Nicht in allen Fällen besteht die photochemische Wirkung des Lichtes zunächst in einer Aufspaltung der Moleküle; denn die Lichtmenge z. B. bei der Ozonbildung durch Licht der Wellenlänge $\lambda = 253\,\mu\mu$ und der Ammoniakbildung durch Licht der Wellenlänge $\lambda = 209\,\mu\mu$ ist kleiner als die in beiden Fällen erforderliche Dissoziationswärme.

Nach der Auffassung, die zuerst von J. Stark[3] und von Warburg[4] entwickelt und dann von O. Stern und M. Volmer[5] näher ausgeführt ist, besteht der primäre Vorgang hierbei darin, daß das absorbierte Licht ein angeregtes Molekül schafft, dadurch, daß ein Elektron des Moleküls auf eine höhere Quantenbahn gehoben wird; den Schwingungsquanten der Atome wird nur ein geringer Teil der Strahlungsenergie zugeführt.[6] Es kann so also einem Molekül ein Vielfaches der Dissoziationsenergie zugeführt werden, ohne daß es in seine Atome zerfällt. Die chemischen Vorgänge, die dann als Folge der „Anregung" der Moleküle eintreten, kommen dadurch zustande, daß die Quantenenergie der auf höhere Bahnen gehobenen Elektronen durch Zusammenstoß des angeregten Moleküls mit neutralen auf deren Atomschwingungen übertragen werden, so daß eine Dissoziation und chemische Reaktion erfolgt; solche wirksamen Zusammenstöße müssen natürlich während der Dauer des angeregten Zustandes erfolgen, die nach O. Stern und M. Volmer[1]), sowie nach W. Wien[2]) etwa 10^{-8} Sekunden beträgt. Da, wie oben erwähnt, die Ozonbildung durch ultraviolettes Licht ohne Ionisation verläuft, erfolgt diese Reaktion offenbar in der hier angedeuteten Weise über die photochemisch angeregten Moleküle.

---

[1] M. Le Blanc und M. Volmer, Zeitschr. f. Elektrochemie 20. S. 494. 1914.

[2] E. Warburg, Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. S. 746. 1911; S. 872. 1914; S. 230. 1915; S. 314. 1916; S. 300 und S. 1228. 1918; S. 860. 1919; zusammengefaßt: Zeitschr. f. Elektrochemie 26. S. 54. 1920.

[3] J. Stark, Phys. Zeitschr. 9. S. 888. 1908.

[4] E. Warburg, Die Naturwissenschaften. 5. S. 489. 1917.

[5] O. Stern und M. Volmer, Zeitschr. f. wissenschaftl. Photogr. 19. S. 275. 1920.

[6] J. Frank, Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften. 2. S. 106. 1923.

Diese Betrachtungen lassen sich nun ohne weiteres auf die chemische Reaktion durch Elektronenstoß übertragen, da die Wirkungen des Stoßes eines Elektrons mit der kinetischen Energie $\frac{m}{2} v^2$ gleich den Wirkungen eines Lichtquants vom gleichen Betrag $h\nu$ völlig entsprechen. Erreicht die Geschwindigkeit des stoßenden Elektrons die Anregungsspannung, so vermag es ein Elektron des getroffenen Moleküls auf eine höherquantige Bahn zu heben und dadurch das Molekül zu einem „angeregten“ zu machen, das nun zu chemischen Reaktionen befähigt ist. Erst falls das Elektron die der Ionisierungsspannung entsprechende Geschwindigkeit erlangt, tritt Ionisierung ein.

Sicher wird durch den Stoß von Elektronen auf Sauerstoffmoleküle, welche die erforderliche Geschwindigkeit besitzen, ein Teil der Moleküle ionisiert und infolge davon dissoziiert; die so entstandenen freien Sauerstoffatome könnten sich dann in sekundären Reaktionen mit Sauerstoffmolekülen zu Ozon vereinigen. In diesem Falle müßten für ein in Ionen aufgespaltenes Molekül zwei Ozonmoleküle entstehen. Da aber die Ozonbildung durch ultraviolettes Licht ohne Ionisation erfolgt, kann es nicht zweifelhaft sein, daß dasselbe auch für die Ozonbildung durch Elektronenstoß gilt, daß also die Elektronen, deren Geschwindigkeit zur Ionisierung nicht ausreicht, doch angeregte Sauerstoffmoleküle schaffen, die dann in sekundären Reaktionen Ozonmoleküle bilden. Man hätte danach also bei der Bildung durch Elektronenstoß eine weit größere

---

1) O. Stern und M. Volmer, Phys. Zeitschr. **20.** S. 183. 1919.

2) W. Wien, Ann. d. Phys. **60.** S. 597. 1920.

Ozonmenge zu erwarten als der gemessenen Ionisation entsprechen würde.

Es erschien daher erwünscht, die Versuche von M. **Moeller**[1]) über die Ozonbildung durch Kathodenstrahlen, die durch ein **Lenard**sches Fenster hindurch getreten waren, in exakterer Weise zu wiederholen, als sie damals möglich waren und als sie jetzt durch die Verwendung der Glühkathode bei höchstem Vakuum ausführbar sind. Neben der Untersuchung über das Verhältnis der gebildeten Ozonmenge und der erzeugten Sekundärstrahlung soll dann ferner der Energieumsatz der Kathodenstrahlung bei dieser Ozonbilung, also sowohl die technische Ausbeutebestimmung wie die Energiebilanz selbst bestimmt werden.

Versuchsanordnung.

Zur experimentellen Klärung der zu lösenden Fragen war eine Lenardröhre erforderlich, die neben einer möglichst großen Konstanz der Primärstrahlung eine möglichst exakte Regulierung der Stromstärke wie auch der Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen gestattete. Um bei den Messungen genaue Wiederholungen bestimmter Versuchsbedingungen zu erreichen, mußte sowohl Spannung wie Stromstärke im Lenardrohr variiert werden können. Dieses konnte durch Benutzung einer Glühkathode erreicht werden, die durch stärkeres Heizen eine Veränderung der Stromstärke ermöglichte; daneben konnte durch Verwendung eines Transformators, dessen Spannung auf der Primärseite verändert wurde, eine Geschwindigkeitsregulierung der Kathodenstrahlen vorgenommen werden. Ein solches Glühkathodenrohr ist inzwischen zur Erzeugung von Lenardstrahlen ebenfalls von O. **Eisenhut**[2]) benutzt worden.

Die nach verschiedenen Versuchen benutzte Röhre war, wie nachstehende Fig. 1 zeigt, eine Kugel von etwa 25 cm Durchmesser mit 2 Rohransätzen.

Durch einen dieser Ansätze wurde durch Schliffverbindung die Glühkathode in das Rohr eingeführt, das hatte den

---

1) M. **Moeller**, a. a. O.

2) O. **Eisenhut**, Über glühelektrisch ausgelöste Kathodenstrahlen, Untersuchung derselben und ihre Verwendung zu messenden Versuchen bei großen Strahlengeschwindigkeiten. Heidelberg. Diss. Mai 1921.

Vorteil, daß bei einem Durchbrennen der Wolframspirale ein bequemes Auswechseln möglich war. Die Glühkathode war die bei der **Siemens** und **Halske** A.-G. für technische Röhren gebräuchliche und bestand aus einer Wolframspirale, die von einem durch Eisenstangen gehaltenen Eisenzylinder umgeben war. Die Stromzuführungen waren durch Quarz isoliert. War die Spirale unbrauchbar, so wurde der Kathodenschliff herausgenommen und an die Stromzuführungen eine neue Spirale angelötet. Die Heizung geschah durch eine Akkumulatorenbatterie von 8 Volt, die mit einem in Reihe geschalteten Regulierwiderstand, einem Ausschalter und einem Amperemeter auf ein gegen Erde isoliertes Brett montiert war. Durch Heizung bis 4 Amp. konnten Stromstärken der erforderlichen Stärke bis zu mehreren Milliamp. erreicht werden. Zur Entgasung der Spirale benötigte man etwa 2 bis 3 Stunden; nach dieser Zeit konnte man die Röhre unter gewünschter Spannung in Betrieb nehmen. Die Zerstäubung der Spirale war gering.

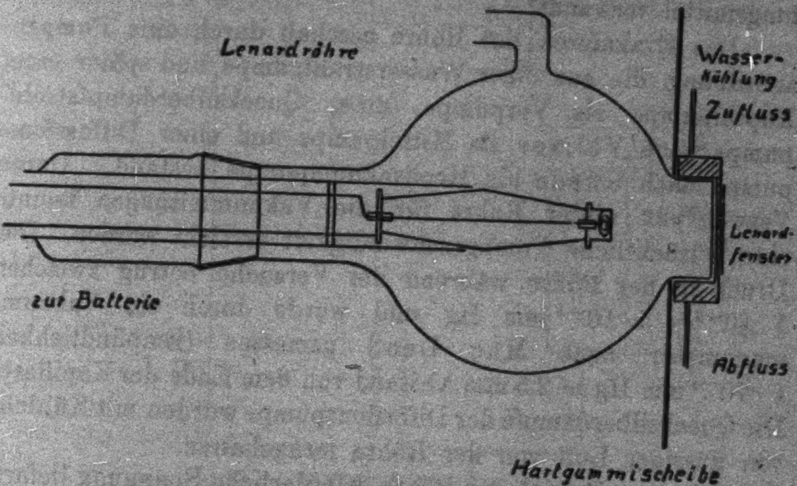


Fig. 1.

Gegenüber dem Schliffansatz der Glühkathode besaß die Röhre einen zweiten kurzen Ansatz von 4 cm Durchmesser, auf der die Messingkappe aufgekittet war. Der Abstand zwischen Glühkathode und Messingkappe, die als Anode diente, betrug etwa 5 cm. Da bei längerem Betrieb eine beträchtliche Wärmeentwicklung durch auftreffende Kathodenstrahlen an der Anode entstand, wodurch sowohl das Dichtungsmaterial der Kappe (es wurde weißer Siegellack verwandt) wie die Dichtung des Lenardfensters aufgeweicht wurde, so erhielt die Messingkappe eine ringförmige Wasserkühlung. In der Mitte der Messingkappe befand sich das Lenardfenster. Dieses war in Form eines Siebes ausgebildet und bestand aus 65 Löchern von 0,8 mm Durchmesser. Auf der Außenfläche des Siebes wurde die Aluminiumfolie aufgeklebt und zwar wurde, nachdem anfänglich Ramsayfett benutzt wurde, ausschließlich Picein als Dichtungsmittel verwandt.

Das Evakuieren der Röhre geschah durch eine Pumpenanordnung, die aus einer Wasserstrahlpumpe und später einer Kapselpumpe als Vorpumpe, einer Quecksilberdampfstrahlpumpe nach Volmer als Mittelpumpe und einer Diffusionspumpe nach Gaede als Hochvakuumpumpe bestand. Durch Verwendung weiter Rohre für die Vakuumleitungen konnte eine beträchtliche Pumpgeschwindigkeit erreicht werden. Der Druck in der Röhre während der Versuche betrug zwischen $1 \cdot 10^{-5} - 5 \cdot 10^{-4}$ mm Hg und wurde durch ein Vakuummanometer nach Mac Leod gemessen (Empfindlichkeit $1 \cdot 10^{-4}$ mm Hg = 2,5 mm Abstand von dem Ende der Kapillare). Die Quecksilberdämpfe der Diffusionspumpe wurden mit Kühlung von flüssiger Luft von der Röhre ferngehalten.

Die zum Betrieb der Röhre erforderliche Spannung lieferte ein Transformator von 6 KVA-Leistung einer Radiosilexapparatur; das Schaltschema für den Betrieb ergibt sich aus nebenstehender Schaltskizze Fig. 2.

Ein 500 Periodengenerator bis 6 KW-Leistung lieferte Spannungen bis 250 Volt, die über einen Stufentransformator und einen Vorschaltwiderstand der Primärseite des Hochspannungstransformators zugeführt wurden. Die Spannungsregulierung auf der Primärseite geschah entweder durch den Stufentransformator oder durch die Variierung der Generatorspannung mit Hilfe des Feldregulierwiderstandes, der ebenfalls von dem Pult der Schaltanlage aus bedient werden konnte. Das Voltmeter auf der Primärseite gab aus dem Übersetzungsverhältnis direkt die Spannungen an den Sekundärklemmen des Hochspannungstransformators. Die eine Klemme

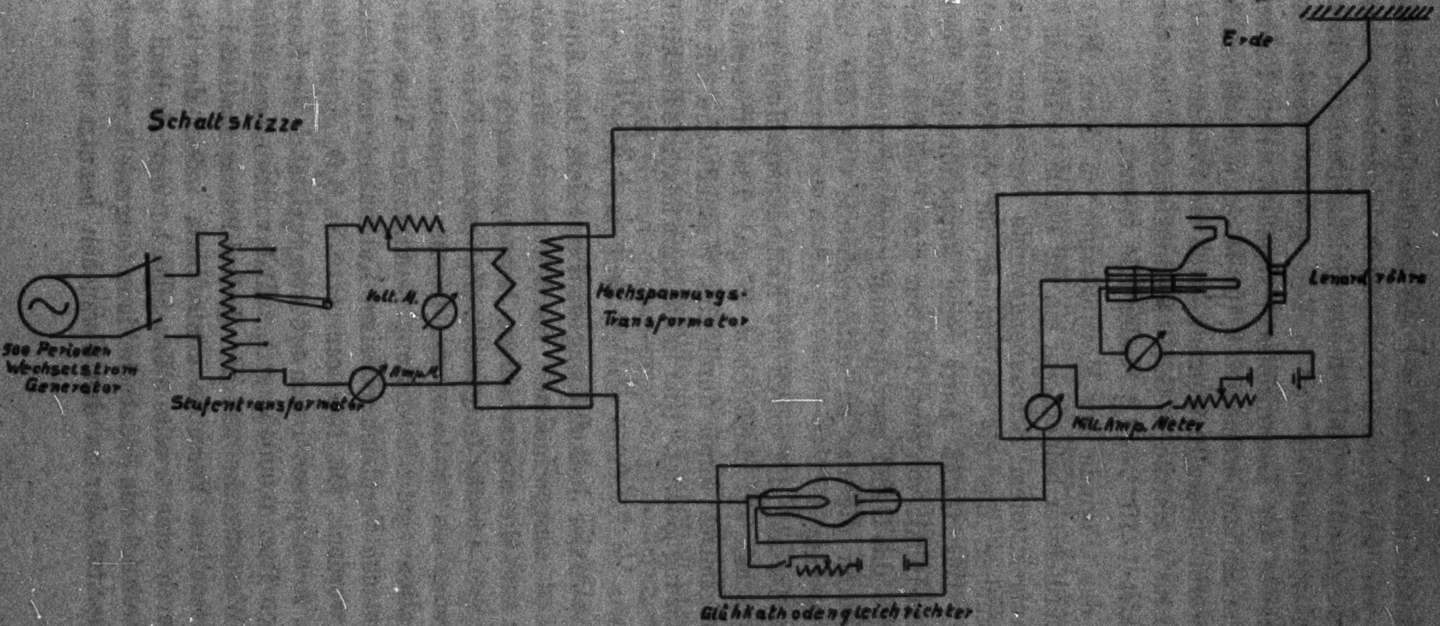

Erde
Schaltskizze
Lenardröhre
Hochspannungs-Transformator
Volt. M.
Amp. M.
500 Perioden Wechselstrom Generator
Stufentransformator
Mill. Amp. Meter
Glühkathodengleichrichter

Fig. 2.

des Transformators, die mit der Anode (Lenardfenster) verbunden war, war geerdet. Die andere Klemme war über einen isoliert aufgestellten Glühkathodengleichrichter, der durch eine Akkumulatorenbatterie von 8 Volt geheizt wurde, mit der Glühkathode der Lenardröhre verbunden. Den Röhrenstrom zeigte ein Milliamperemeter 10/100 M.-Amp. Endausschlag an; später wurde dieses Instrument durch ein Präzisionsinstrument der Siemens & Halske A. G. (10 Ohminstrument) mit der Empfindlichkeit $1 \cdot 10^{-4} = 3{,}3$ Skalenteile ersetzt.

In das Gewinde der Messingkappe, in deren Mitte sich das Lenardfenster befand, war ein mit einem an seinem unteren Ende aufgekittetem Schraubengewinde versehenes Glasgefäß aufschraubbar, das die Gaskammer für die Untersuchungen bildete. Das Gefäß hatte eine kuppelförmige Form und bei einem Inhalt von etwa 150 ccm eine Tiefe von 6 cm. Seitlich besaß das Gefäß zwei einander gegenüberstehende Ansatzrohre, durch die das zu untersuchende Gas ein- und ausströmen konnte.

Die Messung des durch die Kathodenstrahlung gebildeten Ozons geschah auf chemischem Wege. Das strömende Ozonsauerstoffgemisch wurde durch eine Waschflasche mit neutraler Jodkalilösung geleitet. Hier findet dann folgende Reaktion statt:

$$O_3 + 2\,KJ + H_2O = O_2 + J_2 + 2\,KOH$$

d. h. in neutraler Jodkalilösung wird eine dem Ozon äquivalente Menge Jod ausgeschieden. Danach wurde die Lösung angesäuert und die abgeschiedene Jodmenge durch Titration mit n/50-$Na_2S_2O_3$-Lösung festgestellt. Zur genauen Fixierung wurde Stärkelösung als Indikator der Lösung zugesetzt. Es wurde zur Titration eine n/50-Lösung benutzt, der Titer war durch einen genauen Vergleich mit einer Kaliumbichromatlösung festgestellt worden. Da 1000 ccm n/10-$Na_2S_2O_3$ äquivalent sind 2,4 g O_3, so entsprach 1 ccm n/50-$Na_2S_2O_3$ nach der Korrektion durch den Titer 0,000457 g O_3. Daß vollkommene Absorption in der Waschflasche mit der Jodkalilösung stattfand, wurde durch besondere Versuche kontrolliert, indem der Gasstrom noch durch eine zweite Waschflasche mit Jodkali geleitet wurde, wobei keine Jodabscheidung festgestellt werden konnte. Der Sauerstoff, der zu den Versuchen benutzt wurde, wurde aus Bomben entnommen, die von der Firma C. F. K. Kahlbaum geliefert wurden. Die für einen Versuch verbrauchte Menge wurde durch eine Gasuhr nach Elster gemessen, die Zeit des Versuches mit Hilfe einer Stoppuhr bestimmt. Die Zeit der Versuche belief sich auf 5 bis 30 Minuten. Nach dem Durchgange durch die Gasuhr passierte der Gasstrom ein Phosphorpentoxydrohr zum Trocknen und weiter ein mit Glaswolle gefülltes Rohr, um etwaige mitgerissene Staubteilchen zurückzuhalten.

Zusammenhang zwischen gebildeter Ionenzahl und Anzahl der Ozonmoleküle.

Eine Klärung über den Bildungsmechanismus des Ozons konnte evtl., wie oben ausgeführt, ein Vergleich zwischen den gelieferten Ozonmolekülen und der Zahl der sekundär gebildeten Ionen ergeben. M. Moeller (a. a. O.) hatte bei Vergleichsmessungen der im Stickstoff gebildeten Ionen mit den erzeugten Ozonmolekülen eine Äquivalenz festgestellt, die insofern bemerkenswert und von Versuchsergebnissen anderer Forscher (Mc Lennan und Lenard a. a. O.) abweichend erscheint, als durch die Moellerschen Messungen eine Abweichung von der Massenproportionalität der Ionenbildung in Sauerstoff und Stickstoff resultiert auf Grund der chemischen Veränderungen, von denen die Sekundärstrahlung gerade unabhängig sein soll. Während in der Moellerschen Arbeit das Verhältnis von Ozonmolekülen zum Ionenstrom durch Versuche in einem ruhenden Gas gemessen wurde, wurde in dieser Arbeit hauptsächlich mit strömendem Gas gearbeitet. Hierdurch wurde die schwierige Bestimmung des gebildeten Ozons wesentlich vereinfacht, indem der Versuch über eine Zeit ausgedehnt wurde, die erlaubte, das gebildete Ozon einwandfrei auf chemischem Wege zu bestimmen. Die Bestimmung der Ionen geschah durch Messung der Sättigungsströme. Zu diesem Zweck wurden in die Glaskappe, die auf das Lenardfenster aufgeschraubt war, zwei Messingplatten in zwei Glasstutzen eingekittet, die senkrecht zu den Zu- und Ableitungsrohren des Gasstromes standen. Das elektrische Feld stand also senkrecht zu der Strömungsrichtung des Gases. Die Größe der Kondensatorplatten war 4 · 2,5 cm. Das Schaltschema ergibt sich aus untenstehender Fig. 3. Die eine Kondensatorplatte lag mit der Anode des Kathodenrohres an Erde, während die andere Platte über ein Galvanometer mit dem negativen Pol einer Hochspannungsmaschine verbunden war. Die Maschine lieferte Spannungen bis 3500 Volt. Das Meßinstrument war ein Zeigergalvanometer von der Firma Hartmann und Braun und hatte eine Empfindlichkeit von 10^{-7} Amp. Die Empfindlichkeit konnte durch Nebenschlüsse variiert werden. Der Abstand der Kondensatorplatten betrug 26 mm, so daß bei einer Länge der Platten von 4 cm und einem Durchmesser des Lenardfensters von 19 mm das austretende Kathodenstrahlbüschel fast vollständig zwischen den beiden Kondensatorplatten verlief. Besondere Versuche bei angelegten Spannungen der Kathodenröhre wie an den Kondensatorplatten aber bei abgeblendetem Lenardfenster zeigten keinen Ausschlag am Galvanometer.

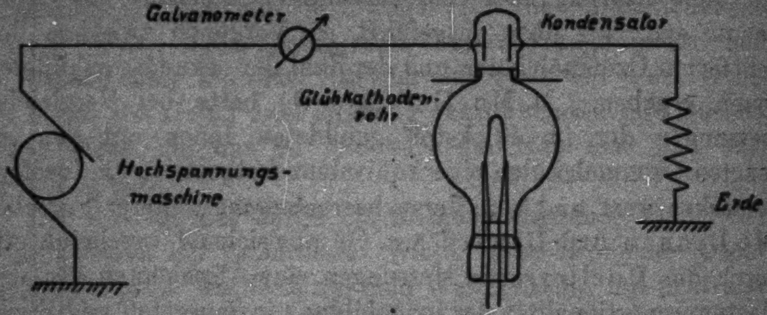


Fig. 3.

Von größter Wichtigkeit war es nun festzustellen, ob bei großer Intensität der durchtretenden Kathodenstrahlung mit den von der Maschine gelieferten Spannungen überhaupt Sättigung erzielt wurde. Die Aufnahme zweier Sättigungskurven bei verschiedener Kathodenstrahlintensität, wie sie in Fig. 4 wiedergegeben sind, geschah bei ruhendem Gas und zwar wurde neben Sauerstoff vor allem auch Luft gemessen. Außerdem wurden die Kurven bei großen Intensitäten der Kathodenstrahlung aufgenommen, um gerade für solche Intensitäten die Gewähr der Sättigung zu haben. Aus dem Verlauf der Kurven ergibt sich, daß eine Spannung von 3500 Volt vollkommen ausreichte, um sämtliche gebildete Ionen abzuleiten.

Allerdings zeigten sich bei dem Aufnehmen der Kurven starke Schwankungen (10 bis 20 $^0/_0$), die durch Änderungen der Röhrenspannungen erklärt werden können.

Die Zahl der gebildeten Ionen beiderlei Vorzeichens N ergibt sich aus der Sättigungsstromstärke, wenn man bedenkt, daß jedes Ion die elementare Ladung $\varepsilon = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Coulomb besitzt, durch die Beziehung $N = 2\,J/\varepsilon$. Die Anzahl der gebildeten Ozonmoleküle ergibt sich aus der Menge des chemisch

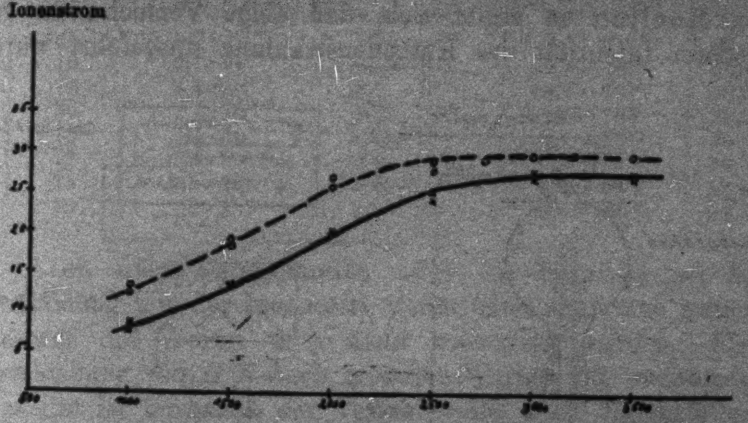


Fig. 4.

gemessenen Ozons mit Hilfe der Loschmidtschen Zahl, der zufolge in einem ccm Gas bei 20° und Atmosphärendruck $2{,}5 \cdot 10^{19}$ Moleküle enthalten sind.

Die nachstehende Tabelle zeigt das Verhältnis der gebildeten Ionen zu der Zahl der erzeugten Ozonmoleküle.

Nr.	I Stromstärke d. Kathodenröhre	N Anzahl d. in der Sek. gebild. Ionen	M Anzahl d. in der Sek. gebild. Ozonmoleküle	M/N
1	$3{,}0 \cdot 10^{-4}$	$2{,}45 \cdot 10^{14}$	$2{,}93 \cdot 10^{15}$	12
2	$4{,}1 \cdot 10^{-4}$	$3{,}5 \cdot 10^{14}$	$7{,}15 \cdot 10^{15}$	20,5
3	$4{,}2 \cdot 10^{-4}$	$4{,}25 \cdot 10^{14}$	$8{,}65 \cdot 10^{15}$	20,5
4	$4{,}3 \cdot 10^{-4}$	$4{,}2 \cdot 10^{14}$	$8{,}75 \cdot 10^{15}$	20,7
5	$4{,}3 \cdot 10^{-4}$	$4{,}25 \cdot 10^{14}$	$8{,}75 \cdot 10^{15}$	20,65
6	$6{,}3 \cdot 10^{-4}$	$8{,}75 \cdot 10^{14}$	$10{,}65 \cdot 10^{15}$	12,2
7	$6{,}5 \cdot 10^{-4}$	$7{,}5 \cdot 10^{14}$	$15{,}0 \cdot 10^{15}$	20,0
8	$7{,}4 \cdot 10^{-4}$	$9{,}12 \cdot 10^{14}$	$12{,}8 \cdot 10^{15}$	14,0

Die Versuchsreihe wurde bei konstanter Spannung von 75 Volt primär und gleichbleibender Strömungsgeschwindigkeit des Gases aufgenommen. Das Anwachsen des Sättigungsstromes mit steigender Röhrenstromstärke tritt klar hervor. Ebenso kann man ein Parallelgehen der Ozonbildung mit wachsender Ionenbildung konstatieren, doch ist das Verhältnis M/N nicht völlig konstant. Während bei obiger Versuchsreihe das Verhältnis M/N von 12—20 schwankt, zeigten andere Versuche viel stärkere Abweichungen.

Vergleicht man die Resultate mit den Versuchsergebnissen von Moeller, so ergibt sich, daß obige Versuchsreihe bei größerer Intensität der Kathodenstrahlung ausgeführt wurde

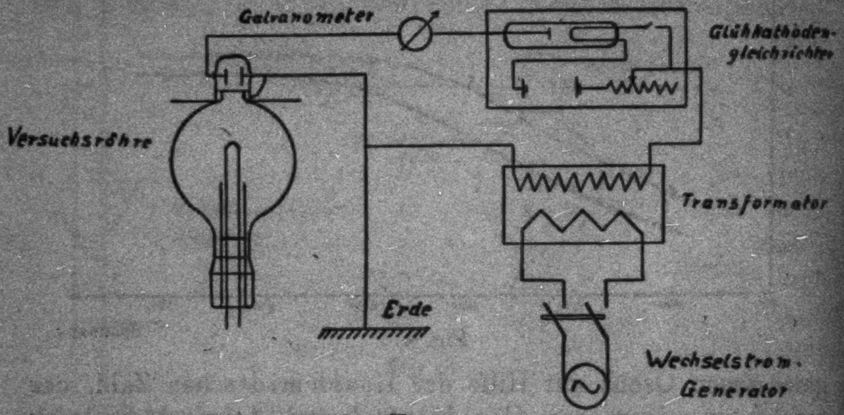


Fig. 5.

und daß das Verhältnis von M/N größer ist, vielleicht in Übereinstimmung mit der Tatsache, die auch Moeller zu konstatieren glaubt, daß mit wachsender Intensität der Primärstrahlung das Verhältnis M/N zuzunehmen scheint.

Bei einer weiteren Versuchsreihe, die durch Verwendung dünnerer Al.-Folien bei größerer Intensität der durchtretenden Lenardstrahlen ausgeführt wurde, war statt der Hochspannungsmaschine zur Erzeugung der Sättigungsspannung ein Transformator verwandt. Wie die vorstehende Fig. 5 zeigt, war die eine Klemme des Transformators mit der einen Kondensatorplatte geerdet, während die andere Klemme über einen Glühkathodengleichrichter und über das Meßinstrument mit der anderen Kondensatorplatte verbunden war. Ein Braunsches Elektrometer zeigte die Spannung an, sie betrug gegen

7000—7500 Volt und bot so sichere Gewähr, daß auch bei den größeren Intensitäten Sättigung vorhanden war.

Die unter diesen Versuchsbedingungen aufgenommene Meßreihe zeigt folgende Resultate.

Nr.	V Volt primär	J Stromstärke der Röhre	N Ionenzahl in d. Sek.	M Anzahl der Ozonmolek. in d. Sek.	M/N
1	65	$2{,}1 \cdot 10^{-4}$	$4{,}4 \cdot 10^{14}$	$1{,}31 \cdot 10^{16}$	30
2	65	$3{,}3 \cdot 10^{-4}$	$6{,}25 \cdot 10^{14}$	$2{,}1 \cdot 10^{16}$	34
3	70	$2{,}1 \cdot 10^{-4}$	$8{,}75 \cdot 10^{14}$	$2{,}85 \cdot 10^{16}$	35
4	70	$2{,}5 \cdot 10^{-4}$	$9{,}4 \cdot 10^{14}$	$3{,}45 \cdot 10^{16}$	38,5
5	70	$2{,}7 \cdot 10^{-4}$	$8{,}75 \cdot 10^{14}$	$2{,}85 \cdot 10^{16}$	32,5
6	70	$3{,}7 \cdot 10^{-4}$	$1{,}25 \cdot 10^{15}$	$5{,}0 \cdot 10^{16}$	40
7	70	$1{,}8 \cdot 10^{-4}$	$0{,}75 \cdot 10^{15}$	$3{,}0 \cdot 10^{16}$	40
8	73	$1{,}5 \cdot 10^{-4}$	$1{,}75 \cdot 10^{15}$	$3{,}93 \cdot 10^{16}$	22,4
9	75	$1{,}5 \cdot 10^{-4}$	$2{,}25 \cdot 10^{15}$	$5{,}45 \cdot 10^{16}$	24

Auch diese Versuchsreihe zeigt das Parallelgehen der Ozonbildung mit der Ionenzahl, weiter kann aber eine genaue Konstanz des Wertes M/N nicht konstatiert werden. Eine Verschiebung von M/N nach größeren Werten mit wachsender Intensität ist innerhalb der Versuchsreihe nicht festzustellen, wenngleich das Verhältnis von M/N gegenüber der ersten Meßreihe ein größeres geworden ist. Vergleicht man in beiden Tabellen die für die gleichen Ionenmengen gelieferten Werte für M/N, so findet man nicht die zu erwartende Übereinstimmung, was darauf hinzudeuten scheint, daß für Kathodenstrahlen größerer Geschwindigkeit, wie sie in Versuch 2 verwandt wurden, die Ozonbildung stärker als die Ionisation ansteigt, eine Tatsache, die jedoch auf Grund der schwankenden Versuchsergebnisse nicht sicher behauptet werden kann.

Dieses Überwiegen der Zahl der gebildeten Ozonmoleküle gegenüber der Ionenzahl ist auch von Moeller festgestellt worden, wenngleich dort das Verhältnis kleinere Werte annahm. Moeller kam zu dem Schluß, daß durch den chemischen Prozeß die Ionenbildung im Sauerstoff verringert würde, und machte Vergleichsmessungen im Stickstoff als einem indifferenten Gas, wo er einen größeren Ionenstrom messen konnte. Eine Kontrolle über die primäre Intensität der Kathodenstrahlen bestand bei seinen Versuchen jedoch nicht. Umgekehrt ergab sich durch diese Messungen eine Diskrepanz für die Sekundärstrahlung in verschiedenen Gasen die, wie Lenard zeigen konnte, den Dichten proportional geht.

Zur Entscheidung dieser Abweichungen wurden die Ionenströme in Sauerstoff, Luft und Stickstoff bei wachsender Intensität der Kathodenstrahlung gemessen. Es bestand bei diesen Messungen natürlich die Schwierigkeit, daß die Vergleichsmessungen nicht nebeneinander gemacht werden konnten, sondern die einzelnen Gase nacheinander gemessen werden mußten. Dagegen hatte die Benutzung einer Glühkathodenröhre und eines Transformators als Spannungsquelle den unleugbaren Vorteil der genauen Regulierung der Intensität der der Kathodenstrahlen.

Die Messung des Ionenstroms geschah im ruhenden Gas. Die abschraubbare Glaskappe wurde vorher sorgfältig auf Dichthalten geprüft. Der Sauerstoff wurde wie gewöhnlich der Bombe entnommen, die Luft wurde aus dem Untersuchungsraum durch eine Vorlage von Glaswolle hindurchgezogen, Stickstoff wurde aus einer Lösung von Kaliumnitrit und Ammoniumchlorid entwickelt und das erzeugte Gas durch Vorlagen mit Kalilauge, Schwefelsäure, Phosphorpentoxyd und Glaswolle geleitet. Die gebildeten Ionen, bezogen auf die gleiche Intensität der Kathodenstrahlung in den drei verschiedenen Gasen, ergeben sich aus den aufgenommenen Kurven der nachfolgenden Fig. 6.

Die Stromstärke des Kathodenrohres wurde bei den Versuchen konstant gehalten, die Spannung variiert. Um eine genaue Bestätigung zu haben, wurde die Vergleichsmessung unter denselben Bedingungen wiederholt und ergab dieselben Resultate. Die Ionenbildung geht, wie die Kurven deutlich zeigen, den Dichten proportional, und zwar bleibt das Verhältnis auch für größere Intensitäten innerhalb der Versuchsfehler das gleiche. Der Ionenstrom im Sauerstoff ist nach den Versuchsergebnissen 18—20 Proz. größer als in Stickstoff, während theoretisch 14 Proz. zu erwarten sind; und noch genauer ist das Verhältnis zwischen Luft und Stickstoff; die Differenz zwischen dem Ionenstrom in Luft und dem in Stickstoff ist gleich einem Viertel der Differenz zwischen dem Ionenstrom in reinem Sauerstoff und Stickstoff, entsprechend ihrer Zusammensetzung.

Als sicheres Resultat ergibt sich aus den Kurven die Massenproportionalität der Sekundärstrahlung in Stickstoff, Sauerstoff und Luft im Gegensatz zu den Ergebnissen von **Moeller**, gleichzeitig ein Beweis, daß chemische Wirkungen ohne Einfluß auf die Sekundärstrahlung sind. Als Erklärung

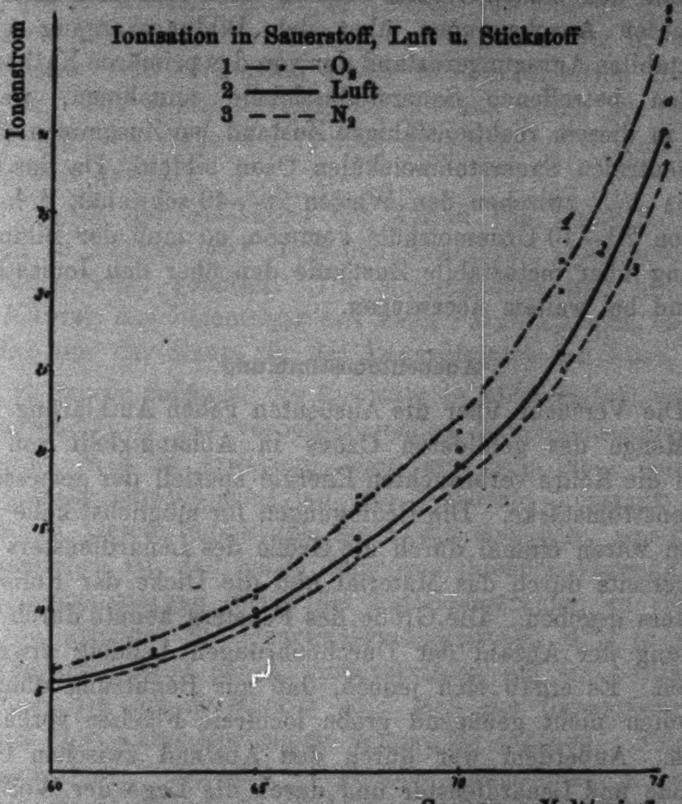


Fig. 6.

für die Diskrepanz obiger Messung gegen die **Moeller**schen Resultate käme vor allem die Intensitätsschwankung der von dem gashaltigen Lenardrohr gelieferten Kathodenstrahlen bei **Moeller** in Betracht, der als Spannungserzeuger einen Teslakreis benutzte. Da die Intensität der durch das Lenardfenster durchtretenden Kathodenstrahlung stark von der angelegten Spannung abhängt und eine Kontrollregulierung in der **Moeller**schen Anordnung nicht vorhanden war, so ist es wahrscheinlich, daß infolge großer Intensitätsschwankungen der Kathodenstrahlen unrichtige Daten der Sekundärstrahlung gemessen wurden. Andererseits ist durch die Vergleichsmessung der Beweis erbracht, daß Ozonbildung wohl parallel geht mit der erzeugten Sekundärstrahlung, daß aber keine Gleichheit zwischen den beiden Größen besteht. Man muß also nach den gemachten Anschauungen über den Bildungsvorgang einen metastabilen Anregungszustand der von den primären Kathodenstrahlen betroffenen Sauerstoffmoleküle annehmen, welche dann in diesem reaktionsfähigen Zustand bei Zusammenstößen mit neutralen Sauerstoffmolekülen Ozon bilden. Da das Verhältnis M/N zwischen den Werten 20—40 schwankt, d. h. auf ein Ion 20—40 Ozonmoleküle kommen, so muß der Bildungsvorgang über metastabile Zustände den über den Ionisationszustand bei weitem überwiegen.

Ausbeutebestimmung.

Die Versuche über die Ausbeuten geben Aufklärung über die Menge des gebildeten Ozons in Abhängigkeit von der durch die Röhre verbrauchten Energie speziell der gemessenen Röhrenstromstärke. Die Bedingungen für möglichst hohe Ausbeuten waren einmal durch die Größe des Lenardfensters und andererseits durch das Material und die Dicke der Folie des Fensters gegeben. Die Größe des Fensters konnte durch Vermehrung der Anzahl der Durchbohrungen beliebig erweitert werden. Es ergab sich jedoch, daß zur Benutzung dünnster Al-Folien nicht genügend große lochfreie Flächen vorhanden waren. Außerdem war durch den Abstand zwischen Glühkathode und Lenardfenster und durch die Lage der Wolframspirale der Glühkathode in dem umhüllenden Eisenzylinder eine Möglichkeit gegeben, alle von der Glühkathode austretenden Elektronen auf das Sieb des Lenardfensters auftreffen zu lassen.

Als Material für das Fenster kamen nur Substanzen in Betracht, die eine sehr geringe Dichte hatten, da die Kathodenstrahlabsorption in den verschiedenen Substanzen der Dichte proportional geht. Es wurden in der Hauptsache Aluminiumfolien benutzt. Versuche mit Glimmerblättchen, die etwa den gleichen Absorptionskoeffizienten wie Al haben, und die in einer Dicke von 0,005—0,01 mm von der Firma Dr. Steeg und

Reuter geliefert waren, führten zu keinem Erfolg, da die Glimmerblättchen, die anfänglich vakuumdicht waren, bei der Entladung plötzlich sehr viel Gas abgaben, so daß sich die Entladungsform für die Glühkathode nicht aufrecht erhalten ließ, sondern dauernd in Glimmentladung umschlug.

Die Al-Folien wurden in Dicken von 0,011—0,005 mm benutzt. Dünnere Folien für ein Lenardfenster von etwa 2 cm Durchmesser zu verwenden erwies sich als technisch undurchführbar. Die Dickenbestimmung geschah durch ein Sphärometer (10 Skalenteile = 0,01 mm), es wurde aus 6 Werten der Mittelwert gebildet.

Um in der Glaskappe den Zerfall von Ozon möglichst gering zu machen, war die Größe schädlicher Desozonisatoren möglichst klein gehalten. Die Messingkappe und besonders die Kittung aus Picein war mit einer Paraffinscheibe bedeckt, so daß nur der Raum für das Lenardfenster frei blieb.

Es wurde zunächst die Ausbeute in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit des vorbeiströmenden Sauerstoffstromes gemessen. Wie zu erwarten, blieb erst von einer gewissen Strömungsgeschwindigkeit an die Ausbeute konstant. Bei kleineren Geschwindigkeiten sinkt die Ausbeute, was dahin zu verstehen ist, daß neben dem ozonbildenden Vorgang auch mit Desozonisierung durch die Kathodenstrahlen zu rechnen ist. Je geringer die Gasgeschwindigkeit ist, d. h. je größer die Einwirkungszeit der Kathodenstrahlen auf ein bestimmtes Volumen ist, um so stärker wird sich der desozonisierende Einfluß der Kathodenstrahlen bemerkbar machen. Folgende Versuchsreihen und die graphische Darstellung in Fig. 7 zeigen die Ausbeute in Abhängigkeit von der Strömungsgeschwindigkeit.

	Stromstärke	Strömungsgeschw.	Anzahl d. ccm $Na_2S_2O_3$	Ausbeute g Ozon/Amp.-Std.
1	$3,3 \cdot 10^{-4}$	4,5	32,1	44,5
2	$3,15 \cdot 10^{-4}$	5,4	33,0	48,5
3	$2,8 \cdot 10^{-4}$	6,0	33,6	55,0
4	$3,15 \cdot 10^{-4}$	8,75	48,6	70,5
5	$3,0 \cdot 10^{-4}$	14,1	47,0	72,0

	Stromstärke	Strömungs-geschw.	Anzahl d. ccm $Na_2S_2O_3$	Ausbeute g Ozon/Amp.-Std.
1	$3{,}3 \cdot 10^{-4}$	3,91	18,5	25,75
2	$2{,}7 \cdot 10^{-4}$	4,75	17,4	29,5
3	$2{,}5 \cdot 10^{-4}$	7,7	26,1	48,0
4	$3{,}2 \cdot 10^{-4}$	10,0	33,5	48,0
5	$3{,}0 \cdot 10^{-4}$	10,2	33,7	52,0

Die zweite Versuchsreihe wurde bei einem Al-Fenster von größerer Dicke unternommen und zeigt daher geringere Werte für die Ausbeute. Die Spannung war bei beiden Versuchsreihen konstant und betrug 75 Volt auf der Primärseite des Transformators. Bei der Bestimmung der Ozonausbeuten in Abhängigkeit von der an die Röhre gelegten Spannung und damit der Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen ergab sich zunächst die Frage, von welcher Geschwindigkeit ab denn überhaupt Ozonbildung auftrat. Es war erst Ozonbildung zu erwarten, wenn die Kathodenstrahlen eine solche Geschwindigkeit besaßen, um die Al-Folie durchdringen zu können. Die Grenzdicken, d. h. diejenige Schichtdicke eines Mediums, die eine gegebene Strahlgeschwindigkeit zu Null reduziert,

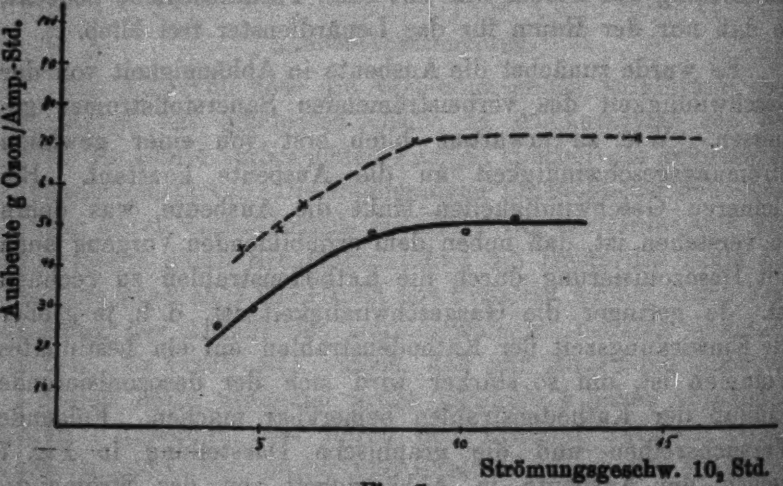


Fig. 7.

waren bei Aluminium durch die Messungen Lenards[1]) besonders genau festgestellt worden. War nun eine bestimmte Al-Dicke gegeben — es wurden die Versuche mit einer Al-Folie von 0,0095—0,01 mm Dicke ausgeführt — so mußte man bei variabler Spannung an den Punkt kommen, wo die Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen so groß wird, daß sie die Al-Folie durchdringen können. Erst von dieser Spannung an konnte Ozonbildung auftreten. Die Geschwindigkeit des vorbeigeleiteten Gasstromes wurde gering gehalten, um eine hohe Konzentration zu erreichen, außerdem wurde der Versuch über eine relativ lange Zeit ausgedehnt.

Bei 42,5 Volt Primärspannung und einer Stromstärke von $2,5-3 \cdot 10^{-4}$ Amp. trat nach einer Versuchsdauer von 25 Minuten in der Jodkalilösung nach Ansäuern und Zusatz von Stärkelösung keine Blaufärbung auf. Die Dicke der Al-Folie lag außerhalb der Grenzdicke für Strahlen dieser Geschwindigkeit. Bei 45 Volt primär dagegen trat Ozonbildung ein, wie durch den Nachweis von Jodausscheidung erbracht werden konnte. Für die den benutzten Spannungen entsprechenden Geschwindigkeiten ergeben sich aus den Lenardschen Daten folgende Grenzdicken.

Volt primär	Volt sekundär	Bruchteile d. Lichtgeschwindigkeit	Grenzdicken	Dicke d. benutzten Al-Folie in mm
42,5	24000	0,295	0,0105	0,0095-0,01
45,0	26000	0,306	0,0110	

Die Sekundärspannung wurde aus dem Übersetzungsverhältnis ermittelt. Die benutzte Al-Folie hatte mit 0,0095—0,01 mm eine etwas geringere Dicke als der genauen Grenzdicke für diese Elektronengeschwindigkeiten entsprechen, stimmt aber innerhalb der Versuchsfehler mit den Lenardschen Angaben überein. Außerdem ist zu berücksichtigen, daß ein Spannungsabfall am Glühkathodengleichrichter stattfindet, so daß mit kleinerer Kathodenstrahlgeschwindigkeit auch die Grenzdicke geringer anzunehmen wäre.

---

1) Ph. Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen aller Geschwindigkeiten. Abhandlungen der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, mathematisch-naturwissenschaftl. Klasse, 5. Abhandlung 1918.

Bei den Ausbeutebestimmungen in Abhängigkeit von der Spannung wurde bei konstanter Stromstärke gearbeitet. Auch wurde die Strömungsgeschwindigkeit für die betreffende Versuchsreihe möglichst konstant gehalten; wenngleich, wie durch die Bestimmungen in Abhängigkeit von der Strömungsgeschwindigkeit gezeigt worden war, ein Einfluß der Gasgeschwindigkeit von einem gewissen Punkte an nicht zu erwarten ist. Vorgenommene Änderungen der Strömungsgeschwindigkeiten bestätigten das Ergebnis. Die beiden folgenden Versuchsreihen ergaben folgende Resultate:

Stromstärke 5,2—5,4 · 10^{-4} Amp.
Strömungsgeschwindigkeit
etwa 30 Liter/Std.

Volt primär	Ausbeute g Ozon/Amp.-Std.
60	1,5—2
65	3,5—4,0
70	5,7
75	7,5—8
80	11 —12
85	21 —23

Strömungsgeschwindigkeit
12 Liter/Std.
Stromstärke 2 · 10^{-4} Amp.

Volt primär	Ausbeute g Ozon/Amp.-Std.
42,5	0
50,0	10—12
55,0	22—25
60,0	42—45
65,0	75—80

Die Resultate der ersten Versuchsreihe sind in Fig. 8 graphisch wiedergegeben. Die letzte Versuchsreihe wurde bei starken Spannungsschwankungen aufgenommen, außerdem war das Strommeßinstrument relativ unempfindlich, so daß hieraus die starken Schwankungen der Versuchsreihe zu erklären sind. Überhaupt waren Abweichungen und hohe Fehlerprozente sehr häufig, besonders da geringe Spannungsschwankungen, wie sie sehr oft im Stadtnetz vorkamen, bei dem großen Transformator-Übersetzungsverhältnis 1 : 500 erhebliche Veränderungen der Kathodenstrahlgeschwindigkeiten verursachten. Während die Versuchsreihe 1 mit einer Al-Folie von etwa 0,011 mm Dicke als Lenardfenster aufgenommen war, wurde bei der zweiten Versuchsreihe eine dünnere Folie von etwa 0,0075 mm verwandt, hieraus erklärt sich der Unterschied in den Ausbeuteresultaten. Aus der graphischen Darstellung ersieht man, daß die Ausbeute stärker als linear mit der Spannung ansteigt in Übereinstimmung mit der Zunahme der Intensität der primären durchtretenden Kathodenstrahlen, wie weiter unten ausgeführte Versuchsdaten ergaben und wie auch durch Vergleich mit den Lenardschen Messungen zu erwarten war. Immerhin ergab die Zunahme der Ausbeute mit der Spannung bei anderen Versuchsreihen nicht einwandfrei den gleichen Anstieg, sondern lieferte für geringe Spannungsänderungen einen nahezu linearen Verlauf, was auf Intensitätsänderungen durch Spannungsschwankungen zurückgeführt werden muß.

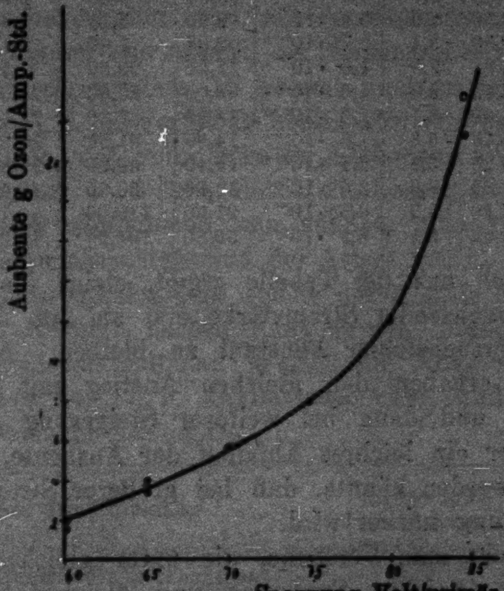


Fig. 8.

Noch stärkere Schwankungen ergaben sich bei den Ozonausbeuten in Abhängigkeit von der Stromstärke; folgende Tabelle zeigt eine Versuchsreihe.

In der Tabelle bedeuten

l Liter Sauerstoff, die durch das Reaktionsgefäß geleitet wurden
t Dauer des Versuchs
m Gelieferte Menge n/50-$Na_2S_2O_3$ in Kubikzentimeter
i Primärstromstärke
v Liter Sauerstoff/Stunde

M ccm $Na_2S_2O_3$/Stunde
M' mg O_3/Stunde
A Ausbeute g-Ozon/Amp.-Std.

Nr.	*l*	*t*	*m*	*i*	*v*	*M*	*M'*	*A*
1	6	6,75	0,6	$0,6 \cdot 10^{-4}$	53,30	5,38	2,45	41,00
2	1	23,50	2,0	$0,6 \cdot 10^{-4}$	2,60	5,18	2,36	39,40
3	1	29,50	3,4	$0,75 \cdot 10^{-4}$	2,04	6,90	3,17	42,00
4	1,5	7,33	2,5	$1,0 \cdot 10^{-4}$	12,25	20,50	9,48	84,00
5	1,5	6,92	6,0	$1,6 \cdot 10^{-4}$	18,00	52,00	24,00	150,00
6	1,5	7,00	6,1	$1,6 \cdot 10^{-4}$	12,90	52,30	24,10	150,00
7	1,5	6,16	6,3	$1,8 \cdot 10^{-4}$	14,60	61,50	28,30	157,00
8	1,5	6,25	6,3	$2,1 \cdot 10^{-4}$	14,40	60,30	27,80	133,00
9	1,5	5,66	8,3	$3,0 \cdot 10^{-4}$	15,90	88,00	40,50	133,00
10	1,5	4,20	7,7	$3,65 \cdot 10^{-4}$	21,50	110,00	50,70	138,00
11	1,5	2,92	5,1	$3,9 \cdot 10^{-4}$	30,80	104,50	48,20	124,00

Wie sich aus der Tabelle ergibt, steigt die Stromausbeute mit wachsender Stromstärke erst an, um dann innerhalb der Versuchsfehler konstant zu bleiben. Andere Versuchsreihen ergaben den gleichen Anstieg mit wachsender Stromdichte und dann bei weiterer Steigerung der Stromstärke wieder ein leichtes Abfallen der Ausbeute, was dahin verstanden werden könnte, daß bei größerer Stromdichte die Desozonisierung stärker wird.

Vergleicht man Versuche, die unter gleichen Versuchsbedingungen (gleicher Spannung und gleicher Stromstärke) aber variabler Al-Folie gemacht sind, so ergibt sich der erwartete Anstieg der Ausbeute mit dünner werdender Al-Folie.

Dicke der Al-Folie in mm	Ausbeute g O_3/Amp.-Std.
0,011	11,5
0,0085—9	35,0
0,0075	80,0
0,005	150,0

Versuche über die Ausbeute bei der Ozonbildung in Sauerstoff in Vergleich mit der Ozonbildung in Luft ergaben das von den Siemensröhren bekannte Verhältnis: Die Ausbeute für Sauerstoffozon war etwa die dreifache dem Luft-Ozon gegenüber.

Noch höhere Ausbeuten durch Verwendung dünnerer Al-Folien zu erhalten, zeigte sich undurchführbar, da Al-Folien von einer Dicke kleiner als 0,005 mm in Flächen von einem Durchmesser von etwa 2,0 cm nicht absolut lochfrei waren. Immerhin gelangen unter günstigen Bedingungen (hohe Spannung und große Stromstärke) Versuche, die eine Ausbeute bis 200 g Ozon pro Amp.-Stunde ergaben.

Vergleicht man die Ausbeuteergebnisse, wie sie durch obige Versuche erhalten sind, mit den Resultaten, die andere Versuchsmethoden und speziell die Siemensrohre als technische Ozongeneratoren ergeben, so kommt man zu folgenden Vergleichswerten. Beim Vergleich dieser Ausbeuteresultate ist zu berücksichtigen, daß von der in der Kathodenröhre gemessenen Stromstärke nur 3—5 Proz. durch die Lenardfolie durchtreten und nur diese ozonbildend sein können. Die Ausbeutedaten über die Vergleichszahlen sind der Arbeit von E. Warburg[1]): Über chemische Reaktionen, welche durch stille Entladung in gasförmigen Körpern herbeigeführt werden, entnommen. Die in der Tabelle enthaltenen Werte sind Ausbeuten bei der Konzentration Null, d. h. Maximalausbeuten, und sind durch Strömungsversuche gewonnen.

Art der Entladung	Stromstärke $i \cdot 10^6$ Amp.	Ausbeute g O_3/Amp.-Std.
Positive Spitzenentladung (Lichthaut) . .	28,8	61,80
Negative Spitzenentladung	17,4	174,00
Lenardstrahlen	—	150,00
Positive Spitzenentladung, Büschel, Elektrodenabstand $d = 4$ mm, Spitzen aus 1 mm dickem Draht	42,5	313,00
Negative Spitzenentladung, kleine Kugel, Büschel $d = 1$ cm	17,5	419,00
Positive Spitzenentladung, kleine Kugel, Büschel $d = 1$ cm	33,0	598,00
Ozonrohr, Glasapparat, $d = 3{,}7$ mm . . .	0,085	889,00
Ozonrohr, Metallapparat, $d = 4{,}66$ mm . .	0,187	1033,00

Ein Vergleich dieser Ausbeuten mit den durch Lenardstrahlen gewonnenen zeigt, daß man bei der stillen Entladung zu weit höheren Ausbeuten kommt; nur mit den durch die beiden ersten Entladungsarten erhaltenen Ergebnissen obiger Tabelle wären die erhaltenen Ausbeuten zu vergleichen. Weit ungünstiger wird aber der Vergleich für die technischen Aus-

---

1) E. Warburg, Jahrb. d. Elektronik 6. S. 181. 1909; vgl. auch M. Moeller, Das Ozon, Sammlung Vieweg, Braunschweig 1921.

beuten, d. h. die Ausbeute g Ozon pro Kilowattstunde. Für die größten technischen Ausbeuten im Sauerstoff ergeben sich folgende Werte.[1])

	Ausbeute g Ozon pro Kilowattstunde
Positive Spitzenentladung . .	51,0
Negative Spitze	47,0

Die technischen Siemensröhren (Glasapparate) liefern für Sauerstoff bei der Frequenz 50 Nullausbeuten von ungefähr 150—180 g Ozon pro Kilowattstunde.[2]) Die technischen Ausbeuten durch Lenardstrahlen ergeben Beträge von 3,5 bis 4,5 g Ozon pro Kilowattstunde. Die außerordentlich ungünstigen Ausbeuten sind hauptsächlich auf die starke Absorption der Kathodenstrahlen in der Al-Folie zurückzuführen.

Nach diesen Ergebnissen käme eine technische Verwertungsmöglichkeit zur Darstellung des Ozons durch Lenardstrahlen erst dann in Frage, wenn es gelingen würde, durch Vergrößerung des Lenardfensters und durch Verwendung sehr viel dünnerer Folien die Absorption in dem Lenardfenster bedeutend zu verringern. Daneben bleibt aber zu berücksichtigen, wie schwierig die vakuumsichere Abdichtung eines Lenardfensters ist und welche Arbeit sich durch das häufige Undichtwerden und Unbrauchbarwerden der Folie ergibt. Bei dem Unbrauchbarwerden der Al-Folie spielte der Quecksilberdampf der Pumpen eine entscheidende Rolle; bei Gegenwart von Hg-Dampf in dem Kathodenrohr wurde besonders beim Durchgang von Entladungen das Al-Fenster dadurch undicht, daß größere Löcher in der Al-Folie entstanden, wobei sich ein weißes Pulver, wahrscheinlich Aluminiumoxyd, bildet. Wurde der Hg-Dampf durch flüssige Luft ferngehalten, so trat diese Erscheinung sehr viel später auf.

Die Energiebilanz bei der Ozonbildung durch Elektronenstoß.

Die Umsetzungen der Energie von Kathodenstrahlen beim Durchlaufen von Materie sind auf das eingehendste und sorg-

---

1) E. Warburg, Ann. d. Phys. 13. S. 464. 1904.

2) E. Warburg u. G. Leithäuser, Ann. d. Phys. 28. S. 1 u. 17. 1909.

fältigste von Lenard[1]) diskutiert worden. Die wesentlichsten Ergebnisse sollen hier, zum größten Teil wörtlich, kurz wiedergegeben werden. Diese Energieumsetzungen erfolgen entweder durch Absorption der Elektronen oder durch ihren Geschwindigkeitsverlust. Die Berechnung ergibt, wie Lenard zeigt, daß „im allgemeinen weit mehr Energie durch Absorption verloren geht als durch Geschwindigkeitsabnahme“ und „daß die Umsetzung durch Geschwindigkeitsverlust am allermeisten bei den höchsten Geschwindigkeiten vorkommt“. Die Energie der Kathodenstrahlen kann umgesetzt werden in Reaktionsenergie chemischer Umsetzungen, in Wärme des absorbierenden Mediums, in Licht, in Emission unbrechbarer (von kürzerer Wellenlänge als Ultraviolett) Wellenstrahlung und in sekundäre Kathodenstrahlung.

Zur Lichtemission ist eine gewisse Mindestgeschwindigkeit der Kathodenstrahlen erforderlich; die Emission steigt mit wachsender Geschwindigkeit stark an, erreicht ein Maximum und ist bei $v = 0{,}35$ Lichtgeschwindigkeit bereits wieder zu geringfügigem Betrage herabgesunken. Bei den vorliegenden Versuchen wurden daher merkliche Beträge der Energie für die Lichtemission nicht verbraucht.

Ebenso wird kein erheblicher Energiebetrag in Röntgenstrahlenenergie umgesetzt, denn der Nutzeffekt bei der Umwandlung der Kathodenstrahlenenergie in Röntgenstrahlen beträgt beim Auftreffen der Kathodenstrahlen auf Platin nach W. Wien und anderen nur etwa ein Promille.

Über die Energieverhältnisse bei der Entstehung der sekundären Kathodenstrahlen läßt sich kurz folgendes sagen: die erforderliche Mindestspannung beträgt für Luft 9,5 Volt. Die Abtrennungsarbeit entspricht bei Luft 7 Volt und es kann angenommen werden, daß dieser ungefähre Wert für alle Primärgeschwindigkeiten gilt; die mittlere Sekundärstrahlengeschwindigkeit ist also um diesen Betrag geringer als die Primärstrahlengeschwindigkeit. Von rund ein Drittel Lichtgeschwindigkeit aufwärts wird die Energie der Geschwindigkeitsverluste fast oder ganz vollständig zur Sekundärstrahlung verbraucht; wesentlich andere Energieleistungen (Wärmeentwicklung, Lichtstrahlung, andere Ätherstrahlung) können nur auf Rechnung der Absorption kommen oder von weiterer Umwandlung der Energie der Sekundärstrahlen stammen.

---

[1]) Ph. Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen aller Geschwindigkeiten, Abschnitt VI, Heidelberg 1918.

Die von $v = 0{,}35$ Lichtgeschwindigkeit an gegen $v = 0$ hin stark steigende anderweitige, nicht auf Sekundärstrahlung gehende Energieumsetzung der Geschwindigkeitsverluste, welche bei $v = 0{,}15$ Lichtgeschwindigkeit 50 Proz., bei $v = 0{,}05$ Lichtgeschwindigkeit über 75 Proz. der gesamten Geschwindigkeitsverluste ausmacht, kommt zum Teil auf Lichtemission, zum anderen Teil auf indirekte Wärmeentwicklung.

Die Wärmeentwicklung kann eine direkte und indirekte sein, wobei unter letzterer die Umwandlung auf Umwegen über andere Energieformen erfolgt.

Direkte Wärmeentwicklung kann nur bei allerhöchsten und bei geringsten Geschwindigkeiten angenommen werden; infolge des Geschwindigkeitsverlustes bei den Durchquerungen kann direkte Wärmeentwicklung im allgemeinen nur in außerordentlich geringem Maße eintreten, ausgenommen bei allerhöchsten Geschwindigkeiten ($v > 0{,}99$ Lichtgeschwindigkeiten); bei der echten Absorption könnte die direkte Wärmeentwicklung ebenfalls nur bei höchsten Geschwindigkeiten wesentliche Beträge annehmen; in diesem Falle ist jedoch die Absorption an sich so gering, daß die Umsetzung der Absorptionsenergie in Wärme doch nur wenig in Betracht kommt; bei der unechten Absorption, d. h. der Reflexion, die nur bei geringsten Geschwindigkeiten ($v < 11$ Volt) in gewissen Gasen eine wesentliche Rolle spielt, ist direkte Verwandlung der gesamten Strahlungsenergie in Wärme zu erwarten.

Die tatsächliche Wärmeentwicklung (bei mittleren Geschwindigkeiten) muß demnach in vielen Fällen indirekt sein, was dadurch möglich wäre, daß das betroffene Atom die vom Elektron aufgenommene Energie zunächst in seinem Innern (dynamidal) behält und dann bei den Zusammenstößen mit anderen Atomen in Energie der ganzen Atome (bzw. Moleküle) verwandelt. Es würde dies im Sinne der Quantentheorie, wie in der Einleitung dargelegt, der „Anregung“ der Atome oder Moleküle entsprechen, indem durch den Elektronenstoß die Elektronen der Moleküle auf höhere Quantenbahnen gehoben werden, solche angeregte Moleküle würden dann durch Zusammenstoß mit anderen Molekülen ihre aufgenommene Energie teils, wie oben auseinandergesetzt, in chemische Reaktionen umsetzen, zum größeren Teil aber einfach in Wärme. Andererseits könnten die Atome oder Moleküle die aufgenommene Energie zu (noch nicht genügend bekannter bzw. auf Energieinhalt untersuchter) stark absorbierbarer Wellenstrahlung verbrauchen, welche ihrerseits die Wärmewirkung auf benachbarte Atome ausüben würden. Für angebliches Mitwirken solcher Vorgänge bei den Durchquerungen finden wir kein sicheres Zeichen; bei der Absorption dagegen muß die indirekte Wärmeentwickelung auf dem soeben gedachten Wege noch nicht genügend bekannter Zwischenvorgänge eine wesentliche Rolle spielen, namentlich bei mittelschnellen Strahlen, wo die direkte Wärmeentwicklung fehlt.

Es fragt sich nun, welcher Bruchteil der Energie der Kathodenstrahlen im vorliegenden Falle auf die chemische Umsetzung, d. h. die Ozonbildung, welcher auf die Sekundärstrahlung bzw. Ionisation, und schließlich welcher auf die Wärmeentwicklung entfällt.

Um den Energieumsatz der durch das Lenardfenster durchtretenden Kathodenstrahlen quantitativ feststellen zu können, war als erstes erforderlich ihre Intensität, d. h. die Zahl als auch die Geschwindigkeit der Elektronen in Abhängigkeit von den angelegten Spannungen und den benutzten Stromstärken genau zu messen. Zwar sind durch Lenard die Geschwindigkeitsverluste und die Intensitätsabnahme bei Aluminium genau gemessen, doch bildete das verwandte Lenardfenster nur einen Teil der Anodenkappe, so daß nur ein bestimmter Bruchteil der Kathodenstrahlen der Röhre auf das Al-Fenster fiel, während der weitaus größere Teil durch die Messingkappe absorbiert wurde. Außerdem war die Geschwindigkeitsbestimmung doch relativ ungenau; da die Spannungen nur auf der Primärseite des Transformators gemessen werden konnten.

Aus diesen Gründen wurde versucht, die durchtretende Kathodenstrahlmenge direkt zu messen, und zwar konnte die Strahlung nur in einem Auffangekäfig bei hohem Vakuum gemessen werden, da sich sonst durch die Ionisation falsche Resultate ergeben würden. Zu diesem Zwecke wurde auf die

Messingkappe des Kathodenrohres ein Glasgefäß vakuumdicht aufgekittet. Das Gefäß hatte einen Durchmesser von 5 cm und eine Tiefe von 9,5 cm, war kuppelförmig abgeschmolzen mit einem dünnen Ansatzstutzen, in dem der Haltestift des Auffangekäfigs eingekittet wurde. Die Versuchsanordnung ergibt sich aus nachfolgender Fig. 9.

Seitlich an das Glasgefäß war ein Glasrohr angeblasen, das zum Pumpenaggregat führte. Der Auffangekäfig war ein Messingzylinder von 3,75 cm Durchmesser und 5,5 cm Länge; um zu verhindern, daß die auftretenden Elektronen durch Reflexion den Käfig wieder verlassen können, war die Eintrittsöffnung wenig größer als das Lenardfenster gewählt und der restliche Teil durch einen Ring abgeblendet. Die Schaltung zur Messung des Elektronenstroms ergibt sich ebenfalls aus der Figur. Das Meßinstrument war das schon benutzte Zeigergalvanometer von 10^{-7} Ampere-Empfindlichkeit. Das Aufladepotential war durch eine Potentiometerschaltung variabel und über das Meßinstrument, welches isoliert aufgestellt war, mit der Auffangeelektrode verbunden; der andere Pol der Batterie lag an der Erde.

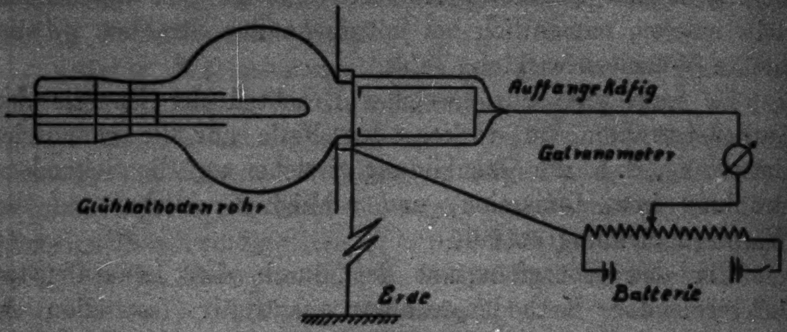


Fig. 9.

Zunächst wurde die Elektronenintensität in Abhängigkeit der Röhrenstromstärke bei konstanter Spannung gemessen. Es mußte mit zunehmender Röhrenstromstärke die Elektronenintensität ebenfalls ansteigen, welche Erwartung durch den Versuch bestätigt wurde. Die folgende Kurve der Fig. 10 zeigt die lineare Zunahme des Elektronenstroms mit wachsender Stromstärke der Kathodenröhre.

Der Vergleich der gemessenen Stromstärken in der Röhre und an der Auffangelektrode zeigt, daß der weitaus größte Teil der Kathodenstrahlen in der Messingkappe und der Al-Folie stecken bleibt. Unter der Annahme, die sich aus dem Vergleich der beiden Flächen ergibt, daß 20 Proz. des Stromes der Röhre auf die Al-Folie auftreffen, während der Rest in der Messingkappe absorbiert wird und daß von dieser auftreffenden Menge noch 25 Proz. reflektiert werden, wie man nach den Messungen von Starke[1]) und Lenard annehmen muß, kommt man zu dem Schluß, daß bei einem Röhrenstrom

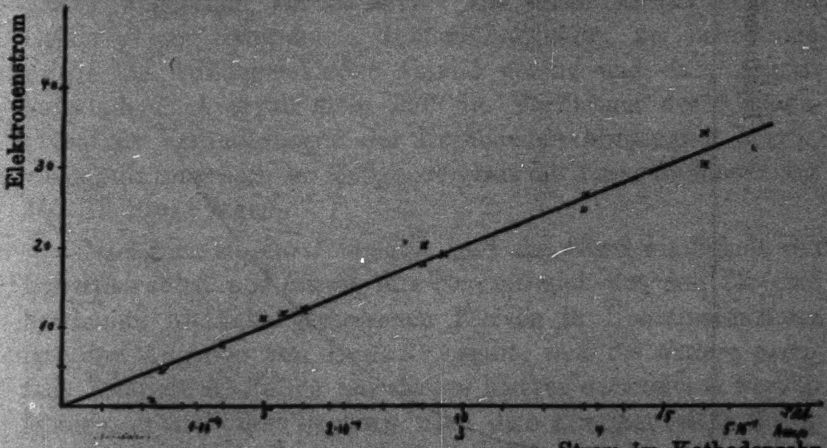


Fig. 10.

von $3 \cdot 10^{-4}$ Ampere $4{,}5 \cdot 10^{-5}$ Ampere auf die Al-Folie auftreffen; gemessen wurde ein Strom von $20 \cdot 10^{-7}$ Ampere, d. h. nur 4,5 Proz. der auf das Al-Fenster auftreffenden Kathodenstrahlen treten bei der vorgegebenen Spannung durch das Lenardfenster durch.

Vergleicht man dieses Resultat mit den Kurven Lenards über den Intensitätsabfall im Aluminium für die gleiche Geschwindigkeit und die gleiche Aluminiumdicke, so findet man dort einen Wert von 0,04 in guter Übereinstimmung mit dem experimentell gefundenen Wert von 0,045. Die benutzte Spannung von 75 Volt primär würde etwa einer Kathodenstrahl-

---

1) H. Starke, Ann. d. Phys. 9. S. 271. 1902.

geschwindigkeit von 0,38 Lichtgeschwindigkeit entsprechen. Einen weiteren Vergleich über die Richtigkeit der gefundenen Werte konnte die Intensitätszunahme der Kathodenstrahlung mit steigender Röhrenspannung geben. Die Stromstärke wurde dabei konstant gehalten, die Spannungsregulierung geschah auf der Primärseite des Transformators. Die nebenstehende Kurve der Fig. 11 zeigt den Anstieg, der stärker als linear und mit den Kurven **Lenards** in Übereinstimmung ist.

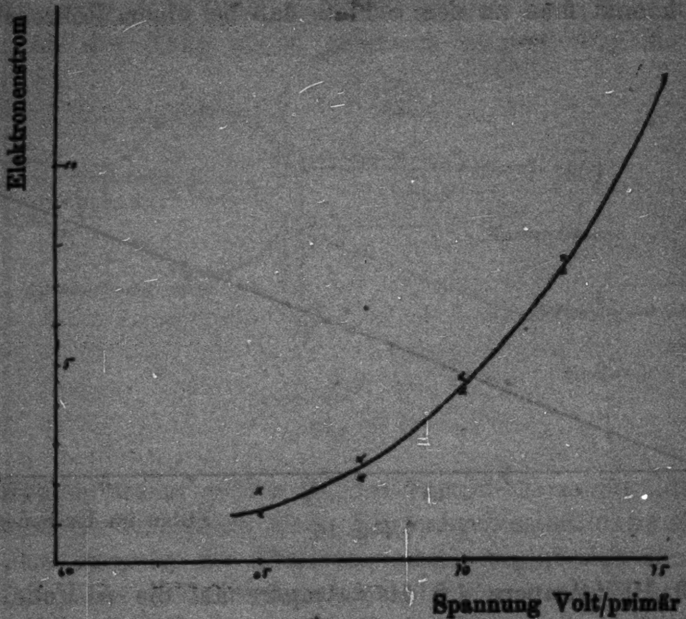


Fig. 11.

Es ergibt sich, daß der Geschwindigkeitsverlust der durchtretenden Strahlen gering ist, ihre Geschwindigkeit beträgt 0,35—0,36 Lichtgeschwindigkeit, was einer Spannung von $3{,}6 \cdot 10^4$ Volt entsprechen würde.

Hiernach ist sowohl die Intensität wie auch die Geschwindigkeit der Lenardstrahlen bekannt, und ihre Energie läßt sich als Produkt aus den beiden Größen berechnen. Folgende Tabelle gibt die Energie der durchtretenden Kathodenstrahlen bei konstanter Spannung in Abhängigkeit von der Röhrenstromstärke.

Primäre Stromstärke in der Kathodenröhre	Energie der durchtretenden Strahlung
$1 \cdot 10^{-4}$	0,012 Watt
$3 \cdot 10^{-4}$	0,0375 „
$5 \cdot 10^{-4}$	0,060 „
$8 \cdot 10^{-4}$	0,1 „
$10 \cdot 10^{-4}$	0,12 „

Zu berücksichtigen wäre noch die in der Al-Folie erzeugte Sekundärstrahlung, die mitgemessen bei der Energieberechnung in Abzug zu bringen wäre, da ihre Geschwindigkeit als sehr gering angesehen werden muß. Um einen Anhalt über die Größe dieser langsamen Sekundärstrahlung zu bekommen, wurde die Auffangelektrode einmal positiv und dann negativ aufgeladen; es ergab sich, daß die Variierung des Aufladepotentials Veränderungen der Kathodenstrahlintensität hervorriefen, die innerhalb der Meßgenauigkeit der Versuchsanordnung, 10—15 Proz., lagen.

Nachdem so die Intensität und die Geschwindigkeit der Lenardstrahlen und damit ihre Energie sich aus den für eine bestimmte Al-Dicke gemessenen Kurven in Übereinstimmung mit den Angaben von Lenard ergibt, und für andere ebenfalls benutzte Al-Folien aus dessen Kurven entnommen werden können, entsteht das Problem nach dem Energieumsatz dieser Strahlung. Als meßbare Größen für diese Energiebilanz ergeben sich sofort die Energiebruchteile der Sekundärstrahlung und der Ozonbildung; und bezogen auf die Versuchsergebnisse aus den Vergleichsmessungen zwischen Ionenmengen und Ozonbildung kommt man zu folgenden Resultaten.

Aus der Tabelle von S. 125 ergibt sich für die Versuche 2—5: Durch Titration mit n/50-$Na_2S_2O_3$ wurde gemessen, daß bei einem Versuch über 60 Minuten 2,75 mg Ozon gebildet waren. Da 1 mg $O_3 = 0{,}466$ ccm bei Atmosphärendruck, so wurden bei dem Versuch 1,4 ccm Ozon gebildet. Die Intensität der durch das Lenardfenster hindurchtretenden Kathodenstrahlen betrug bei dem Versuch $1{,}6 \cdot 10^{-6}$ Ampere und ihre Geschwindigkeit war äquivalent $3{,}5 \cdot 10^{+4}$ Volt. Daraus resultiert eine Energie von $W = 5{,}25 \cdot 10^{-2}$ Watt/sec. oder 3,15 Watt/Min. Die Bildungswärme von 1 Mol Ozon beträgt nach St. Jahn¹) etwa 35000 Cal. Für die Bildung von 1,4 ccm, die bei dem Versuch über 60 Minuten erzeugt wurden, werden danach 2,24 Cal. = 9,4 Watt benötigt. Daraus ergibt sich für eine Minute 0,0373 Cal. oder 0,156 Watt bzw. $6,2 \cdot 10^{-4}$ Cal. oder $2,5 \cdot 10^{-3}$ Watt/sec. Während die Gesamtmenge der Kathodenstrahlung 3,15 Watt/Min. beträgt, wird zur Ozonbildung nur 0,156 Watt/Min. verbraucht, d. h. der 20. Teil oder 5 Proz. der Gesamtenergie wird zur Ozonbildung verbraucht.

Die Berechnung der Ionisierungsenergie aus dem Sättigungsstrom führt zu folgendem Resultat. Der Sättigungsstrom war gleich $3,5 \cdot 10^{-5}$ Ampere, daraus ergibt sich als Ionenzahl in der Sekunde $N = 4,25 \cdot 10^{14}$. Die Ionisierungsenergie pro Ion:

$$I = \frac{4,77 \cdot 10^{-10} \cdot 15,5}{300} = 2,47 \cdot 10^{-11} \text{ erg.},$$

wo die Ionisierungsspannung für Sauerstoff zu 15,5 Volt angesetzt ist.²) Die Ionisierungsenergie für den Sättigungsstrom ergibt sich zu $I = 2,40\ 10^{-11} \cdot 4,25\ 10^{14} = 10,5 \cdot 10^{3}$ erg. = $10,5 \cdot 10^{-4}$ Watt/sec. Das Verhältnis der Gesamtenergie der Kathodenstrahlen zu der Ionisierungsenergie ist $\frac{5,25\ 10^{-2}}{10,5 \cdot 10^{-4}}$, d. h. die Energie der Sekundärstrahlung beträgt 2 Proz. der Gesamtenergie. Während für obige 4 Versuche sich der Bruchteil für Ozonbildung zu 5 Proz. und der für die Ionisierung zu 2 Proz. der Gesamtenergie ergab, betrug für den Versuch 7 derselben Versuchsreihe die Ozonbildung 4 Proz. und die Ionisierungsenergie 2 Proz.

Aus der 2. Versuchsreihe auf S. 127 ergeben sich folgende Werte:

Versuch	Ozonbildung in Proz.	Ionisierungsenergie in Proz.
3	10	4
6	11	3
9	5,8	2

---

1) St. Jahn, Ztschr. f. anorg. Chem. 60. S. 337. 1908; St. Jahn u. A. Kailan, Ztschr. f. anorg. Chem. 68. S. 243. 1910.

2) W. A. Roth u. K. Scheel, Konstanten der Atomphysik, S. 71.

Die Tatsache, daß der Energiebruchteil für die Ozonbildung den Ionisierungsbetrag überwiegt, ergab sich schon aus der Vergleichsmessung zwischen der Zahl der Ozonmoleküle und dem Sättigungsstrom und wird durch obige Energiebilanz nur bestätigt. Die starken Schwankungen in den beiden Vergleichsmessungen sind auf die Spannungs- und Stromstärkeänderungen zurückzuführen, die bei einem Versuch Fehler von 10—15 Proz. ergaben.

Ein Vergleich der oben experimentell gewonnenen Daten für die zur Ionisierung verwandte Energie mit den Werten, die Lenard in seinen Betrachtungen über die Energieverhältnisse der Kathodenstrahlen berechnet, zeigt, daß die gefundenen Werte für die betreffende Geschwindigkeit 0,3—0,45 Lichtgeschwindigkeit (Lg) etwas geringer sind als die von Lenard angesetzten, nach dem in diesem Geschwindigkeitsbereich der Energiebruchteil für die Sekundärstrahlung 4—5 Proz. der Gesamtenergie beträgt, während die obigen Versuche Werte von 2—5 Proz. ergeben. Und zwar gelten die Lenardschen Zahlenwerte für Luft und müßten danach für Sauerstoff noch etwas größere Werte annehmen.

Ebenso ergibt ein Vergleich der durch ein Primärelektron gebildeten Ionen, d. h. also das Verhältnis der im Auffangekäfig bemessenen Elektronenzahl zu dem Sättigungsstrom der Sekundärstrahlung Abweichungen von den Lenardschen Daten für Luft. Während Lenard in dem Geschwindigkeitsbereich von 0,3—0,35 Lg für ein Primärelektron 100—160 Sekundärelektronen findet, liegen die Werte für die Sekundärstrahlung bei den oben gemachten Versuchen um 30—50 Proz., d. h. 80—100 Ionen pro Primärelektron niedriger. Allerdings wäre für eine genaue Bestimmung der Geschwindigkeit der Elektronen die Kenntnis der an der Röhre liegenden Spannung erforderlich; während die Spannungsbestimmung Lenards in der Hauptsache auf Schlagweitenbestimmung basiert sind, wurde in vorliegender Arbeit mit dem Transformatorübersetzungsverhältnis gerechnet.

Eine weitere Fehlerquelle bildeten die Al-Folien für das Lenardfenster; ihre Dicken, die durch Sphärometer gemessen wurden, waren durchaus nicht über die ganze Fläche konstant, sondern waren auf geringen Flächen schon erheblich verschieden, wodurch dann sowohl Änderungen der Intensität wie der Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen hervorgerufen wurden. Trotz dieser Fehlerquellen wird als wichtigstes Ergebnis die Tatsache bestätigt, daß der Energiebruchteil für chemische Wirkungen den Ionisierungsbetrag erheblich übertrifft.

Ist somit der Energiebruchteil, der für Ozonbildung und Ionisierung verbraucht wird, durch Messung der chemischen Reaktionsprodukte einerseits und des Sättigungsstromes andererseits quantitativ meßbar und zu wenigen Prozenten der Gesamtenergie festgestellt, so erhebt sich die Frage nach dem Verbleib des Restes der Energie. Es kommen noch folgende Vorgänge dafür in Betracht: Wärmeentwicklung, Lichtemission und Erzeugung von Röntgenstrahlung; und zwas ist der Umsatz durch die beiden letzten Effekte, wie schon oben festgestellt wurde, so gering, daß der gesamte Rest als ausschließlich in Wärme umgesetzt betrachtet werden kann. Um diese Erwärmung des Gases durch Absorption der Kathodenstrahlen quantitativ messen zu können, wurde die Volumausdehnung eines abgeschlossenen Gasvolumens gemessen, da Temperaturerhöhung bei durchströmendem Gase durch thermometrische Messungen nicht festgestellt werden konnten.

Zu diesem Zwecke wurde die aufschraubbare Glaskappe vakuumdicht verkittet, die Gaszu- und -ableitungsrohre durch Hähne verschlossen und außerdem durch Schliffverbindung an dem einen Rohransatz ein Manometer angebracht. Als Manometerflüssigkeit wurde konzentrierte Schwefelsäure benutzt, die erreichte Druckdifferenz wurde auf einer Skala aus Millimeterpapier abgelesen.

Durch Vorversuche an einem abgesperrten Luftvolumen wurde festgestellt, daß die Energie der Kathodenstrahlung ausreichte zur Erlangung einer meßbaren Druckdifferenz. Die Größe der Druckdifferenz wurde in Abhängigkeit von der Energie der Kathodenstrahlen gemessen, es ergab sich, wie nebenstehende Kurve der Fig. 12 zeigt, ein linearer Anstieg mit Zunahme der Röhrenstromstärke. Dagegen stieg, wie die andere Kurve zeigt, die Druckzunahme bei steigender Spannung stärker als linear, eine Beziehung, wie sie aus der Intensitätssteigerung mit wachsender Geschwindigkeit erwartet werden mußte. Die gleiche Erscheinung einer Druckzunahme beim

Einschalten ist bei Ozonröhren schon lange bekannt[1]) und von E. Rossenbeck[2]) in Abhängigkeit von der in der Ozonröhre verbrauchten Energie untersucht worden; sie wurde innerhalb gewisser Grenzen der in den Entladungsraum hineingegebenen Energie proportional gefunden, in Übereinstimmung mit oben gefundenen Resultaten.

Um Gewißheit darüber zu haben, daß die gefundenen Werte der Druckerhöhung den Gleichgewichtszustand darstellen, wurde die Änderung des Druckes in Abhängigkeit von der Zeit gemessen. Die Kurven der Fig. 13 zeigen graphisch die ausgeführten Messungen. Wie zu erwarten ging die Druckerhöhung sehr schnell vor sich, der Gleichgewichtszustand war schon innerhalb weniger Sekunden erreicht, und zeigte eine genügende Konstanz, die sich auch den Änderungen der Energie der Kathodenstrahlen genügend schnell anpaßte.

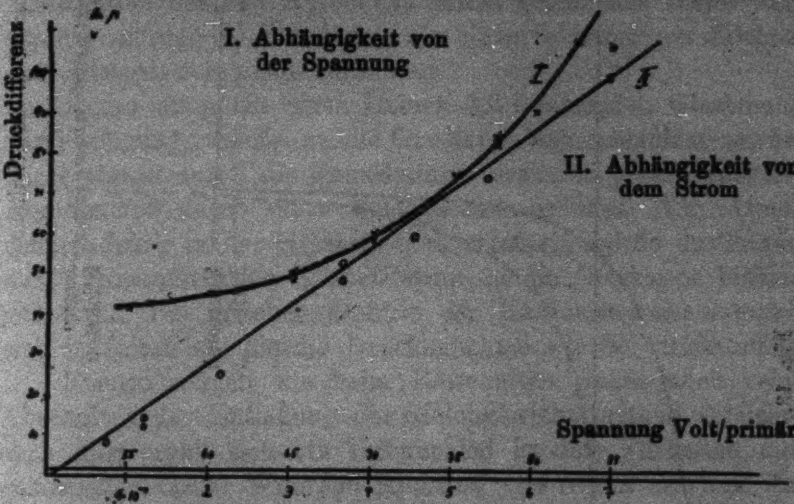


Fig. 12.

Wie in Luft wurde die Druckzunahme vor allem in Sauerstoff untersucht und ergab bei gleicher Energie der Kathoden-

---

1) C. Engler, Hist. Krit. Studien über das Ozon. Dresden 1879.

2) E. Rossenbeck, Vorgänge beim Stromdurchgang durch Entladungsröhren ohne Metallelektroden bei Atmosphärendruck. Dissertation Greifswald 1921.

strahlen ungefähr den gleichen Wert. Die so gemessene Drucksteigerung durch die Erwärmung ist hiernach also sicher größer als die Druckabnahme durch die Ozonbildung. Daß diese Volumenverminderung durch die Ozonbildung doch in Rechnung zu stellen ist, zeigte ein Vergleich mit Stickstoff,

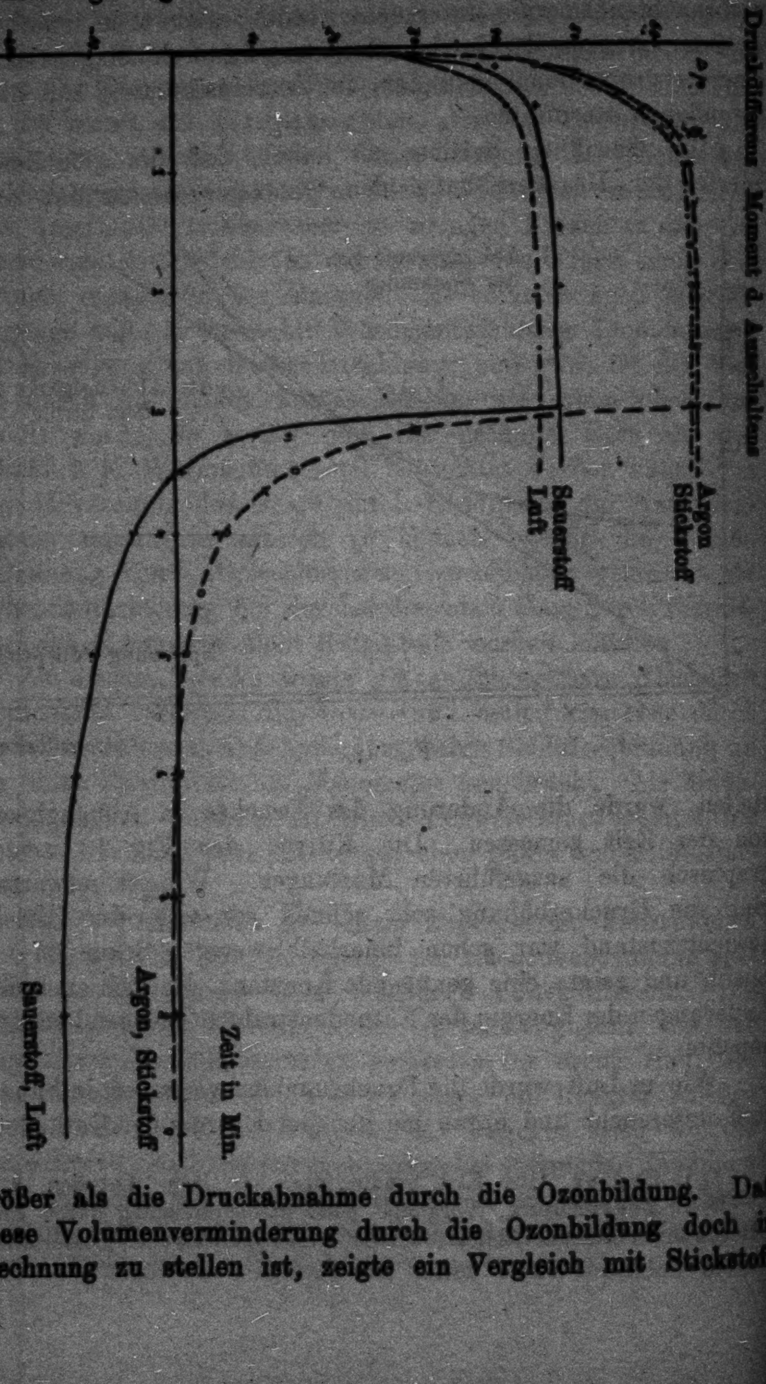


Fig. 18.

in dem keine chemische Reaktion ausgelöst wird; hier war die Druckzunahme bei gleicher Energie der Kathodenstrahlen größer, so daß die Differenz zwischen beiden Werten die Volumenverminderung durch die Ozonbildung in Sauerstoff ergibt.

Außerdem zeigt die Kurve noch die Druckerhöhung in Argon. Argon wurde aus dem Grunde gewählt, um festzustellen, daß die Volumenausdehnung nicht etwa durch Dissoziation des von Kathodenstrahlen getroffenen Gases verursacht wurde, da bei Argon als einem einatomigen Edelgas eine Dissoziation nicht vorkommt.

Argon stand in einer kleinen 0,5 l fassenden Glasbombe zur Verfügung, welche an die Glaskappe angeschmolzen wurde, Diese wurde durch die Kapselpumpe evakuiert und darauf die Argonpumpe durch einen Schlagbolzen geöffnet. Um Atmosphärendruck in der Glaskappe zu erhalten, wurde das Argon durch hineinfließende Schwefelsäure in die Glaskappe hineingedrückt. Bei gleicher Energie der Kathodenstrahlen ergab sich in Argon die gleiche Druckzunahme wie bei Stickstoff.

Ebenso schnell wie beim Einschalten wurde auch beim Abschalten der Entladung der Gleichgewichtszustand erreicht; auch hier ergab sich ein Unterschied in dem Verhalten der gemessenen Gase. Während Stickstoff und Argon sich auf ihr ursprüngliches Volumen einstellten, also keine Druckdifferenz anzeigten, wurde bei Luft und Sauerstoff eine Druckabnahme festgestellt; diese wurde durch die Volumenverminderung, die die Ozonbildung verursacht, erklärt und ist von derselben Größenordnung wie der Unterschied der Druckzunahme zwischen Argon und Stickstoff einerseits und Luft und Sauerstoff andererseits.

Diese Druckverminderung blieb über mehrere Stunden konstant, ein Beweis dafür, daß der Ozonzerfall in den abgeschlossenen Gasraum bei Zimmertemperatur sehr gering war.

Während so eine Volumenveränderung des Gases durch Einwirkung der Kathodenstrahlen festgestellt war, erhob sich die Frage: wie groß ist der Energiebetrag, der diese Erwärmung verursacht? Experimentell konnte diese Frage dadurch entschieden werden, daß durch Erwärmung eines Drahtes, der an zwei Platineinschmelzungen in dem Glasgefäß befestigt war, ein gleicher Druckeffekt hervorgerufen wurde, wie er durch die Absorption der Kathodenstrahlen erzeugt war. Der eingeführte Draht bestand aus Konstantan von 0,1 mm Dicke und war zu einer Spirale aufgerollt, seine gesamte Länge betrug etwa 35 cm mit einem Widerstand von 38,5 Ohm. Es wurde nun die in den Draht hineingeschickte Energie durch Präzisions-Volt- und Amperemeter gemessen und außerdem die durch diese Energie hervorgerufene Erwärmung des Gasvolumens am Manometer.

Die so erhaltenen Werte der Energiebeträge mit den dazugehörigen Druckdifferenzen wurden mit den Druckzunahmen, die durch Kathodenstrahlen bestimmter Energie verursacht waren, verglichen. Als überraschendes Resultat ergab sich dabei, daß die Energie des erwärmten Drahtes, bezogen auf die gleiche Volumausdehnung, die Energie der Kathodenstrahlung um das Vierfache übertraf. Während die Energie der Kathodenstrahlen zwischen den Größen von $5—9 \cdot 10^{-2}$ Watt/sec liegt und bei ihrer Absorption Druckdifferenzen von 50—100 mm gemessen wurden, ergab eine Erwärmung des Konstantandrahtes durch $9 \cdot 10^{-2}—2{,}5 \cdot 10^{-1}$ Watt/sec eine Druckzunahme von 15—30 mm, d. h. für eine Volumveränderung von 50—100 mm, wie sie durch die Kathodenstrahlen erzeugt wird, wäre die dreifache Energie erforderlich, so daß die Energie für die Erwärmung des Drahtes etwa das Vierfache der Kathodenstrahlenergie betrüge. Da Energieverluste bei der Erwärmung des Drahtes durch Wärmeableitung und durch Strahlung nur von verschwindendem Betrage anzunehmen sind, so war bei dem Vergleich der beiden Energiebeträge eher eine Korrektion bei der Erwärmung durch die Kathodenstrahlen anzunehmen. Vor allem war zu untersuchen, ob nicht die Erwärmung der Al-Folie durch absorbierte Kathodenstrahlen eine Erwärmung des Gases herbeiführen würde trotz der Wasserkühlung der Messingkappe, die eine Erwärmung des Lenardfensters verhindern sollte. Deshalb wurden die Druckzunahmen bei gleicher Kathodenstrahlenergie einmal mit Wasserkühlung und darauf ohne Wasserkühlung verglichen und es zeigte sich, daß die Differenz zwischen beiden Werten nicht beträchtlich (etwa 20 Proz.) war; sodann wurde untersucht, ob Kathodenstrahlen, deren Geschwindigkeit unterhalb der Grenzdicke der Al-Folie lag, eine Druckzunahme ergeben würden; und tatsächlich zeigte sich hier eine Druckzunahme, d. h. die durch absorbierte Kathodenstrahlen erwärmte Al-Folie verursachte trotz der Wasserkühlung eine beträchtliche Volumausdehnung des Gases.

Um nun die wirkliche Erwärmung des Gases durch die absorbierten Kathodenstrahlen festzustellen, mußte die Er-

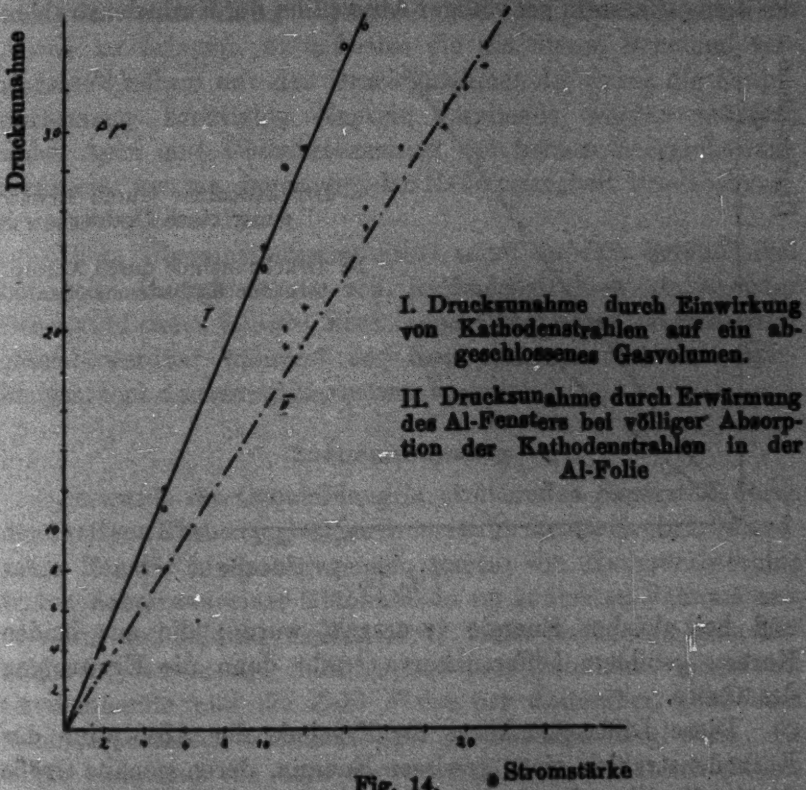


Fig. 14.

wärmung, die durch das Lenardfenster verursacht wurde, in Abzug gebracht werden. Zu diesem Zwecke wurde die Druckzunahme bei bestimmter Energie der Kathodenstrahlen gemessen und dann die Erwärmung einer dickeren Folie des Lenardfensters durch Kathodenstrahlen derselben Energie, die vollkommen in dieser Al-Folie absorbiert wurden, in Abzug gebracht. Die Dicke der Al-Folie mußte also für diesen Fall volle Gewähr dafür bieten, daß alle Kathodenstrahlen absorbiert werden. Die Differenz beider Werte ergibt dann die Erwärmung des Gases, die ausschließlich durch Absorption der Kathodenstrahlen verursacht wurde. Die Kurven der Fig. 14 auf voriger Seite zeigen die beiden Meßreihen und zwar zeigt Kurve I bei steigender Energie der Kathodenstrahlung die am Manometer abgelesene zugehörige Druckzunahme, während Kurve II die Druckzunahme, die durch Erwärmung des Lenardfensters bei völliger Absorption der Kathodenstrahlen und bei gleicher Energie verursacht wurde; die aus beiden Kurven gebildete Differenzkurve ergibt dann die Erwärmung des Gases.

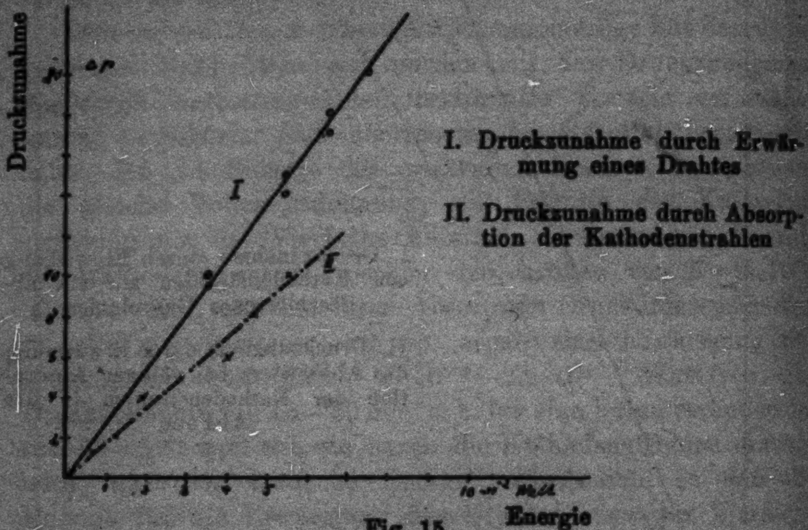


Fig. 15.

Diese Differenzenkurve als Ergebnis der Absorption der Kathodenstrahlen einer gewissen Energie, deren genaue Größe durch die Berechnung aus dem Energieumsatz bekannt ist, wurde nun mit den Druckzunahmen, wie sie durch Erwärmung des Widerstandsdrahtes verursacht wurde, verglichen. Die folgenden Kurven der Fig. 15 zeigen den Vergleich der beiden Größen, während Kurve I die Druckzunahme durch Erwärmung des Konstantandrahtes in Abhängigkeit von der hineingeschickten Energie angibt, zeigt Kurve II, die Differenzenkurve, die Erwärmung, die durch Absorption der Kathodenstrahlen verursacht wird.

Es zeigt sich aus dem Vergleich der beiden Kurven, daß bezogen auf gleiche Energie die Druckzunahme durch Erwärmung des Drahtes größer ist als durch die Absorption der Kathodenstrahlen, und zwar beträgt der Unterschied etwa 20—25 Proz. Berücksichtigt man nun, daß von der Gesamtenergie der Kathodenstrahlung ein bestimmter Bruchteil bis zu 10—15 Proz. zur Ionisation und Ozonbildung verbraucht wird, so wäre dieser Bruchteil von der Gesamtenergie in Abzug zu bringen, so daß also die um diesen Bruchteil verringerte Energie mit den Druckzunahmen der durch die Drahterwärmung benötigten Energie verglichen werden müssen; wobei dann eine Übereinstimmung der beiden Energiebeträge resultiert, wie sie angesichts der Meßgenauigkeit 10—15 Proz., erwartet werden kann.

Diese Übereinstimmung führt somit zu dem Schluß, daß bei dem Energieumsatz von Kathodenstrahlen vorliegender Geschwindigkeit 80—90 Proz. ihrer Energie in Wärme umgesetzt werden; während der Rest sich auf chemische Wirkungen und Ionisierungsarbeiten verteilt.

Zusammenfassung.

Es wurde die Ozonbildung in strömenden Sauerstoff durch den Stoß von Kathodenstrahlen untersucht, die durch ein Lenardsches Fenster hindurchgegangen waren; die Kathodenstrahlen traten dabei aus einer Glühkathode im äußersten Vakuum aus.

Um den Bildungsmechanismus dieser Ozondarstellung aufzuklären, wurde die Zahl M der pro Zeiteinheit gebildeten Ozonmoleküle und die Zahl N der pro Zeiteinheit gebildeten sekundären Ionen bestimmt und miteinander verglichen. Es zeigte sich, daß die Zahl der Ozonmoleküle erheblich (20 bis 40mal) größer ist, als die Zahl der in Sauerstoff gebildeten Ionen, immerhin aber dieser Zahl einigermaßen proportional geht. Die früher von M. Moeller gefundene Äquivalenz zwischen der Zahl der in Stickstoff gebildeten Ionen und der Zahl der in Sauerstoff bei derselben Kathodenstrahlintensität gebildeten Ozonmoleküle konnte nicht bestätigt werden; vielmehr wurde entsprechend dem Lenardschen Gesetz und den Messungen von Mc Lennan die Sekundärstrahlung in Stickstoff, Luft und Wasserstoff massenproportional gefunden, ein

Einfluß chemischer Reaktionen auf die erzeugte Sekundärstrahlung, wie ihn Moeller annehmen zu müssen glaubte, also nicht konstatiert. Es ist daher anzunehmen, daß die Ozonbildung durch Kathodenstrahlen nicht an die Ionisation gebunden ist, sondern daß durch den Stoß der Elektronen „angeregte“ Sauerstoffmoleküle durch Zusammenstoß mit anderen nicht angeregten Ozon bilden, wie das auch nach der photochemischen Bildung des Ozons zu erwarten ist.

Es wurde ferner die technische Ausbeute der Ozonbildung (g Ozon/Amperestunde) durch Kathodenstrahlen, die durch ein ein Lenardsches Fenster hindurchgegangen waren, in Abhängigkeit von der Strömungsgeschwindigkeit des Gases, von der Spannung und von der Stromstärke gemessen; sie ergab sich für das verwandte Lenardfenster zu maximal 150 g/Amperestunde Ozon. Diese Ausbeute ist viel geringer als die technischer Ozongeneratoren, wobei aber zu berücksichtigen ist, daß die Energie der durch das Lenardfenster austretenden Kathodenstrahlen nur 3—5 Proz. der angewandten elektrischen Energie beträgt.

Schließlich wurde die Energiebilanz bei der Ozonbildung durch Elektronenstoß gemessen und gefunden, daß für die Ionisierung oder Sekundärstrahlung 2—4 Proz., für die Ozonbildung 5—11 Proz. der Gesamtenergie verwandt werden; der Rest der Energie, also 80—90 Proz., werden in Wärme verwandelt. Die hierbei eintretende Temperaturerhöhung des Gases wurde durch die dabei eintretende Volumausdehnung des abgeschlossenen Gasvolumens bestimmt; die dieser Temperaturerhöhung entsprechende Energie wurde durch Vergleichsmessung mittels eines elektrisch erwärmten Konstantandrahtes gemessen.

Die benutzte Hochspannungsapparatur war aus Mitteln beschafft, welche die Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft bewilligt hat, wofür auch an dieser Stelle der Dank ausgesprochen sei.

Greifswald, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 20. August 1925.)

2. *Diffuse Strahlung dielektrischer Kugeln im Grenzfalle, daß Kugelmaterial und umgebendes Medium fast gleiche Brechungsindices haben;*

von G. Jobst.

Unter diffuser Strahlung einer Kugel verstehen wir den Anteil des Lichtes, der durch die Kugel aus der Einfallsrichtung durch Beugung, Brechung oder Reflexion abgelenkt wird; das einfallende Licht ist parallel.

Aus der Maxwellschen Theorie läßt sich für Kugeln beliebiger Größe und Materials der allgemeinste Ausdruck für diese diffuse Strahlung zwar berechnen, nicht aber wegen der Kompliziertheit der Lösungen diskutieren. Man ist daher auf die Diskussion von Spezialfällen angewiesen; in folgendem beabsichtigen wir eine Gegenüberstellung dreier charakteristischer Fälle, bei denen Kugeln und äußeres Material stets als völlig nichtleitend vorausgesetzt werden. Wir untersuchen

a) die Rayleighsche Strahlung (sehr kleine Kugeln), wenn äußerer und innerer Brechungsindex fast gleich sind,
b) große Kugeln im gleichen Falle,
c) den Schattenfall.

Bezeichnungen.

λ = Wellenlänge des einfallenden Lichtes,
ω = Kreisfrequenz,
c = Lichtgeschwindigkeit,
N_a = Brechungsindex des umgebenden Mediums,
N_i = Brechungsindex der Kugel,
$\varepsilon = N_i - N_a$,
a = Kugeldurchmesser,
$\varrho = \frac{2\pi a}{\lambda}$, $\qquad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} N_a^2$,
$\Re(x)$ = Reeller Teil von x.

Den Ausgangspunkt unserer Untersuchungen bildet die auf Grund der Maxwellschen Theorie berechnete Formel für die diffuse Strahlung einer Kugel, auf welche paralleles Licht auffällt,

$$D = \frac{\pi}{k^2} \cdot \mathfrak{Re} \sum_{1}^{\infty} (2n+1)(A_n^1 + A_n^2),$$

$$A_n^1 = a_n^1 + i b_n^1 = \frac{N_a \psi_n(\varrho N_a) \psi_n'(\varrho N_i) - N_i \psi_n'(\varrho N_a) \psi_n(\varrho N_i)}{N_a \zeta_n(\varrho N_a) \psi_n'(\varrho N_i) - N_i \zeta_n'(\varrho N_a) \psi_n(\varrho N_i)},$$

$$A_n^2 = a_n^2 + i b_n^2 = \frac{N_i \psi_n(\varrho N_a) \psi_n'(\varrho N_i) - N_a \psi_n'(\varrho N_a) \psi_n(\varrho N_i)}{N_i \zeta_n(\varrho N_a) \psi_n'(\varrho N_i) - N_a \zeta_n'(\varrho N_a) \psi_n(\varrho N_i)},$$

wobei sich die a_n^1, a_n^2 auch darstellen lassen durch

$$a_n^1 = \mathfrak{Re}\, A_n^1 = \frac{\mathfrak{A}_n^{1^2}}{1 + \mathfrak{A}_n^{1^2}},$$

$$a_n^2 = \mathfrak{Re}\, A_n^2 = \frac{\mathfrak{A}_n^{2^2}}{1 + \mathfrak{A}_n^{2^2}},$$

mit

$$\mathfrak{A}_n^1 = \frac{N_a \psi_n(\varrho N_a) \psi_n'(\varrho N_i) - N_i \psi_n'(\varrho N_a) \psi_n(\varrho N_i)}{N_a \chi_n(\varrho N_a) \psi_n'(\varrho N_i) - N_i \chi_n'(\varrho N_a) \psi_n(\varrho N_i)},$$

$$\mathfrak{A}_n^2 = \frac{N_i \psi_n(\varrho N_a) \psi_n'(\varrho N_i) - N_a \psi_n'(\varrho N_a) \psi_n(\varrho N_i)}{N_i \chi_n(\varrho N_a) \psi_n'(\varrho N_i) - N_a \chi_n'(\varrho N_a) \psi_n(\varrho N_i)}.$$

Hierbei sind:

$$\psi_n(x), \quad \chi_n(x), \quad \zeta_n(x)$$

Zylinderfunktionen,

$$\psi_n'(x), \quad \chi_n'(x), \quad \zeta_n'(x)$$

deren Ableitungen, und zwar

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2} x} \cdot J_{n+1/2}(x),$$

$$\chi_n(x = \sqrt{\frac{\pi}{2} x} (-1)^n \cdot J_{-n-1/2}(x),$$

$$\zeta_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2} x} \cdot H_{n+1/2}^2(x),$$

im wesentlichen Besselsche und Hankelsche Funktionen mit halbzahligem Index. Ihre hauptsächlichsten, für uns in Betracht kommenden Eigenschaften, insbesondere ihre semikonvergenten Entwicklungen werden wir im folgenden noch kennenlernen.

Die drei von uns in Betracht zu ziehenden Spezialfälle a, b, c unterscheiden sich mathematisch wie folgt:

$$
\begin{aligned}
&\text{a)} \quad \varrho\,\varepsilon < \varrho < 1, \qquad \varrho N_a < 1, \quad \varrho N_i < 1,\\
&\text{b)} \quad \varrho\,\varepsilon < 1 < \varrho,\\
&\text{c)} \quad 1 < \varrho\,\varepsilon < \varrho.
\end{aligned}
$$

Im Falle a) ist das Verhältnis $\varrho = \frac{2\pi a}{\lambda}$ klein gegen 1; das resultierende Gesetz ist das Rayleighsche λ^{-4} Gesetz. Im Falle b) ist $\varrho = \frac{2\pi a}{\lambda}$ groß gegen 1, das Produkt $\varrho(N_i - N_a)$ aber immer noch klein gegen 1 wegen des vorausgesetzten sehr kleinen Wertes von $N_i - N_a$. Das hier gültige Strahlungsgesetz könnte als zur geometrischen Optik gehörig angesehen werden; wir werden aber sehen, daß die Beugung eine wesentliche Rolle spielt, wie aus der Abhängigkeit der Endformel von λ hervorgeht.

Im Falle c) ist sowohl ϱ als auch $\varrho\,\varepsilon$ groß gegen 1. Hier liegt der Fall vor, daß alles auf die Kugel auffallende Licht zerstreut wird durch Reflexion und Brechung. Dieser letzte Fall ist physikalisch an sich trivial. Er ist angeführt, weil die Rechnung, die wir hier benötigen, auch für den Fall b) gilt und mit großer Schärfe die Grenzen der Gültigkeit beider Gesetze erkennen läßt.

Der Fall a) ist in der älteren und neueren Literatur mehrfach behandelt worden, insbesondere zusammenhängend mit weiterreichenden Fragen in einer Arbeit von Mie[1]), und im Zusammenhang mit dem Lichtdruck auf Kugeln von Debye[2]). Wir stellen hier kurz die Resultate zusammen:

Fall a). In der Summe für D berücksichtigen wir nur das erste Glied, da die weiteren Glieder Beiträge von der Größenordnung $(\varrho\,\varepsilon)^2$, $\varrho^3 \cdots$ usw. liefern (siehe Debye, a. a. O., S. 104). Wir erhalten für

$$
\psi_1(\varrho) = \frac{\varrho^2}{3}, \qquad \chi_1(\varrho) = \frac{1}{\varrho},
$$

$$
\psi_1'(\varrho) = \frac{2\varrho}{3}, \qquad \chi_1(\varrho) = \frac{1}{\varrho^2},
$$

---

[1]) G. Mie, Beiträge zur Optik trüber Medien. Ann. d. Phys. 4. 25.

[2]) P. Debye, Der Lichtdruck auf Kugeln. Ann. d. Phys. 4. 30.

$$\mathfrak{A}_n^1 = \frac{2}{3} N_a \varrho^3 \cdot \frac{N_a^2 - N_i^2}{2 + \frac{N_i^2}{N_a^2}},$$

$$\mathfrak{A}_n^2 = 0,$$

mit der hier in Betracht kommenden Genauigkeit.

Da ferner $\mathfrak{A}_n^{1'} < < 1$ ist, so wird

$$\mathfrak{A}_n^{1'} = \frac{\mathfrak{A}_n^{1'}}{1 + \mathfrak{A}_n^{1'}} = \mathfrak{A}_n^{1'},$$

$$D = \frac{\pi}{k^2} \cdot 3 \cdot \mathfrak{A}_n^{1'},$$

$$= \frac{\pi}{(2\pi)^2 N_a^2} \lambda^2 \cdot 3 \cdot \frac{4}{9} \cdot N_a^2 \cdot \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^6 \cdot \left(\frac{N_a^2 - N_i^2}{2 + \frac{N_i^2}{N_a^2}}\right)^2,$$

(a) $$D = \frac{16}{27} \cdot \pi a^2 \cdot \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^4 \cdot N_a^2 \cdot (N_a - N_i)^2.$$

Fall c). Auch im Falle c) können wir mehr oder weniger auf die Ausführungen von Debye (a. a. O., S. 124—126) verweisen. Auf Grund der dortigen Überlegungen lassen sich unsere Koeffizienten A_n^1, A_n^2 folgendermaßen darstellen:

$$A_n^1 = \frac{1}{2} \left\{ 1 - e^{2i(\varrho N_a f_0 - \varrho N_i f_1)} \frac{1 - i r_1 e^{2i\varrho f_1 N_i}}{1 + i r_1 e^{-2i\varrho f_1 N_i}} \right\},$$

$$A_n^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 - e^{2i(\varrho N_a f_0 - \varrho N_i f_1)} \frac{1 - i r_2 e^{2i\varrho f_1 N_i}}{1 + i r_2 e^{-2i\varrho f_1 N_i}} \right\},$$

gültig für

$$1 < n < \varrho N_a.$$

Für $n > \varrho N_a$ nehmen die Koeffizienten A_n^1, A_n^2 andere Formen an. Ihrem Betrag nach verschwinden sie exponentiell gegen die Koeffizienten A_n^1, A_n^2 im Falle $n < \varrho N_a$. Somit wird aus der unendlichen Summe

$$D = \frac{\pi}{k^2} \mathfrak{Re} \sum_{1}^{\infty}{}^{n} (2n+1)(A_n^1 + A_n^2)$$

die endliche

$$D = \frac{\pi}{k^2} \sum_{1}^{\varrho N_a}{}^{n} (2n+1) \Bigg(1 - {}^1\!/_2\, e^{2i(\varrho N_a f_0 - \varrho N_i f_1)} \Bigg[\frac{1 - i r_1 e^{2i\varrho f_1 N_i}}{1 + i r_1 e^{-2i\varrho f_1 N_i}} + \frac{1 - i r_2 e^{2i\varrho f_1 N_i}}{1 + i r_2 e^{-2i\varrho f_1 N_i}} \Bigg] \Bigg),$$

wobei definiert ist

$$\cos\tau_0 = \frac{n+\frac{1}{2}}{\varrho N_a} \qquad 0 < \tau_0 < \frac{\pi}{2}$$

$$f_0 = \sin\tau_0 - \tau_0\cos\tau_0$$

$$\cos\tau_1 = \frac{n+\frac{1}{2}}{\varrho N_i} \qquad 0 < \tau_1 < \frac{\pi}{2}$$

$$f_1 = \sin\tau_1 - \tau_1\cos\tau_1$$

$$r_1 = \frac{N_i\sin\tau_0 - N_a\sin\tau_1}{N_i\sin\tau_0 + N_a\sin\tau_1} < 1,$$

$$r_2 = \frac{N_a\sin\tau_0 - N_i\sin\tau_1}{N_a\sin\tau_0 + N_i\sin\tau_1} < 1.$$

Bei der Summation über n wird der Ausdruck $e^{2i(\varrho N_a f_0 - \varrho N_i f_1)}$ wegen der Voraussetzung $\varrho(N_a - N_i) \gg 1$, also auch $\varrho N_a f_0 - \varrho N_i f_1 \gg 1$, stark zwischen positiven und negativen Werten schwanken und, da der Faktor in der eckigen Klammer nicht sehr von 2 verschieden ist, zu der in erster Näherung in ϱN_a quadratischen Summe keinen Beitrag liefern, in welchem der Exponent von ϱN_a höher als zweiter Ordnung ist.

Wir erhalten also

$$\text{(c)} \qquad D = \frac{\pi}{k_a^2}\cdot\varrho^2 N_a^2 = \frac{\pi}{(2\pi)^2} N_a^2 \lambda^2 \cdot \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 a^2 N_a^2 = \pi a^2.$$

Fall b). In diesem Falle sind die Überlegungen, welche zur Vernachlässigung der oszillierenden Bestandteile im Falle c) führten, nicht mehr anwendbar. Denn für $\varrho s \ll 1$ wird auch $\varrho N_a f_0 - \varrho N_i f_1 \ll 1$ und gibt zum Gesamtwert einen nicht zu vernachlässigenden Beitrag. Der Fall b) zwingt uns einerseits wegen der Größe der Einzelargumente $\varrho N_a > 1$, $\varrho N_i > 1$ unserer Funktionen ψ_n, ψ_n', χ_n, χ_n' zur Verwendung der Debyeschen Entwicklungen der Zylinderfunktionen. Die üblichen, im Falle a) benutzten Ausdrücke sind hier nicht brauchbar.[1]) Andererseits führt aber die Tatsache, daß die Zähler unserer Größen $\mathfrak{A}_n^1$ und $\mathfrak{A}_n^2$ wegen der für Fall b) gemachten Voraussetzungen quasi differential sind, zu einer einfachen Lösung.

Wir schreiben

$$\mathfrak{A}_n^1 = \frac{\dfrac{\psi_n'(\varrho N_i)\,\psi_n'(\varrho N_a)}{\varrho}\left\{\dfrac{\varrho N_a \psi_n(\varrho N_a)}{\psi_n'(\varrho N_a)} - \dfrac{\varrho N_i \psi_n(\varrho N_i)}{\psi_n'(\varrho N_i)}\right\}}{N_a\left\{\chi_n(\varrho N_a)\,\psi_n'(\varrho N_a) - \chi_n'(\varrho N_a)\,\psi_n(\varrho N_a)\right\} + \delta^1}$$

---

1) G. Jobst, Zur Farbentheorie kolloidaler Metallsuspensionen. Ann. d. Phys. 76. S. 867. 1925.

$$\delta^1 = \varrho\, \varepsilon\, N_a \left(\chi_n(\varrho N_a)\, \psi_n''(\varrho N_a) - \chi_n'(\varrho N_a)\, \psi_n'(\varrho N_a)\right) \\ - \varepsilon\, \chi_n'(\varrho N_a)\, \psi_n(\varrho N_a),$$

wobei der Nachweis leicht erbracht ist, daß der in der geschweiften Klammer des Nenners stehende Ausdruck gleich 1 und δ^1 wegen des vorausgesetzten kleinen Wertes von ε gegen $N_a \cdot 1$ zu vernachlässigen ist. Es ist nämlich $\chi_n(x)$ und $\psi_n(x)$ je eine Partikularlösung der Differentialgleichung

$$q_n''(x) + \left(1 - \frac{n(n+1)}{x^2}\right) q_n(x) = 0,$$

also

$$\chi_n(x)\, \psi_n'(x) - \psi_n(x)\, \chi_n'(x) = \text{constans},$$

wobei die Konstante bei der speziellen Wahl von $\chi_n(x)$ und $\psi_n(x)$ den Wert 1 hat. Dann aber wird:

$$\mathfrak{A}_n^1 = \frac{\psi_n'(\varrho N_a)\, \psi_n'(\varrho N_a)}{\varrho} \left\{ \frac{\Delta\left(\dfrac{(\varrho N_a)\, \psi_n(\varrho N_a)}{\psi_n'(\varrho N_a)}\right)}{\Delta(\varrho N_a)}\, \Delta(\varrho N_a) \right\}$$

$$= \Delta(\varrho N_a) \frac{\psi_n'(\varrho N_a)^2}{\varrho} \left\{ \frac{\psi_n(\varrho N_a)}{\psi_n'(\varrho N_a)} + \frac{\varrho N_a\, \psi_n'(\varrho N_a)}{\psi_n'(\varrho N_a)} - \frac{(\varrho N_a)\, \psi_n(\varrho N_a)\, \psi_n''(\varrho N_a)}{\psi_n'(\varrho N_a)^2} \right\}$$

und da das erste Glied in der geschweiften Klammer gegen die folgenden mit dem Faktor ϱ multiplicierten wegen $\varrho \gg 1$ vernachlässigt werden kann, wird

$$\mathfrak{A}_n^1 = N_a\, \Delta(\varrho N_a) \{\psi_n'(\varrho N_a)^2 - \psi_n(\varrho N_a)\, \psi_n''(\varrho N_a)\}$$

mit

$$\Delta(\varrho N_a) = -\varrho (N_a - N_i).$$

Ähnlich wird

$$\mathfrak{A}_n^2 = N_i\, \Delta(\varrho N_i) \{\psi_n''(\varrho N_i)\, \psi_n(\varrho N_i) - \psi_n'^2(\varrho N_i)\}$$

oder, da

$$\Delta(\varrho N_i) = -\Delta(\varrho N_a) = \varrho (N_i - N_a)$$

ist, so wird

$$\mathfrak{A}_n^1 = \mathfrak{A}_n^2 = N_a \cdot \varrho (N_a - N_i) \{\psi_n'^2(\varrho N_a) - \psi_n(\varrho N_a)\, \psi_n''(\varrho N_a)\}$$

Die bei Debye geführten Beweise, daß im Falle $\varrho \gg 1$ statt der unendlichen Summe

$$D = \frac{\pi}{k^2}\, \Re e \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(A_n^1 + A_n^2)$$

die endliche

$$D = \frac{\pi}{k^2}\, \Re e \sum_{n=1}^{\varrho N_a} (2n+1)(A_n^1 + A_n^2)$$

tritt, sind auch hier wie im Fall c) heranzuziehen. So ergibt sich also

$$D = 2 \cdot \frac{\pi}{k^2} \cdot \sum_{1}^{\varrho N_a} (2n+1)\, a_n^{\;1},$$

oder da

$$\mathfrak{A}_n^{1^2} \ll 1, \qquad a_n^{\;1} = \frac{\mathfrak{A}_n^{1^2}}{1 + \mathfrak{A}_n^{1^2}} = \mathfrak{A}_n^{1^2},$$

$$D = 2 \cdot \frac{\pi}{k^2} \cdot \sum_{1}^{\varrho N_a} (2n+1)\, \mathfrak{A}_n^{1^2}.$$

Es ist aber nach der Differentialgleichung für $\psi_n(\varrho N_a)$

$$\psi''_n(\varrho N_a) = \left(\frac{n(n+1)}{(\varrho N_a)^2} - 1\right) \psi_n(\varrho N_a)$$

und nach den Debyeschen Entwicklungen

$$\psi_n(\varrho N_a) = \frac{\cos\left(\varrho f_0 - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\sin \tau_0}}.$$

$$\psi_n{}'(\varrho N_a) = \cos\left(\varrho f_0 + \frac{\pi}{4}\right) \sqrt{\sin \tau_0}\,.$$

mithin

$$\begin{aligned} |\mathfrak{A}_n^{\;1}| &= N_a \cdot \varrho (N_i - N_a) \left\{ \psi'^{\,2}_n(\varrho N_a) - \psi_n^{\;2}(\varrho N_a) \left(\frac{n(n+1)}{(\varrho N_a)} - 1\right)\right\} \\ &= \frac{N_a\, \varrho (N_i - N_a)}{\sin \tau_0} \left\{ \cos^2\left(\varrho f_0 N_a + \frac{\pi}{4}\right) \sin^2 \tau_0 \right. \\ &\qquad \left. - \cos^2\left(\varrho N_a f_0 - \frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{n(n+1)}{(\varrho N_a)^2} - 1\right)\right\} \end{aligned}$$

mit der gleichen Bedeutung der hier eingesetzten Größen wie im Falle c). Da nun ferner

$$\cos^2\left(\varrho f_0 N_a + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left\{1 - 2 \sin(\varrho f_0 N_a) \cos(\varrho f_0 N_a)\right\}$$

$$\cos^2\left(\varrho f_0 N_a - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left\{1 + 2 \sin(\varrho f_0 N_a) \cos(\varrho f_0 N_a)\right\}$$

so wird

$$\begin{aligned} |\mathfrak{A}_n^{\;1}| &= \frac{N_a \cdot \varrho (N_i - N_a)}{2 \sin \tau_0} \left\{ \sin^2 \tau_0 \left(\frac{n(n+1)}{(\varrho N_a)} - 1\right) \right. \\ &\qquad \left. - 2 \sin(\varrho f_0 N_a) \cos(\varrho f_0 N_a) \cdot \left[\sin^2 \tau_0 + \frac{n(n+1)}{(\varrho N_a)^2} - 1\right]\right\} \\ &= \frac{N_a\, \varrho (N_i - N_a)}{2 \sin \tau_0} \left\{ 1 - \left(\frac{n + \frac{1}{2}}{(\varrho N_a)}\right)^2 - \frac{n^2 + n}{(\varrho N_a)} + 1 \right. \\ &\qquad \left. - 2 \sin(\varrho f_0 N_a) \cos(\varrho f_0 N_a) \cdot \left[1 - \left(\frac{n + \frac{1}{2}}{\varrho N_a}\right)^2 + \frac{n^2 + n}{(\varrho N_a)^2} - 1\right]\right\} \end{aligned}$$

$$|\mathfrak{A}_n^i|^2 = \frac{N_a\,\varrho\,(N_i - N_a)}{2\sin\tau_0}\,2\sin^2\tau_0 = N_a\cdot\varrho\cdot(N_i - N_a)\sin\tau_0\,,$$

und

$$\begin{aligned} D &= 2\,\frac{\pi}{k^2}\sum_{1}^{\varrho N_a}{}_{n}(2n+1)\,N_a^{\,2}\cdot\varrho^2(N_i - N_a)^2\sin^2\tau_0 \\ &= 4\,\frac{\pi}{k^2}\,N_a^{\,2}\,\varrho^2(N_i - N_a)^2\sum_{1}^{\varrho N_a}{}_{n}\left(n+\frac{1}{2}\right)\sin^2\tau_0 \\ &= -\,4\,\frac{\pi}{k^2}\,N_a^{\,2}\cdot\varrho^2(N_i - N_a)^2\,(\varrho N_a)^2\sum_{1}^{\varrho N_a}{}_{n}\cos\tau_0\sin^3\tau_0\,\Delta\tau_0\,, \end{aligned}$$

da

$$\sin\tau_0\,\Delta\tau_0 = -\,\frac{1}{\varrho N_a}$$

$$\cos\tau_0 = \frac{n+\frac{1}{2}}{\varrho N_a}$$

ist. Damit nimmt D den Wert an:

$$D = 4\,\frac{\pi}{k^2}\,(N_a\cdot\varrho)^4\cdot(N_i - N_a^{\,2})\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\tau_0\sin^3\tau_0\,d\tau_0\,,$$

indem man statt der Summe das Integral schreibt und dadurch Größen höherer Ordnung vernachlässigt, also

$$\text{(b)}\qquad \begin{aligned} D &= \frac{\pi}{k^2}\cdot(N_a\cdot\varrho)^4\cdot(N_i - N_a)^2 \\ &= \frac{4\,\pi^3\cdot a^4}{\lambda^2}\cdot N_a^{\,2}\cdot(N_i - N_a)^2. \end{aligned}$$

Diskussion der Lösungen.

Wir stellen die drei resultierenden Strahlungsgesetze nochmals zusammen:

(a) $\varrho s \ll \varrho \ll 1$ $\qquad D = \frac{16}{27}\cdot\pi a^2\cdot\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^4\cdot N_a^{\,2}\cdot(N_a - N_i)^2,$

(b) $\varrho s \ll 1 \ll \varrho$ $\qquad D = \pi a^2\cdot\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2\cdot N_a^{\,2}(N_a - N_i)^2,$

(c) $1 \ll \varrho s \ll \varrho$ $\qquad D = \pi a^2.$

Es lassen sich also auch im Falle b) großer Kugeln bei fast gleichen Brechungsindices von Kugelmaterial und äußerem Medium Farbenerscheinungen erwarten, ähnlich dem Rayleighschen Falle. Die Beobachtung dieser Erscheinungen und die experimentelle Bestätigung der Theorie wird durch den Umstand erschwert, daß die Bedingung $N_a - N_i = 0$ stets nur für eine einzige Farbe erfüllt ist, da ja N_a und N_i ihrerseits wiederum Funktionen der Wellenlänge sind. Hauptsächlich auf letzterem Umstande beruhen wohl die schönen Farbenerscheinungen, die man an Strahlungsfiltern beobachtet, wie sie zuerst von Christiansen[1]) und auch von Rayleigh angegeben sind, bei denen fein zerriebene Steinsalzkristalle in einer dem Steinsalzbrechungsexponenten angeglichenen Mischung von Schwefelkohlenstoff und Benzol suspendiert sind. Immerhin spricht die Bevorzugung der blauen Farbe im diffusen Licht und des Rots im durchgehenden Strahl als experimentell feststellbare Erscheinung dafür, daß man auch in diesem Fall unregelmäßiger Körper von keineswegs Kugelgestalt mit ähnlichen theoretischen Ergebnissen wie in unserem Falle der Kugeln zu rechnen hat.

Wir haben einen Versuch mit einer Glaskugel (Durchmesser 0,5 cm, Brechungsexponent 1,58) gemacht, die wir in einer Mischung von Benzol und Schwefelkohlenstoff aufhängten und erhielten sehr schöne farbige Erscheinungen. Wir beobachteten im durchfallenden weißen Licht, also denjenigen Anteil, welcher durch Streuung dem auffallenden weißen Lichte verloren gegangen war. Waren $N_i - N_a$ noch wesentlich von Null verschieden, so erschien die Kugel schwarz, ließ also keinerlei Licht hindurch, zerstreute vielmehr alles diffus. Näherte sich die Differenz $N_i - N_a$ der Null und zwar jeweils für eine Farbe (Dispersion), so trat gerade diese Farbe in der Durchsicht auf und die diffuse Strahlung für diese Farbe war gleich Null. Ferner war die Bevorzugung der langwelligen Farbe im durchgehenden Licht, entsprechend dem Faktor $1/\lambda^2$ deutlich zu erkennen: Im durchgehenden Licht beobachtet waren die langwelligen Farben jeweils sehr viel kräftiger als die blau-violette Seite des Spektrums. Immerhin müßte zur exakten Prüfung des in der Formel auftretenden Faktors

$$\frac{1}{\lambda^2}(N_i - N_a)^2 \quad \text{mit} \quad N_i = \varphi_1(\lambda), \quad N_a = \varphi_2(\lambda)$$

---

[1]) C. Christiansen, Wied. Ann. 23. S. 298 u. 439. 1885.

eine genaue Intensitätsmessung der spektralen Anteile erfolgen, die wir bisher unterlassen haben.

Hr. Prof. Gerlach machte mich auf die Christiansenschen Farbfilter aufmerksam, was mich zu dieser speziellen Untersuchung veranlaßte. Ihm sowohl, wie meinem hochverehrten Lehrer Hrn. Prof. Sommerfeld, der mich durch mancherlei Ratschläge auch bei dieser Arbeit förderte, möchte ich meinen herzlichsten Dank aussprechen. Auch Hrn. Dr. Hausser, Wernerwerk M. Siemens & Halske, danke ich herzlichst dafür, daß er mir in zuvorkommender Weise die Mittel seines Laboratoriums zur Verfügung stellte.

(Eingegangen am 30. Juni 1925.)

3. *Über die Röntgenstrahlinterferenzen an Mischkristallen;*

von M. v. Laue.

I. In der Diskussion über die Atomanordnung in Mischkristallen tritt G. Tammann[1]) auf Grund seiner Versuche über die Resistenzgrenzen und einer anschaulichen, molekulartheoretisch-geometrischen Deutung dieser Ergebnisse für eine gesetzmäßige Verteilung im Raumgitter ein. Im Gegensatz dazu steht einmal die struktur-theoretische Schwierigkeit, bei beliebigem Mischungsverhältnis eine regelmäßige Anordnung auszudenken, welche weder zu unglaubhaft großen Elementarbereichen noch zum Widerspruch mit der Kristallsymmetrie führt, sodann das Ergebnis aller einschlägigen Untersuchungen mit Röntgenstrahlen[2]), welche die von der Vergrößerung der Perioden im Raumgitter einer solchen regelmäßigen Anordnung zu erwartenden Interferenzpunkte nicht zeigen. Vielmehr ist das Röntgendiagramm genau so, als wären im Raumgitter des Mischkristalls alle Punkte gleichmäßig besetzt, was sich nach der ausführlich vom Verfasser entwickelten Theorie[3]) dahin deuten läßt, daß die Verteilung der sich im Mischkristall gegenseitig ersetzenden Atome über die in Betracht kommenden Raumgitterplätze rein durch Zufall geregelt ist. Die Möglichkeit dieser Deutung der Interferenzversuche wird, soweit uns bekannt, auch von den Verfechtern der regelmäßigen Anordnung nicht bestritten. Wohl aber sucht Tammann[4]) neuerdings die Beweiskraft dieser Versuche durch die Bemerkung herabzusetzen, daß schon geringe Abweichungen von einer gesetzmäßigen Verteilung im Röntgendiagramm den Anschein einer vollkommenen Unordnung hervorrufen müßten. Dem gegenüber möchten wir die früheren Ausführungen hier ergänzen. Es wäre ja in der Tat möglich, daß bei der Herstellung der bisher untersuchten Mischkristalle infolge nicht ausreichenden „Temperns" oder wegen anderer Unvollkommenheiten die von der Natur vielleicht angestrebte gesetzmäßige Verteilung nicht ganz erreicht wäre.

---

[1]) G. Tammann, Ztschr. f. anorg. u. allg. Chem. 107. S. 1. 1919.

[2]) L. Vegard u. H. Schjelderup, Phys. Ztschr. 18. S. 93. 1917; Ergebnisse derselben Art von Scherrer u. Wever führt Tammann an, vgl. Anm. 4.

[3]) M. v. Laue, Ann. d. Phys. 56. S. 497. 1918.

[4]) G. Tammann, Ann. d. Phys. 75. S. 212. 1924.

Da es hierbei mehr auf die Prüfung des allgemeinen Gedankens als auf die genaue Übereinstimmung mit einem vorkommenden Fall ankommt, und um nicht der erwähnten strukturtheoretischen Schwierigkeit zu verfallen, wollen wir ein einfaches kubisches Raumgitter von der Gitterkonstanten a annehmen, über dessen Eckpunkte zwei verschiedene, in gleicher Anzahl vorhandene Atomarten zu verteilen sind.[1]) Wir nehmen ferner an, die Natur suche den Zustand herzustellen, bei welchem längs jeder vierzähligen Achse die Atomarten regelmäßig abwechseln, so daß im Gitterpunkt

$$x_1 = m_1 a, \quad x_2 = m_2 a, \quad x_3 = m_3 a$$

ein Atom erster Art sitzen sollte, falls

$$m = m_1 + m_2 + m_3 \tag{1}$$

eine gerade Zahl ist, sonst ein Atom der zweiten Art. Wir könnten diese Lagerung auch als ein Gitter vom NaCl-Typus und der Konstanten $2a$ beschreiben. Doch soll dieser Zustand nicht ganz erreicht sein. Vielmehr sei die Wahrscheinlichkeit, im genannten Gitterpunkt ein Atom erster Art anzutreffen,

$$p_{m1} = \tfrac{1}{2}\left(1 + \lambda(-1)^m\right), \tag{2}$$

wobei die Konstante λ zwischen 0 und $+1$ liegen soll; die Wahrscheinlichkeit, daß dort ein Atom zweiter Art liegt, ist dementsprechend

$$p_{m2} = \tfrac{1}{2}\left(1 - \lambda(-1)^m\right). \tag{3}$$

Vollständiger Regelmäßigkeit entspricht der Wert $\lambda = 1$, vollständiger Ungeordnetheit $\lambda = 0$.

---

[1]) Daß die Gitter-„konstante" beim Mischkristall mit hinreichender Genauigkeit konstant ist, ist wohl noch nicht sichergestellt. Wir brauchen auf den Einfluß eines schwankenden Atomabstandes hier aber nicht einzugehen, da auch **Tammann** mit der Vorstellung genau konstanten Abstandes arbeitet.

Der Kristall bilde ein Rechteck mit den Seiten $2M_1 a$, $2M_2 a$, $2M_3 a$. Er sei so dünn, daß man ihn als von der einfallenden Röntgenwelle gleichmäßig durchstrahlt betrachten kann; diese Voraussetzung ist zwar in Wirklichkeit niemals streng erfüllt, trifft aber auf jeden einheitlichen Teil des von Darwin[1]) betrachteten „Mosaik-Kristalls“ mit hinreichender Genauigkeit zu und gibt selbst bei größeren einheitlichen Kristallen die Lage der Interferenzpunkte sehr gut, ihre Intensität mindestens qualitativ richtig wieder.[2]) Für die Intensität der bei einer genau definierten Atomverteilung in einer bestimmten Richtung abgebeugten Welle finden wir dann, wie in Gleichung (2) der früheren Arbeit[3]) und mit den dort benutzten Bezeichnungen:

$$(4)\quad I = \sum_m \sum_n \Phi_{m_1 m_2 m_3} \bar{\Phi}_{n_1 n_2 n_3} e^{i[(m_1 - n_1)A_1 + (m_2 - n_2)A_2 + (m_3 - n_3)A_3]}.$$

$\Phi_{m_1 m_2 m_3}$ ist die kennzeichnende Beugungsfunktion für das im Punkt $m_1 \ldots$ befindliche Atom; mit der Wahrscheinlichkeit p_{m_1} ist sie gleich ψ_1, mit der Wahrscheinlichkeit p_{m_2} gleich ψ_2; entsprechendes gilt für $\Phi_{n_1 n_2 n_3}$, die zu dem im allgemeinen komplexen $\Phi_{n_1 n_2 n_3}$ konjugierten Größe. Von der Intensität I haben wir nun den Mittelwert (die mathematische Hoffnung) $\bar{I}$ zu bilden.

Auch darin können wir zunächst noch dem Gange der der früheren Untersuchung folgen. Wir sondern aus der 6fachen Summe in (4) die Glieder ab, für welche zugleich $m_1 = n_1$, $m_2 = n_2$, $m_3 = n_3$ ist. Geben wir dem Rest der 6fachen Summe zur Unterscheidung einen Strich, so finden wir aus (4):

$$(5)\quad \begin{cases} I = \sum_m |\Phi_{m_1 m_2 m_3}|^2 \\ \quad + \sum_m \sum_n{}' \Phi_{m_1 m_2 m_3} \bar{\Phi}_{n_1 n_2 n_3} e^{i[(m_1 - n_1)A_1 + (m_2 - n_2)A_2 + (m_3 - n_3)A_3]}. \end{cases}$$

Bilden wir hier Glied für Glied die mathematische Hoffnung, so ergibt ein Summand der ersten, dreifachen Summe den Betrag $(p_{m_1}|\psi_1|^2 + p_{m_2}|\psi_2|^2) = \frac{1}{2}[|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \lambda(-1)^m(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2)]$.

---

1) C. G. Darwin, Phil. Mag. 43. S. 800. 1922.

2) Vgl. P. P. Ewald, Ann. d. Phys. 49. S. 1 u. 117. 1916.

3) Ann. d. Phys. 56. S. 500. 1918.

Bei der Addition aller $8 M_1 M_2 M_3$-Glieder dieser Summe hebt sich der Term mit λ fort, da er gleich oft positiv und negativ auftritt. Also ist[1])

$$m H \left(\sum |\Phi_{m_1 m_2 m_3}|^2\right) = 4 M_1 M_2 M_3 (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2). \tag{6}$$

Bei der 6fachen Summe in (5) ist zu bedenken, daß wegen der Unabhängigkeit der für die Gitterplätze $m_1 \dots$ und $n_1 \dots$ geltenden Wahrscheinlichkeitsgesetze

$$m H(\Phi_{m_1 m_2 m_3} \cdot \bar{\Phi}_{n_1 n_2 n_3}) = m H(\Phi_{m_1 m_2 m_3}) \times m H(\bar{\Phi}_{n_1 n_2 n_3})$$

ist. Weiter ist nach (2) und (3)

$$\begin{aligned} m H(\Phi_{m_1 m_2 m_3}) &= p_{m_1} \psi_1 + p_{m_2} \psi_2 \\ &= \tfrac{1}{2}[(\psi_1 + \psi_2) + \lambda(-1)^m (\psi_1 - \psi_2)]. \end{aligned}$$

Die mathematische Hoffnung jener 6fachen Summe ergibt sich somit durch Addition der 4 Summen:

$$\tag{7} \left\{ \begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{4}|\psi_1 + \psi_2|^2 \sum_m \sum_n{}' e^{i[(m_1 - n)_1 A_1 + \dots]} \\ S_2 &= \frac{\lambda^2}{4}|\psi_1 - \psi_2|^2 \sum_m \sum_n{}' (-1)^{m-n} \cdot e^{i[(m_1 - n_1) A_1 + \dots]} \\ S_3 &= \frac{\lambda}{4}(\psi_1 - \psi_2)(\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2) \sum_m \sum_n{}' (-1)^m e^{i[\dots]} \\ S_4 &= \frac{\lambda}{4}(\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2)(\psi_1 + \psi_2) \sum_m \sum_n{}' (-1)^n e^{i[\dots]} \end{aligned} \right.$$

Die mathematische Hoffnung der Intensität ist somit:

$$\bar{\bar{I}} = 4 M_1 M_2 M_3 (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) + S_1 + S_2 + S_3 + S_4. \tag{8}$$

Zur Auswertung von $S_1 \dots S_4$ fügen wir den in ihnen auftretenden Summen $\sum\limits_m \sum\limits_n{}'$ die $8 M_1 M_2 M_3$-Glieder hinzu, für welche $m_i = n_i$ ist, und ergänzen sie so zu den Summen $\sum\limits_m \sum\limits_n$. Den Gesamtbetrag der hinzugefügten Summanden müssen wir dann wieder abziehen. So erhalten wir:

---

[1]) $m H$ bedeutet die mathematische Hoffnung.

$$S_1 = \frac{1}{4}\,|\psi_1 + \psi_2|^2$$
$$\left(\frac{\sin^2 M_1 A_1}{\sin^2 \frac{1}{2} A_1} \cdot \frac{\sin^2 M_2 A_2}{\sin^2 \frac{1}{2} A_2} \cdot \frac{\sin^2 M_3 A_3}{\sin^2 \frac{1}{2} A_3} - 8\,M_1\,M_2\,M_3\right).$$

Die Maxima von S_1 liegen, wo

(9) $$A_i = 2\,h_i\,\pi,$$

entsprechen also den Interferenzpunkten, welche ein gleichmäßig besetztes, einfaches kubisches Gitter von der Konstanten a ergibt. Diese treten immer auf, wie groß auch λ sein mag, also auch bei vollständiger Ungeordnetheit, entsprechend dem Ergebnis unserer früheren Untersuchung. Für S_2 können wir schreiben:

$$S_2 = \frac{\lambda^2}{4}\,|\psi_1 - \psi_2|^2 \Big(\sum_m \sum_n e^{i[(m_1 - n_1(A_1+\pi)\dots]} - 8\,M_1\,M_2\,M_3\Big)$$
$$= \frac{\lambda^2}{4}\,|\psi_1 - \psi_2|^2$$
$$\left(\frac{\sin^2 M_1 (A_1 + \pi)}{\sin^2 \frac{1}{2}(A_1 + \pi)} \cdot \frac{\sin^2 M^2 (A_2 + \pi)}{\sin^2 \frac{1}{2}(A_2 + \pi)} \cdot \frac{\sin^2 M_3 (A_3 + \pi)}{\sin^2 \frac{1}{2}(A_3 + \pi)} - 8\,M_1\,M_2\,M_3\right).$$

Die Maxima dieses Ausdrucks sind durch die Gleichungen

$$A_i + \pi = 2\,h_i\,\pi$$

oder

(10) $$2\,A_i = 2\,(2\,h_i - 1)\,\pi$$

bestimmt. Da die A_i zu a proportional sind [vgl. Gleichung (1) der früheren Arbeit], so fallen sie mit denjenigen Interferenzpunkten eines kubischen Gitters von der Konstanten $2a$ zusammen, für welche die drei Ordnungszahlen ungerade sind. (Die Maxima desselben Gitters, für welche die drei Ordnungszahlen gerade sind, sind durch (9) bestimmt und fallen somit, wie bekannt, mit den Maxima des Gitters von der Konstanten a zusammen.)

Zur Auswertung von S_2 führen wir als Summationsbuchstaben statt m_1 und n_1

$$m_1' = m_1 + 1, \quad n_1' = n_1 + 1$$

ein. Dann wird

$$\sum_m \sum_n{}' (-1)^m e^{i[(m_1 - n_1)A_1 + \dots]} = -\sum_{m'} \sum_{n'}{}' (-1)^{m'} e^{i[(m_1' - n_1')A_1 + \dots]}.$$

Die beiden Summen unterscheiden sich in den Summationsgrenzen um die Beträge ± 1. Bezeichnet also R den Beitrag der beiden äußersten zur x_1-Achse senkrechten Netzebenen in unserem Kristallstück, so gilt

$$\sum_m \sum_n{}' (-1)^m e^{i[(m_1 - n_1)\varDelta_1 + \ldots]} = \sum_{m'} \sum_{n'} (-1)^{m'} e^{i[(m_1' - n_1')\varDelta_1 + \ldots]} + R.$$

Wir schließen daraus

$$S_3 = \frac{\lambda}{8}(\psi_1 - \psi_2)(\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2) \cdot R.$$

Da es aber bei der von einem einigermaßen großen Kristall zerstreuten Energie nicht auf Randwirkungen ankommt, ist S_3 und ebenso S_4 gegen S_1 und S_2 zu vernachlässigen. Aus Gleichung (8) wird somit:

$$\bar{\bar{I}} = 8 M_1 M_2 M_3 (|\psi_1^2| + |\psi_2|^2) + S_1 + S_2.$$

Gehen wir also von völliger Ungeordnetheit durch Vergrößerung des Parameters λ von 0 zu 1 zu strengster Regelmäßigkeit über, so treten zu dem anfangs allein vorhandenen Durchleuchtungsdiagramm des Gitters von den Konstanten a allmählich auch noch die Punkte des Diagramms für die Gitterkonstante 2a, durch welche sich beide Diagramme unterscheiden. (Die Maxima des Gitters mit der Konstanten $2a$, deren Ordnungszahlen teils gerade, teils ungerade sind, treten deshalb nicht auf, weil die Gitter im Fall vollkommener Ordnung, wie erwähnt, vom NaCl-Typus ist.) Da die Intensität dieser Punkte in unserer Rechnung zu λ^2 proportional ist, wird sich eine geringe Abweichung von der Ungeordnetheit sehr wenig bemerkbar machen. Bei dem etwa durch $\lambda = \frac{1}{2}$ gegebenen Ordnungsgerade und nicht zu wenig verschiedenem Streuvermögen der beiden Atomarten müßten diese Maxima aber wohl schon zur Beobachtung gelangen, obwohl dann nach (2) und (3) die Wahrscheinlichkeit, in einem bestimmten Gitterpunkt das der Regel entsprechende Atom zu finden, nur dreimal so groß ist, wie die Wahrscheinlichkeit des anderen Falles; denn ihre Intensität beträgt dann $\frac{1}{4}$ derjenigen, die sie bei vollständiger Ordnung hätten. Damit scheint uns Tammanns Einwand gegen die Deutung der Röntgendiagramme von Mischkristallen widerlegt. Wir möchten diesen eine um so größere Bedeutung für die Frage der Atomverteilung zuschreiben, als Tammanns Theorie der Schutzwirkung gegen chemische Angriffe, ganz abgesehen von der uns sehr überzeugend scheinenden Entgegnung von Borelius[1]), in ihren Grundlagen wohl weit mehr unsichere Annahmen enthält, als die Theorie der Röntgenstrahlinterferenzen.[2])

II. Wenn aber die Natur, wenigstens bei den bisher betrachteten Stoffen und Temperaturen, völlige Ungeordnetheit der sich vertretenden Atome anstrebt, so wäre es doch möglich, daß diese infolge von Mängeln der Herstellung bei den untersuchten Mischkristallen nicht ganz erreicht war, daß vielmehr in der Umgebung eines Atoms der ersten Art im allgemeinen mehr Atome gleicher Art lagen, als dem Mischungsverhältnis p_1/p_2 entspricht. Wir möchten bei dieser Gelegenheit die Frage aufwerfen, wie sich das im Röntgendiagramm zu erkennen geben müßte, und benutzen dazu, wie oben, die Vorstellung eines einfachen kubischen Gitters.

Unter dieser Voraussetzung ist die Wahrscheinlichkeit, im Gitterpunkt n_1, n_2, n_3 ein Atom erster Art anzutreffen, nicht mehr unabhängig von der Wahrscheinlichkeit, daß sich ein solches im Gitterpunkt m_1, m_2, m_3 vorfindet. Infolgedessen ist die früher[3]) und auch in der obigen Rechnung benutzte Beziehung

$$MH(\Phi_{m_1 m_2 m_3} \bar{\Phi}_{n_1 n_2 n_3}) = MH(\Phi_{m_1 m_2 m_3}) \times MH(\bar{\Phi}_{n_1 n_2 n_3})$$

abzuändern in eine Gleichung von der Form

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} & MH(\Phi_{m_1 m_2 m_3} \bar{\Phi}_{n_1 n_2 n_3}) \\ & \qquad = (1 + \varepsilon_{mn}) MH(\Phi_{m_1 m_2 m_3}) \times MH(\bar{\Phi}_{n_1 n_2 n_3}). \end{aligned} \right.$$

Die Zahl ε_{mn} ist dabei eine Funktion der absoluten Beträge von $(m_1 - n_1)$, $(m_2 - n_2)$, $(m_3 - n_3)$. Wir müssen annehmen, daß sie abnimmt, wenn diese Differenzen wachsen und nur dann von Null verschieden ist, solange diese mäßig große Zahlen

---

1) S. Borelius, Ann. d. Phys. 74. S. 216. 1924.

2) Die von Tammann erwähnte, von Wever aufgefundene Tatsache, daß Mischkristalle aus denselben Komponenten, aber verschiedenen Mischungsverhältnissen dasselbe Diagramm ergeben, läßt sich zwanglos dahin deuten, daß bei jedem der untersuchten Mischungsverhältnisse die Anordnung der Atome eine ungeordnete ist.

3) Vgl. Ann. d. Phys. 56. S. 501. 1918.

sind; im anderen Falle wären nämlich häufig so große Teile des Raumgitters mit Atomen derselben Art besetzt, daß man nicht verstände, wie sich trotzdem eine durch das Gitter einheitliche Gitterkonstante herausbildet.

Dagegen bleibt wegen der Gleichberechtigung aller Gitterpunkte die des weiteren benutzte Gleichung

$$MH(\Phi_{m_1 m_2 m_3}) = MH(\Phi_{n_1 n_2 n_3})$$

in Kraft. An die Stelle der Gleichung (6) daselbst tritt also:

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} \bar{\bar{I}} = 8 M_1 M_2 M_3 \{ & m H(|\Phi|^2)\} \\ & + (m H|\Phi|)^2 \Big[\sum_m \sum_n{}' e^{i[\dots]} + \sum_m \sum_n{}' \varepsilon_{mn} e^{i[\dots]}\Big]. \end{aligned} \right.$$

Der obigen Annahme, daß die Anwesenheit eines Atoms erster Art für die benachbarten Gitterpunkte die Wahrscheinlichkeit eines Atoms derselben Art vergrößert, entspräche es, ε_{mn} als stets positiv anzusehen; denn dann müßte sich $MH\,\Phi\cdot\Phi)$ von dem Produkt $MH(\Phi_{m_1 m_2 m_3}) \times MH(\bar{\Phi}_{n_1 n_2 n_3})$ in Richtung auf den größeren Wert $MH(|\Phi^2|)$ entfernen. Doch wollen wir im folgenden auch andere Fälle in Betracht ziehen.

Zur Diskussion der in (12) neu auftretenden zweiten Summe führen wir statt der n_i die $p_i = m_i - n_i$ als Summationsveränderliche ein; sie nehmen für jeden Wert der m_i dieselben ganzzahligen, positiven und negativen aber wegen der Voraussetzung über ε_{mn} stets mäßig große Werte an (der Wert Null bleibt ausgeschlossen). Führt man zuerst die Summation nach den p_i aus, so fügt die Summation nach m_i nur noch den Faktor $8 M_1 M_2 M_3$ hinzu. Die Summation nach den p_i aber ergibt den Interferenzeffekt einer sehr mäßigen Zahl von Wellen, also gewiß keine Interferenzmaxima, welche sich an Schärfe mit den gewohnten Maximis der Röntgeninterferenzen vergleichen können. Hat ε_{mn} für alle Werte seines Arguments dasselbe Vorzeichen, so liegen diese dort, wo $A_i = 2h_i\pi$ ist, bilden somit einen verwaschenen Untergrund der bei völliger Unordnung eintretenden scharfen Interferenzpunkte. Dagegen träten unter Umständen neue verwaschene Maxima dort auf, wo

$$A_i = (2h_i - 1)\pi,$$

wenn die Werte von s_{mn} teils positiv, teils negativ wären. Es fände sich also, wie nach Gleichung (10), spurenweise das Diagramm eines Gitters vom NaCl-Typus mit der Konstanten $2a$; anschaulich erklärt sich das dadurch, daß dann eine Abwechslung in der Besetzung nächst benachbarter Gitterpunkte häufiger wäre, als der ganz ungeordneten Verteilung entspricht.

Die Verwaschung aller dieser Maxima könnte sogar so weit gehen, daß sie gar nicht als *getrennte* Interferenzflecke, sondern durch weniger intensive breite Streifen miteinander verbunden erscheinen.

Ob etwas Derartiges auftritt, läßt sich nach den bisher veröffentlichten Beobachtungen wohl nicht mit Sicherheit entscheiden.

III. Wir haben früher und hier die Mittelwerte der bei den verschiedensten Atomlagerungen zu erwartenden Intensitäten berechnet. Um das Ergebnis mit der Erfahrung zu vergleichen, bedürfte es eigentlich noch einer Aussage über die Wahrscheinlichkeit der im Einzelfall von diesem Mittel auftretenden Abweichungen. Wenn wir meinen, daß solche Abweichungen nicht beobachtbar sind, können wir uns zunächst auf die Erfahrung berufen, welche keine Unterschiede zwischen dem Röntgendiagramm verschiedener Exemplare desselben Mischkristalls ergeben hat; aber vielleicht sind diese Beobachtungen noch nicht hinreichend zahlreich und sicher. Theoretisch aber läßt sich sagen, daß niemals ein einziges vollkommen einheitliches Raumgitter durchstrahlt wird. Das ist beim Debye-Scherrer-Verfahren und ähnlichen Methoden selbstverständlich. Aber auch wenn man einen einzelnen größeren Kristall untersucht, so besteht er fast stets aus vielen, nicht ganz regelmäßig zusammengesetzten Raumgitterpartien (Mosaik-Kristallen). Es addieren sich somit stets die Interferenzbilder vieler Gitter in ihrer Intensität, und somit ist das Intensitätsmittel auch die bei der einzelnen Beobachtung zu erwartende Intensität.

Außerdem sei bemerkt: Alles hier gesagte bezieht sich nur auf solche Mischkristalle, bei welchen sich zwei verschiedene Atomarten im Raumgitter gegenseitig vertreten. Es gibt wohl auch Fälle kristallinischer Mischungen, in denen der eine Bestandteil gar nicht in das Raumgitter eintritt, wie z. B. bei der von Yamada röntgenographisch untersuchten Okklusion von Wasserstoff in Palladium.[1]) Diese fallen aus dem Bereich unserer Untersuchung heraus.

Zusatz bei der Korrektur: Tammann führt als Gegenbeispiel zu den Ergebnissen von Vegard und Schjelderup eine Bemerkung von E. C. Bain[2]) an, welcher bei Gold-Kupfermischungen im Atomverhältnis 1 : 3 die Interferenzen schwach gesehen haben will, die einer Verdoppelung der Gitterkonstanten entsprechen. Das scheint freilich nicht ganz zu stimmen, denn später deutet derselbe Autor diese schwachen, nur bei dem genannten Mischungsverhältnis auftretenden Linien dahin, daß in einem kubischen Gitter die Atome der einen Art die Würfelecken, die der anderen die drei Seitenmitten einnehmen.[3]) Wie dem aber auch sein mag, es erscheint durchaus als möglich, daß bei gewissen rationalen Mischungsverhältnissen sich chemische Verbindungen bilden, in denen die Atome gesetzmäßig verteilt sind; nur sind das dann eigentlich keine Mischkristalle mehr.

---

1) M. Yamada, Phil. Mag. 45. S. 241. 1923.

2) E. C. Bain, Chemical and metallurgical engineering 26. S. 655. 1922.

3) E. C. Bain, ebenda 28. S. 65. 1923.

(Eingegangen 30. Juli 1923.)

4. *Untersuchung von Kolloidpartikeln in Wechselfeldern verschiedener Frequenzen;*

von Otto Blüh.

(Aus dem Institut für theoretische Physik der Deutschen Universität
in Prag.)

§ 1.

Im Anschlusse an die Arbeit von Cotton und Mouton[1]), welche zuerst die oszillierende Bewegung von ultramikroskopischen Partikeln eines Silberhydrosols beobachtet hatten, sind eine Reihe von Arbeiten erschienen, welche diese Bewegungsart zu benutzen verstanden; keine jedoch, welche in direktem Anschlusse an die erwähnte Beobachtung es unternommen hätte, die Erscheinung quantitativ zu verfolgen. Svedberg und Andersson[2]) haben bei Kataphoreseversuchen im Zusammenhang mit den Cottonschen und Moutonschen Versuchen mit Absicht keinen richtigen Wechselstrom, sondern vielmehr positive und negative Ströme verwendet, welche mit Hilfe eines besonderen Kommutators, immer getrennt durch kurze stromlose Intervalle, erzeugt wurden. Die Wirkung solcher aufeinanderfolgender Stromstöße ist im wesentlichen dieselbe wie die eines normalen Wechselstromes. In Gasen wurden ziemlich häufig kleine Partikel im Wechselfeld untersucht; so von Frl. Snethlage[3]), Shewhart[4]), Abbot[5]), Fürth[6]) und in letzter Zeit von Yü Chen Yang.[7]) Der Zweck dieser

---

[1]) A. Cotton u. E. Mouton, Compt. rend. 138. S. 1584. 1692. 1904.

[2]) T. Svedberg u. A. Andersson, Kolloidztschr. 24. S. 156. 1919.

[3]) A. Snethlage, Proc. Amst. Acad. 19. S. 1006. 1917.

[4]) W. A. Shewhart, Phys. Rev. 9. S. 425. 1917.

[5]) R. B. Abott, Phys. Rev. 11. S. 381. 1918.

[6]) R. Fürth, Ann. d. Phys. 63. S. 521. 1920.

[7]) Yü Chen Yang, Ann. d. Phys. 76. S. 333. 1925.

Arbeiten bestand darin, die Gültigkeit der fundamentalen Gleichung

$$v = B \cdot K, \tag{1}$$

wo B die Beweglichkeit des Teilchens und v seine Geschwindigkeit unter dem Einflusse der Kraft K bedeutet, zu überprüfen. Für Teilchen in Gasen ist die Gleichung nunmehr bis zu Geschwindigkeiten von rund 25 cm/sec als gültig gefunden worden. Das Prinzip der Messungen bestand immer darin, das elektrisch geladene Partikel in ein Wechselfeld zu bringen; einem solchen Feld ausgesetzt, macht das Teilchen eine oszillierende Bewegung im Rhythmus der Periode des Feldes mit und erscheint dem Beobachter als Linie mit deutlich hervortretenden Endpunkten. Durch Variation der Spannung bei gleichbleibender Frequenz kann man die Amplitude der Teilchenschwingung verändern und diese Veränderung mit der Spannungsänderung in Beziehung bringen. Und zwar soll, wenn die Beweglichkeit zumindest in einem bestimmten Geschwindigkeitsbereich eine geschwindigkeitsunabhängige Größe ist, das Verhältnis von Amplitude und Spannung konstant sein.

Diese Arbeit schließt insofern direkt an die Untersuchungen von Cotton und Mouton[1]) an, indem die Untersuchung gleichfalls an einem Silberhydrosol vorgenommen wurde. Für *ein* flüssiges Kolloid ist die Prüfung von Formel (1) nach der für Partikel in Gasen schon so häufig angewandten Methode noch nicht vorgenommen worden. Denn eine Variation der Spannung ist bei Flüssigkeitskolloiden nur in sehr engen Grenzen möglich. Größere Spannungen haben unvermeidlich größere Erwärmungen im Gefolge und damit zusammenhängend Strömungen im Kolloid, welche eine Beobachtung allzu schwierig erscheinen lassen. Wir können uns aber die Frage vorlegen, wie die Beweglichkeit eines Teilchens sich gegenüber Änderungen der Frequenz der Wechselspannung verhält. Es wird also dabei nicht beabsichtigt, dem Teilchen eine recht große mittlere Geschwindigkeit zu erteilen, wie man sie erreichen kann, indem man es in der Sekunde einen bestimmten Weg recht oft

---

1) A. Cotton u. E. Mouton, a. a. O.

zurücklegen läßt, sondern vielmehr zu erreichen gestrebt, dem Teilchen pro Sekunde recht viele Richtungsänderungen aufzuzwingen.

Ein in Brownscher Bewegung befindliches Teilchen erfährt pro Zeiteinheit bekanntlich weit mehr Beschleunigungen, als wir wahrzunehmen imstande sind; diese Beschleunigungen wirken fortwährend in anderer Richtung und die sichtbare Bewegung des Teilchens ist nur ein Gesamteffekt derselben. In der Einsteinschen Formel für den Diffusionskoeffizienten wird angenommen, daß die Bewegung des Teilchens als Resultat der ungeordneten Bewegung anzusehen ist, welchen das Teilchen nach der molekularkinetischen Theorie der Wärmebewegung unterworfen ist. In der Beziehung¹)

$$D = \frac{RT}{N} \cdot B \tag{2}$$

wird B einfach für kugelige Teilchen aus dem Stokesschen Gesetz genommen. $\left(B = \frac{1}{6\pi\eta a}\right)$. Das Stokessche Gesetz gilt aber nur für gleichförmige Bewegungen und es fragt sich nun, ob es auch noch anwendbar ist, wenn ein Partikel ständigen Beschleunigungen unterworfen ist, wie es bei der Brownschen Bewegung der Fall ist. Aus dieser wird ja oft die Beweglichkeit bestimmt; es ist aber nicht selbstverständlich, ob die so bestimmte Beweglichkeit mit der aus einer gleichförmigen Bewegung bestimmten übereinstimmt.

Bei der Beobachtung von Partikeln in Gasen liegen die Verhältnisse einfacher als bei Flüssigkeiten. Denn das Gas als Nichtleiter erfordert keine Annahmen über die an den Grenzflächen Partikel umgebendes Medium auftretenden Potentialdifferenzen wie bei einem verhältnismäßig gut leitenden Kolloid. Die kataphoretische Wanderungsgeschwindigkeit von Partikeln ist nach der Helmholtz-Smoluchowskischen Doppelschichttheorie

$$u = \frac{\varphi \cdot \varepsilon \cdot A}{4\pi\eta}, \tag{3}$$

wobei φ das Potential der als Kondensator gedachten Doppel-

---

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17, S. 549, 1905.

schicht, ε die Dielektrizitätskonstante, A die elektromotorische Kraft und η den Reibungskoeffizienten bedeutet. Für die in der sogleich aufgestellten Bewegungsgleichung für ein elektrisch geladenes Teilchen im Wechselfeld im Reibungsglied auftretende Beweglichkeit B soll keine Annahme gemacht werden; die Verschiedenheit in den Ausdrücken für die Beweglichkeit des Teilchens, je nachdem, ob man einen Einfluß der Umgebung berücksichtigt oder nicht, kann sich überdies nur in der Veränderung des Zahlenfaktors im Nenner und durch Hinzufügung oder Weglassung konstanter Größen äußern.

Die Bewegungsgleichung, welche uns nun den Zusammenhang zwischen der meßbaren Amplitude der Teilchenschwingung H im Wechselfeld und der Frequenz ν des Feldes durch Integration liefern soll, ist die folgende:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{B}\cdot\frac{dx}{dt} + A\cdot\sin 2\pi\nu t. \tag{4}$$

Dabei bedeutet außer den schon bekannten Größen B und ν m die Masse des Teilchens und A die Amplitude der elektrischen Feldkraft. Die Amplitude der Partikelschwingung ergibt sich als:

$$H = \frac{A}{2\pi\nu m\sqrt{(2\pi\nu)^2 + \frac{1}{m^2B^2}}}; \tag{5}$$

$(2\pi\nu)^2$ ist gegen $\frac{1}{m^2B^2}$ zu vernachlässigen, so daß Gleichung (5) in die einfachere Form

$$H = A\cdot\frac{B}{2\pi\nu} \tag{6}$$

übergeht. Sicher ist A für ein und dasselbe Partikel der effektiven am Voltmeter ablesbaren Spannung V proportional:

$$A = k\cdot V. \tag{7}$$

Schreiben wir Gleichung (6) in der Form

$$H\cdot\nu = k\cdot V\cdot\frac{B}{2\pi}, \tag{6a}$$

so sehen wir, daß das Produkt aus der Amplitude der Teilchenschwingung und der Frequenz des Feldes eine Konstante sein muß:

$$H \cdot \nu = \text{konst.} \tag{8}$$

sobald die Beweglichkeit B für Veränderungen der Frequenz ν unempfindlich ist, da Formel (6a) sonst nur mehr konstante Werte enthält.

§ 2.

Wie schon oben erwähnt, kamen die Teilchen eines Silberhydrosols zur Untersuchung. Das Kolloid wurde immer möglichst frisch nach der Bredigschen Methode durch Zerstäubung im Gleichstromlichtbogen zwischen Silberelektroden bereitet. Es hatte im durchfallenden Licht eine gelbe, schwach braune Färbung. Von den Teilchen aller Farben, d. h. aller Größen welche es enthielt, wurden nur die gelben und grünen, nicht mehr die grünblauen und blauen untersucht, weil die starke Brownsche Bewegung der letzteren der Beobachtung hinderlich war.

Da es notwendig schien, das Teilchen eine verhältnismäßig lange Zeit im Gesichtsfeld zu behalten, um es verschieden frequenten Wechselspannungen aussetzen zu können, so mußte dafür gesorgt werden, Strömungen möglichst zu vermeiden. Bei der im folgenden beschriebenen Untersuchungskammer, in welche eine kleine Menge des Sols gebracht wurde, sind Strömungen, deren Ursache in der Erwärmung durch den Stromdurchgang liegen, sicher vermieden worden. (Es wird später gezeigt werden, daß bei unserer Anordnung auch elektroosmotische Bewegung des Wassers nicht eintrat.) Am geeignetesten zeigte sich die zum Kardioidultramikroskop von Zeiss gehörige Quarzglaskammer. Nur mußte dieselbe so eingerichtet werden, daß man mit der Spannung an das Kolloid herankommt. Zu diesem Zwecke wurde das Deckglas erst vollständig kalt versilbert und zwar so, daß nicht nur die beiden Kreisflächen, sondern auch der Rand metallisch überzogen war. Dann wurden mit verdünnter Salpetersäure einige Flächen weggeätzt, so daß auf jeder Seite des Deckglases zwei miteinander nicht in Berührung stehende Partien übrig blieben, von welchen je zwei übereinander befindliche durch den an diesen Stellen stehengebliebenen metallischen

Rand leitend verbunden waren (Fig. 1). Es wurden mehrere etwa 0,5 mm starke, aus gewöhnlichem Glas bestehende Deckgläschen hergestellt, von welchen jedes einen anderen Elektrodenabstand hatte. Auf den in der Fig. 2 sichtbaren unteren Teil der Kammer wurde ein Tropfen des Kolloids gebracht und das Deckglas darauf gedrückt. Zwischen den beiden Gläsern ist im Mittelteil normalerweise ein Abstand von 0,002 mm; durch die Versilberung des Deckglases wurde diese Distanz etwas vergrößert und betrug immer etwa 0,006 mm.

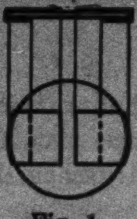


Fig. 1.

Da der aus Metall bestehende, zur Zeissschen Kammer gehörige Halter nicht verwendbar war, wurde ein solcher aus Hartgummi hergestellt, der aus zwei Teilen bestand (Fig. 2). Teil *A* hatte einen niedrigen Rand, auf welchem zwei Türmchen T_1 und T_2 saßen. (Aber nicht wie in der Zeichnung um 180° gegeneinander versetzt, sondern in geringer Entfernung voneinander, wie man auch aus Fig. 3 ersehen kann.) *A* hat eine etwa 2,4 cm starke Bohrung, so daß die Kammer genau hineinpaßt; die Kammer ruht mit ihrem unteren Rand auf dem etwas vorstehenden Rand eines Messingrings *R*, welcher an der Unterseite von *A* angebracht ist. In die Bohrung von *A* paßte auch gerade das Stück *B* hinein. In den unteren

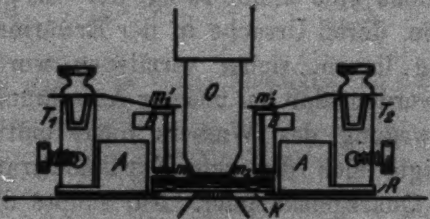


Fig. 2.

Rand von *B* waren zwei Metallstreifen m_1 und m_2 genau eingelassen; sie standen durch je einen Draht mit den auf der Oberseite von *B* befestigten Metallplättchen m_1' und m_2' in Verbindung. Durch Stahlfedern, welche mit kleinen Stifthaltern in die Türmchen T_1 und T_2 einsetzbar waren, wurde einesteils das Stück *B* gegen die Kammer angedrückt und andererseits die Spannung den Plättchen m_1 und m_2 zugeführt, von wo sie bei richtiger gegenseitiger Lage vom Deckglas der Kammer und dem Teil *B* des Halters bis ins Innere der Kammer gelangte. Durch die Bohrung von *B* ging das Objektiv bequem hindurch.

Die Beobachtungsoptik des Kardioidultramikroskops bestand aus dem Objektiv *V* mit Glyzerinimmersion und dem Okular *K* 20 ×. Im Okular lag ein Raster mit 50 × 50 quadratischen Feldern von 0,1 mm Seitenlänge; die mit einem Objektmikrometer bestimmte wahre Seitenlänge betrug 0,0017 mm. Die Beleuchtung erfolgte mit einer selbstregulierenden 5 Amp. Bogenlampe.

Was nun die Wechselspannungen verschiedener Frequenzen anlangt, so stand erstens die Städtische Lichtleitung mit 50 Perioden zur Verfügung. Höhere Frequenzen wurden mit einem kleinen Wechselstromgenerator, der eine mittlere Hörfrequenz zu liefern imstande war, erzeugt. Derselbe war 14polig und besaß permanente Magnete. Durch verschiedene Geschwindigkeiten, welche man dem Rotor erteilt, ist man imstande, die Frequenz in ziemlichem Umfange zu verändern. Allzu *kleine* Umlaufsgeschwindigkeiten konnte man dem verwendeten Generator freilich nicht erteilen, was sehr wünschenswert gewesen wäre, um auch bei kleineren Frequenzen als 50 zu messen, denn die Spannung fiel gleichzeitig beträchtlich. Diese Folge des permanenten Magnetismus der Pole machte sich auch insofern bemerkbar, daß man bei verschiedenen Frequenzen auch immer eine andere Spannung von der Maschine erhielt. — Es wäre nun noch vorteilhaft gewesen, die Tourenzahl des Generators völlig beliebig variieren zu können. Ein zu diesem Zweck aber notwendiger Gleichstrommotor stand nicht zur Verfügung; der Antrieb mußte daher mit Drehstrommotoren (deren Tourenzahl bekanntlich nicht veränderlich ist) verschiedener Umlaufsgeschwindigkeit bewerkstelligt werden. Welchen Einfluß dieser Mangel auf das

Programm der Messungen hatte, soll weiter unten erwähnt werden. — Die höchste erreichte Frequenz war 308. Die Periode wurde allgemein auf folgende Weise bestimmt. Erstens wurde mit dem Tourenzähler im Verlauf der Messungen, während Spannung vom Generator an die Kammer gelegt war, die Umlaufsgeschwindigkeit des Rotors bestimmt. Die Frequenz folgt aus Polzahl und Tourenzahl pro Sekunde durch Multiplikation. Um aber sicher zu gehen, wurde zweitens ein Vergleich der im Telephon hörbaren Schwingung mit einem Monochord vorgenommen. Das Monochord wieder war nach einer Stimmgabel (normal A) gespannt.

Eine Schaltungsskizze zeigt Fig. 3. Der Kammerhalter *KH* war am Mikroskoptisch befestigt. Den Türmchen T_1 und T_2

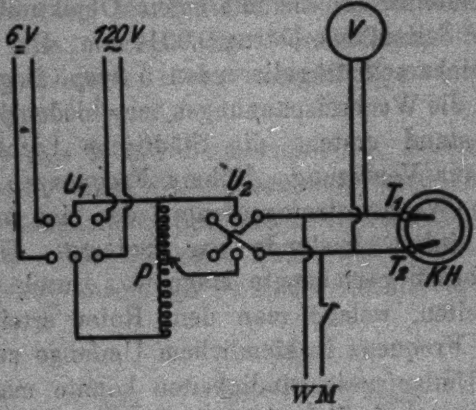


Fig. 3.

wurde die Spannung zugeführt. Eine besondere Leitung führte zum Mittelfrequenzgenerator. An die Kammer konnte außer der 120 Volt Spannung des 50periodigen Lichtstromes auch eine Gleichspannung von 6 Volt angelegt werden (Umschalter U_1). Diese beiden Spannungen konnte man durch das Potentiometer *P* beliebig verkleinern. Die Pole der Gleichspannung, welche nur dazu diente, neue Partikel ins Gesichtsfeld zu bringen, waren durch den Fußumschalter U_2 vertauschbar. An der Kammer lag das Hitzdrahtvoltmeter *V* mit einem Meßbereich von 120 Volt und besonderen Skalen für Gleich- und Wechselstrom.

§ 3.

Ich habe oben erwähnt, daß die Unmöglichkeit, die Tourenzahl des Wechselstromgenerators in beliebiger Weise verändern zu können, die Art der Messungen etwas verändert hat. Es war nämlich beabsichtigt, ein und dasselbe Teilchen bei verschiedenen Frequenzen zu beobachten, nachdem unsere Kammer dazu sehr gut die Möglichkeit geboten hatte. Es blieb also nichts anderes übrig, als den Betrieb des Generators mit zwei Drehstrommotoren verschiedener Stärke und Geschwindigkeit vorzunehmen. Da beim Übergang zu einer anderen Frequenz die Notwendigkeit bestand, den Generator nun mit einem anderen Metor zu betreiben, und dieser Übergang, wie sich denken läßt, eine gewisse Zeit beanspruchte, so mußte so vorgegangen werden, daß immer eine vom Generator erzeugte Frequenz mit dem 50 periodigen Wechselstrom des Leitungsnetzes in ihrer Wirkung auf die Amplitude der Teilchenschwingung verglichen wurde. Da die Abhängigkeit der Beweglichkeit B eines Teilchens von der Spannung uns vorläufig für diese Art der Bewegung unbekannt ist, wurde bei den Vergleichsmessungen immer die *gleiche* Spannung des 50 periodigen Wechselstromes über das Potentiometer abgenommen, wie sie gerade vom Generator geliefert wurde.

Das Bild, welches sich dem Beobachter bei Anlegen der Spannung an die gefüllte Kammer bot, war folgendes. Die *Beugungsscheibchen* der Teilchen werden in Striche ausgezogen, welche an den Endpunkten, wo die Geschwindigkeit der Teilchen Null ist, stärker betont sind, so daß man den Eindruck von Hanteln hat. Man beobachtet sehr deutlich, wie diese Endpunkte mit höherer Frequenz deutlicher werden, was damit im Zusammenhang steht, daß sich das Teilchen pro Zeiteinheit weitaus häufiger in den genannten Lagen befindet. Im homogenen Feld stehen alle Striche in der Feldrichtung parallel zueinander; die Länge jedes einzelnen ist mit dem Okularraster nach einiger Gewohnheit bequem ablesbar.

Es wurden insgesamt 170 Teilchen verschiedener Größe beobachtet (d. h., wie schon oben mitgeteilt, gelbe und grüne). Die kleineren Partikel unterliegen ja auch während der

Oszillationen sehr stark der **Brownschen** Bewegung; dadurch ist der Strich, als welcher sich die Bewegung im Wechselfeld darstellt, bei ihnen oft nur in der Projektion sichtbar und also verkürzt; auch sind die oszillatorischen Bahnen der blauen Teilchen äußerst lichtschwach. Es wurden bei der Frequenz 170 44 Teilchen untersucht; bei der Periode 185 30 Partikel und 85 Partikel bei 308 Schwingungen pro Sekunde und zu jeder dabei auftretenden Amplitude die Amplitude bei der Frequenz 50 festgestellt. Ein Meßprotokoll über 26 Teilchen, die bei einer Spannung von 42 Volt bei den zwei Frequenzen $\nu_1 = 50$ und $\nu_2 = 308$ beobachtet wurden, sei in extenso gegeben.

Tabelle 1.

Nr.	$2H$ für ν_1	$2H$ für ν_2	$2H\nu_1$	$2H\nu_2$
1	4,5	1	225	308
2	4,0	0,7	200	215
3	5,0	1	250	308
4	3,0	0,5	150	154
5	4,0	0,8	200	246
6	4,0	0,8	200	246
7	5,0	1,2	250	369
8	3,5	0,7	175	215
9	4,0	1	200	308
10	4,5	1	250	308
11	3,5	0,6	175	244
12	4,0	0,7	200	215
13	5,0	1,1	250	338
14	5,0	1	250	308
15	5,0	1	250	308
16	5,0	1	250	308
17	4,5	0,8	225	246
18	5,5	1,2	275	369
19	4,0	0,8	200	246
20	5,0	1,1	200	246
21	4,0	0,7	200	215
22	4,0	0,8	200	246
23	5,5	1,3	275	400
24	5,0	1	250	308
25	6,0	1,3	300	400
26	5,0	1	250	308
			5900	7454
		Mittel:	226	286

$H\nu_1 = 113$; $H\nu_2 = 143$; $H\nu_2 / H\nu_1 = 1{,}26$.

Von den anderen Meßreihen sind nur die Mittelwerte der Produkte $H\nu$ gegeben.

Tabelle 2.

1. $V = 32$; $\nu_1 = 50$; $\nu_2 = 170$.

	$H\nu_1$	$H\nu_2$
25 Partikel	148,5	142
19 „	194,8	210
44 Partikel	171	176

2. $V = 32$; $\nu_1 = 50$; $\nu_2 = 185$.

	$H\nu_1$	$H\nu_2$
30 Partikel	152,5	175

3. $V = 42$; $\nu_1 = 50$; $\nu_2 = 308$.

	$H\nu_1$	$H\nu_2$
30 Partikel	162	190
29 „	165	174
26 „	113	148 (vgl. Tab. 1)
85 Partikel	149	169

Bilden wir die Verhältnisse der respektiven $H\nu$, so bekommen wir für: 1. 1,02, für 2. 1,15 und für 3. 1,15. Da die Frequenzen 170 und 185 sehr eng beieinanderliegen und die bezüglichen Messungen bei gleicher Spannung vorgenommen wurden, so ist es wohl gestattet, die Meßreihen 1. und 2. aus Tab. 2 zusammenzuziehen, wodurch auch eine größere Statistik gewonnen wird. Wir können also sagen, daß für eine Frequenz $\nu = 177$ das Verhältnis der $H\nu = 1{,}08$ ist, für die Frequenz $\nu = 308$ gleich 1,15 ist.

Wir sehen also, daß die $H\nu$-Werte für die höheren Frequenzen größer sind als für die niedrigeren. Aus dem in § 1 Gesagten folgt, da Gleichung (8) sich nicht als gültig erweist, daß die Beweglichkeit B keine frequenzunabhängige Größe ist, vielmehr, wie man aus den Gleichungen (6) oder (6a) entnehmen kann, in den vorliegenden Fällen zunimmt und zwar in richtiger Reihenfolge, indem bei Vergleich der $H\nu$-Werte für $\nu = 177$ und 308 mit dem $H\nu$-Werte für $\nu = 50$ das Verhältnis $H\nu_{308}/H\nu_{50}$ größer ist als $H\nu_{177}/H\nu_{50}$. Bevor wir jedoch in eine Diskussion unseres Resultates eintreten, wollen wir uns fragen, ob die gefundenen Abweichungen, d. h. Erhöhungen wirklich reell sind oder nur durch Meßfehler bedingt werden. Wir wollen die Meßreihe 3. aus Tab. 2 als die mit der größten Statistik für unsere Überlegung heranziehen. Nehmen wir an, daß bei den Rasterablesungen wegen der Bewegung des Teilchens während der Ablesung ein Fehler von 20 % gemacht wurde, was wahrscheinlich überschätzt sein dürfte. Dann ist beim Mitteln über 85 Einzelbeobachtungen der mittlere Fehler des Mittelwertes gleich

$$\frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{5}}{9} = \frac{1}{45};$$

der Fehler des Verhältnisses von $H\nu_2/H\nu_1$ ist dann

$$\frac{1}{45} \cdot \sqrt{2} = \frac{1{,}4}{45} = 3\,\%,$$

während die Abweichung von der 1 schon 15 Proz. beträgt. Die Frequenzbestimmung ist so genau vorgenommen worden und stand nach beiden beschriebenen Verfahren in so guter Übereinstimmung, daß diese eventuelle Fehlerquelle nicht ins Gewicht fallen kann. Auch für die Frequenz 177 mit dem Mittelwert der $H\nu = 1{,}08$ liegt die Erhöhung (8 Proz.) außerhalb der Fehlergrenze.

§ 4.

Am Schlusse des vorigen Paragraphen haben wir gesehen, daß die Beweglichkeit eines Partikels im Wechselfeld mit zunehmender Frequenz desselben zunimmt und uns durch eine Überschlagsrechnung davon überzeugt, daß dieses Resultat nicht durch Meßfehler hervorgerufen sein kann, da der prozentuelle Fehler viel kleiner ist als die erhaltenen prozentigen Abweichungen. Zu Beginn haben wir uns die Aufgabe gestellt, die Gleichung (1) zu überprüfen; der von uns eingeschlagene Weg liefert das Resultat, daß diese Gleichung für derartige Beschleunigungen, wie wir sie unseren Teilchen gaben nicht mehr als gültig betrachtet werden kann. Es ist aber noch notwendig, bevor wir wirklich annehmen, daß die von uns konstatierte Zunahme der Beweglichkeit bei steigender Periodenzahl einzig und allein durch die Erhöhungen der Frequenzzahl, und zwar *direkt*, zusammenhängt, uns zu überzeugen, daß nicht andere mit der Änderung der Wechselzahl zusammenhängende Erscheinungen unser Resultat bedingen.

Und zwar ist zu berücksichtigen, daß unter dem Einfluß eines Stromes eine in einem engen Gefäß befindliche Flüssigkeitsschicht sich längs der Wände des Gefäßes bewegt. Diese bekanntlich als Elektroosmose bezeichnete Erscheinung könnte, falls sie in unserer Untersuchungskammer aufgetreten wäre, möglicherweise ein Ergebnis liefern, das in keinem Zusammenhang mit der beabsichtigten Überprüfung der Gleichung (1) steht. Die in einer Flüssigkeit suspendierten Teilchen können nämlich bei der elektroosmotischen Bewegung der Flüssigkeit von derselben mitgenommen werden. Dann ist die Geschwindigkeit des Teilchens nicht die wahre allein durch die Kataphorese bedingte, sondern die Summe aus dieser und der Geschwindigkeit der Flüssigkeit. In sehr weiten Trögen läßt sich dieser Einfluß vermeiden; in so schmalen Trögen, wie sie z. B. von Svedberg und Andersson[1]) verwendet wurden (die Dicke betrug 50—70 μ) ist dieser Einfluß sehr zu berücksichtigen.[2]) Betrachten wir den bei unseren Versuchen vorliegenden Fall. Die Silberpartikel sind negativ geladen, bewegen sich also in einem elektrischen Gleichfeld zur Anode. Das Wasser bewegt sich hingegen elektroosmotisch zur Kathode. Dann wird die Beweglichkeit des Partikels gehemmt werden. Gehen wir nun zu Wechselstrom über. Der beschriebene Vorgang muß auch

---

1) T. Svedberg u. A. Andersson, a. a. O.

2) H. Freundlich, Kapillarchemie S. 333. 1923.

jetzt eintreten; das Teilchen wie die Flüssigkeit werden in Schwingungen geraten. Nun wird das Teilchen mit seiner verhältnismäßig kleinen Masse den Wechseln des Feldes rascher folgen können als die Flüssigkeit und je rascher die Frequenzen werden, um so mehr wird die Beweglichkeit des Teilchens scheinbar zunehmen. Es ist nun zu überlegen, ob der beschriebene Vorgang nicht auch in unseren Versuchen eine Rolle spielte und die konstatierte Beweglichkeitszunahme eine Folge dieser Erscheinung ist. Unsere oben beschriebene Kammer war etwa nur den zehnten Teil so dick wie die von Svedberg und Andersson benutzte. Trotzdem, oder vielleicht gerade deshalb, sind wir berechtigt anzunehmen, daß keine durch die elektrische Spannung hervorgerufene Bewegung eintrat, da sich für das Auftreten einer solchen ein leicht beobachtbares Kriterium fand.

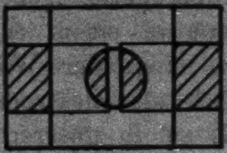


Fig. 4.

Zu Beginn der Versuche wurde nicht nur die oben beschriebene Kammer verwendet, sondern eine einfachere, welche folgendermaßen aussah (Fig. 4). Auf einem etwa 0,8 mm starken Glas von 6 × 4 cm Fläche sind zwei Stanniolstreifen so angeklebt, daß sie in der Mitte des Glases sich in einer beiläufigen Entfernung von 2,5 mm gegenüberstehen. Von einem 4 × 4 cm großen durchbohrten Glimmerscheibchen wurde ein möglichst dünnes abgesplittert und so an das Glas und Stanniol mit Gummi arabicum befestigt, daß nur gerade die Enden der Stanniolstreifen im Loche des Glimmer freilagen. Zwischen die Elektroden wurde ein Tropfen des Kolloids gebracht und ein gewöhnliches Deckglas von etwa 0,05 mm Dicke darauf gelegt. Die Zuführung der Spannung erfolgte durch Federn, welche gleichzeitig das Glas am Mikroskoptisch festhielten.

Die Dicke dieser Kammer war rund 0,05 mm. Im Wechselfeld war nun an den Kolloidpartikeln das interessante Bild zu sehen, daß an manchen Stellen der Kammer alle im Gesichtsfeld befindlichen Teilchen unter dem Einflusse einer Wechselspannung nicht in die schon oben beschriebenen Striche auseinandergezogen wurden, sondern elliptische Bahnen beschrieben. Die Bahnen waren nicht immer ganz symmetrisch; manchmal nur etwas verdrückt, waren sie manchmal schleifenförmig.[1] An ein und derselben Stelle des Gesichtsfeldes beschrieben aber sämtliche anwesende Teilchen die gleichen geschlossenen Bahnen. Am ausgeprägtesten war die Tendenz zur Ellipsenbildung an den Elektroden. Es bleibt nun wohl keine andere Annahme übrig, als daß die Teilchen nicht nur den periodischen Kräften des Feldes allein unterliegen, sondern noch einer anderen periodischen Kraft, die im gleichen Rhythmus wirkt. — Den Strömungsverlauf einer inkompressibeln Flüssigkeit in einer fest verschlossenen Kammer zeigt Fig. 5. In der Mitte wird die Flüssigkeit der auf sie wirkenden Kraft eher Folge leisten; da sie aber nicht endlos in einer Richtung strömen kann, muß an den Wänden ein Rückströmen der Flüssigkeit stattfinden. Ein Wechselfeld wird die Flüssigkeitsmenge jedenfalls in eine Oszillation versetzen, welche aber z. B. in der Nähe der Elektroden, wo die Strömung abbiegt, senkrecht zu den Kraftlinien stehen wird. Ein an einer solchen Stelle befindliches Teilchen unterliegt dann zwei periodischen Kräften und seine Bahn muß eine geschlossene Kurve zweiter Ordnung sein.

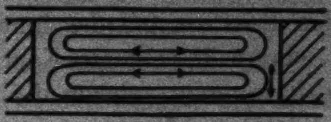


Fig. 5.

Das Auftreten von Ellipsen oder anderen geschlossenen Bahnen ist ein Zeichen dafür, daß eine Elektroosmose im Wechselfeld stattfindet. Nun war aber die von uns bei den Messungen verwendete Kammer gänzlich frei von der Ellipsenbildung. Auch in der Nähe der Elektroden, wo, wie schon erwähnt, die Erscheinung am ausgeprägtesten ist, war nichts davon vorhanden. Es ist daher der Schluß sehr berechtigt, daß unser Resultat durch diese mögliche Fehlerquelle nicht hervorgerufen wurde. Die Beweglichkeit eines Partikels in Wechselfeldern verschiedener Frequenzen nimmt also nicht nur scheinbar dadurch ab, daß die Beweglichkeit des dem Teilchen immer entgegengesetzt fließenden Wassers abnimmt, denn die Kammer, in welcher unsere Messungen vorgenommen wurden, ist sicher von dieser Wasserbewegung frei. Die Dicke der Kammer war ja wie schon erwähnt, nur 6 μ; sicherlich waren im Innern die Viskositätsverhältnisse durch die Nähe der Wände andere als in einer großen Menge des Kolloids und die starke Reibung wird der Flüssigkeitsbewegung sehr stark hinderlich sein. Es kann also, wie man sieht, bei Versuchen, wo man den Koeffizienten der inneren Reibung nicht zu kennen braucht, eine sehr schmale Kammer sehr gut Verwendung finden, weil in einer solchen die elektroosmotischen Strömungen nicht entstehen können.

---

[1] Die Erscheinung wurde zuerst an einem Vanadiumpentoxydsol beobachtet. Über diese, wie über andere Beobachtungen an diesem Kolloid wird gleichzeitig in der Kolloidzeitschrift berichtet.

Das Resultat unserer Überlegungen läßt sich nun darin zusammenfassen, daß die Konstatierung einer Beweglichkeitsvergrößerung bei der Bewegung von kleinen Teilchen in Wechselfeldern steigender Frequenzen allein von diesen abhängig ist und auch nicht indirekt mit ihnen in Zusammenhang gebracht werden kann. Dann ist also die Bewegungsart, die man dem Teilchen erteilte, für die Beweglichkeitserhöhung verantwortlich. Man kann sich folgendes Bild machen. Jedes Teilchen in einer Flüssigkeit ist von einer Wasserhülle umgeben, welche durch elektrische Kräfte an ihm anhaftet. Wird jetzt das Teilchen sehr oft beschleunigt, so wird die Wasserhülle nicht so rasch mitgenommen werden können. Der scheinbare Radius des Teilchens wird kleiner und dadurch seine Beweglichkeit größer.

Eine analoge Untersuchung in Gasen wird in Aussicht gestellt. (Dabei sei darauf hingewiesen, daß Fürth¹) in seiner zitierten Arbeit in Übereinstimmung mit einem Befund von Frl. Snethlage die Beweglichkeit von Teilchen in Gasen für

---

1) R. Fürth, a. a. O.

Bewegungen im Wechselfeld größer fand als für solche im Gleichfeld.) Bei Beobachtung im Ehrenhaftschen Kondensator wird die Wechselspannung von einer Senderöhre erzeugt werden; eine geeignete Wahl von Selbstinduktion und Kapazität läßt jede beliebige Frequenz entstehen.

Denken wir uns die Frequenz so stark erhöht, daß selbst bei größeren Spannungen die oszillierende Bewegung des Teilchens für unsere Vergrößerung nicht mehr merkbar ist. Das Beugungsscheibchen erscheine vollkommen rund. Dann könnte man die Beweglichkeit eines solchen Teilchens aus der Brownschen Bewegung z. B. nach der von Fürth[1]) angegebenen Methode der „doppelseitigen Erstpassagezeiten“ bestimmen und in Vergleich bringen mit der aus der Brownschen Bewegung nach der gleichen Methode bestimmten Beweglichkeit des Teilchens, welches der hochfrequenten Spannung nicht unterliegt. Diese Methode hätte den Vorteil, daß man das Teilchen durch die elektrischen Kräfte Wege zurücklegen lassen kann, welche mit seinem Durchmesser schon gut vergleichbar sind.

Zusammenfassung.

Es wurde untersucht, ob die Gleichung $v = B \cdot K$ auch noch gültig bleibt, wenn man einem Kolloidpartikel ständig eine große Zahl von Beschleunigungen erteilt, bzw. wie die Beweglichkeit B des Teilchens mit der Zahl der Beschleunigungen zusammenhängt. Zu diesem Zwecke wurden die Teilchen eines Silberhydrosols in einer besonderen Kammer Wechselspannungen verschiedener Frequenzen ausgesetzt. Es zeigt sich nun, da, wie bewiesen wird, das Produkt aus der Amplitude der Teilchenschwingung und der Frequenz nur dann konstant bleibt, wenn die Beweglichkeit eine frequenzunabhängige ist, daß die Beweglichkeit für steigende Frequenzen zunimmt. Durch eine Überschlagsrechnung wird gezeigt, daß der prozentuelle Meßfehler viel kleiner ist als die prozentischen Abweichungen. Daß das Resultat auch keine andere als die gewünschte Ursache hat und mit elektroosmotischen Strömungen in der Kammer nicht zusammenhängt ist daraus ersichtlich, daß ein für Bewegungen des Wassers im Wechselfeld gefundenes Kriterium nicht auftrat.

---

[1]) R. Fürth, Ann. d. Phys. 53. S. 183. 1917.

Es ist als erwiesen zu betrachten, daß die beobachtete Beweglichkeitsvergrößerung *direkt* von den Frequenzänderungen abhängt. Sie scheint damit zusammenzuhängen, daß bei den erteilten Beschleunigungen die Wasserhülle des Teilchens der Bewegung des Teilchens nicht rasch genug folgen kann und diese Abnahme des scheinbaren Radius die Reibung vermindert.

Prag, 20. August 1925.

(Eingegangen 29. August 1925.)

5. *Die Molekularrefraktion einfacher Verbindungen;*

von K. F. Herzfeld und K. L. Wolf.

---

1. Einleitung.

Wir haben in der vorigen Arbeit gezeigt, daß sich die Molekularrefraktion von NaCl und KCl gut darstellen läßt, wenn man sie aus drei Summanden zusammensetzt, deren erster vom Kation herrührt, während die beiden letzten zum Chlorion gehören. Hierbei konnte die Eigenwellenlänge in dem ersten dieser beiden, welches wesentlich überwiegt, folgendermaßen berechnet werden:

Man addiert zur Elektronenaffinität des freien Chloratoms den Coulombschen Anteil der Gitterenergie Q_G. Diese Energie rechnet man dann in Wellenlängen um, nach der Beziehung:

$$Q = Q_G + Q_E = N_L h \nu = \frac{289}{\lambda} \quad (\lambda \text{ in } 1000 \text{ Å.-E., } Q \text{ in Kcal}).$$

Von der so gefundenen Wellenlänge hat man dann etwa 55—90 Å.-E. — wir wollen im Durchschnitt 70 Å.-E. sagen — abzuziehen, um die Eigenwellenlänge des Hauptgliedes zu bekommen. Die Eigenwellenlänge des zweiten Gliedes ist etwa um den Faktor 1,6 größer.

Die Elektronenzahlen, welche die Zähler bestimmen, erhält man folgendermaßen. Man benützt die Gesamtelektronenzahl des entsprechenden Edelgases, d. h. beim Chlorion die des Argons, oder mit anderen Worten, man benützt die Summe der Zähler in dem Ausdruck für die Molekularrefraktion des Argons. Diese Summe verteilt sich dann zu etwa 95 Proz. auf das Hauptglied, zu etwa 5 Proz. auf das zweite Glied.

Wenn diese Überlegungen richtig sein sollen, dann müssen sie auch auf andere Salze Anwendung finden können. Wir wollen sie daher jetzt auf die anderen Alkalihalogenide übertragen.

2. Molekularrefraktion der Alkalihalogenide.

α) Die Gitterenergien.

Den Coulombschen Anteil der Gitterenergie berechnet man bei Salzen vom NaCl-Typus nach der Formel:

$$Q_G = \frac{1152}{a},$$

bei solchen vom CsCl-Typus nach:

$$Q_G = \frac{673}{a}.$$

Hierbei ist Q_G in Kcal ausgedrückt, a die Seite des Elementarwürfels in A.-E. So erhält man folgende Tabelle (I bedeutet NaCl-Gitter, II CsCl-Gitter).

	Q_G			
	F	Cl	Br	J
Li	288 I	224 I	210 I	191 I
Na	247 I	204 I	193 I	178 I
K	214 I	183 I	175 I	163 I
Rb	187 II	177 I	169 I	158 I
Cs	191 I	164 II	157 II	148 II

β) Die Zähler in der Formel der Molekularrefraktion.

Zur Berechnung der Zähler haben wir die Größe:

$$\frac{1}{8\pi} N_L \frac{e^2}{m} = 1{,}63 \cdot 10^{31}$$

mit der zugehörigen Elektronenzahl zu multiplizieren. Für diese wählen wir beim Hauptglied 95 Proz. der Elektronenzahl des betreffenden Edelgases, d. h. beim Chlorion 4,30, beim Bromion 4,65, beim Jodion 5,33. Für die Elektronenzahl der Resonanzlinie setzen wir 5 Proz. der Elektronenzahl des Edelgases an, d. h. bei Chlor 0,22, Brom 0,25, Jod 0,28. Beim Fluorion, dessen Molekularrefraktion an sich sehr klein ist, berücksichtigen wir die Resonanzlinie nur so, daß wir für das Hauptglied die volle Elektronenzahl von 2,4 ansetzen und dann die so berechnete Molekularrefraktion noch mit 1,1 multiplizieren, also der Resonanzlinie 10 Proz. der Gesamtwirkung zuschreiben. Wir erhalten so folgende Zähler:

Zähler in der Molekularrefraktionsformel.

	F^-	Cl^-	Br^-	J^-	
Hauptglied C_1 . .	3,91	7,01	7,58	8,69	$\Big\} 10^{31}$.
Resonanzlinie C_2 .		0,36	0,41	0,46	

Für die Kationen setzen wir die Resonanzlinie nicht eigens an, da sie nur einen kleineren Beitrag zur Dispersion liefern und auch in der vorigen Arbeit die betreffenden Eigenfrequenzen ohne Rücksicht auf die Resonanzlinie gewonnen wurden. Wir benützen hier die Summe $C_1 + C_2$.

γ) Die Molekularrefraktion der Kationen.

Wir haben in der vorhergehenden Arbeit die Eigenschwingungsfrequenzen nur für Na^+ und K^+ berechnet. Wollen wir die Molekularrefraktion auch für Li^+, Rb^+, Cs^+ finden, so müssen wir die Ionisierungsenergien dieser Ionen zu bestimmen suchen. Hierzu vergleichen wir die gefundenen Ionisierungsenergien von Na^+ und K^+ mit denen der entsprechenden Edelgase Ne und Ar.[1])

$$\frac{Na^+}{Ne} = \frac{909}{500} = 1{,}82,$$

$$\frac{K^+}{Ar} = \frac{678}{355} = 1{,}88$$

in guter Übereinstimmung mit der Fuesschen Regel.

Wir setzen demnach auch für die anderen Alkaliionen die Ionisierungsenergie gleich dem 1,85fachen der Ionisierungsarbeit des betreffenden Edelgases. Wir finden so für:

$$Rb^+ \; 311 \cdot 1{,}85 = 576, \qquad Cs^+ \; 296 \cdot 1{,}85 = 498,$$

endlich:

$$Li^+ = 575 \cdot 1{,}85 = 1063.$$

In der folgenden Tabelle sind nun die Molekularrefraktionen des Kations zugesammengestellt. Die Wellenlänge λ_0 der Grenze ist aus:

$$\lambda = \frac{289}{Q_I - Q_G} 1000 \text{ Å.-E.}$$

---

[1]) Für die Anregung hierzu sind wir Hrn. Dr. Bechert zu großem Dank verpflichtet.

berechnet, die Wellenlänge λ_1 des Absorptionsschwerpunktes daraus durch Subtraktion von 70 Å.-E.

Ion	Salz	λ der Grenze	λ_1 d. Schwerpunktes	$\nu_1^2 \cdot 10^{-30}$	Molekularrefraktion
K	F	630	560	28,71	2,59
	Cl	585	515	33,93	2,19
	Br	580	510	34,65	2,14
	J	567	500	36,00	2,06
Rb	F	737	667	20,69	3,86
	Cl	723	653	21,11	3,78
	Br	710	640	21,95	3,64
	J	691	621	23,32	3,42
Cs	F	941	871	11,87	7,70
	Cl	866	796	14,22	6,43
	Br	848	778	14,88	6,15
	J	813	743	16,33	5,60

Für Li^+ benützen wir als mittlere Gitterenergie 200, weil hier die Änderungen nicht ins Gewicht fallen. Das gibt für Li λ der Grenze 335 A.-E. Von dieser kurzen Wellenlänge ziehen wir aber nicht 70, sondern nur 20 Å.-E. ab und finden $\lambda_1 = 315$ A.-E., $\nu_1^2 = 90 \cdot 10^{30}$. Der Zähler lautet $1{,}63 \cdot 10^{31} \cdot 1{,}14$ (entsprechend der Elektronenzahl für He). Die Molekularrefraktion wird dann 0,20.

Für Na^+ benützen wir den Wert NaCl = 0,50.

Fajans und Joos[1]) schreiben den Kationen folgenden Wert zu:

Li^+	Na^+	K^+	Rb^+	Cs^+
0,20	0,50	2,23	3,58	6,24

Die Übereinstimmung ist vorzüglich.

δ) Die Molekularrefraktionen der Anionen.

Hier sind zur Berechnung folgende Werte der Elektronenaffinität benützt:

	F^-	Cl	Br	J
Q_E	(105)	88	89	81 Kcal.

Damit ist die folgende Tabelle berechnet, in der die

---

1) K. Fajans u. G. Joos, Ztschr. f. Phys. 23. S. 1. 1924.

Wellenlänge der Resonanzlinie 1,6mal der Wellenlänge des Schwerpunktes der kontinuierlichen Absorption gesetzt ist.

Ion	Salz	Wellenlänge der Grenze	Schwerpunkt d. kontinuierl. Abs.		Resonanzlinie		Molekularrefraktion
			λ_1	$\nu_1^2 \cdot 10^{-30}$	λ_2	$\nu_2^2 \cdot 10^{-30}$	
F	Li	744	674	19,58			2,02
	Na	820	750	16,00			2,78
	K	905	835	12,92			3,39
	Rb	1000	930	10,52			4,19
	Cs	976	906	10,96			3,93
Cl	Li	925	855	12,30	1368	4,75	6,40
	Na	990	920	10,64	1472	4,10	7,68
	K	1065	995	9,09	1592	3,50	9,04
	Rb	1090	1020	8,65	1632	3,58	9,50
	Cs	1146	1076	7,78	1721	3,04	10,62
Br	Li	965	895	11,23	1432	4,23	7,72
	Na	1024	955	9,88	1528	3,80	9,08
	K	1082	1012	8,79	1619	3,38	10,19
	Rb	1120	1050	8,16	1680	3,19	11,00
	Cs	1174	1104	7,39	1765	2,89	12,19
J	Li	1061	991	9,15	1586	3,51	10,96
	Na	1113	1043	8,25	1669	3,17	12,43
	K	1181	1110	7,30	1776	2,80	14,11
	Rb	1209	1139	6,94	1820	2,71	14,22
	Cs	1296	1220	6,04	1950	2,36	16,57

Wir sehen qualitativ vollkommen den von Fajans und Joos erwarteten Gang der Refraktion, daß das Anion durch das Kation desto mehr verfestigt wird, je kleiner das Kation ist.

Wenn wir die fehlenden Tabellen vergleichen, so finden wir im allgemeinen Verlauf Übereinstimmung, auch manche Zahlen stimmen verhältnismäßig gut überein. Die Hauptabweichungen sind in der rechten oberen Ecke der Tabelle, und zwar in dem Sinn, daß die theoretischen Zahlen eine zu starke „Verfestigung" ergeben. Da am Prinzip der Berechnung des Schwerpunktes der Absorption wohl nicht viel geändert werden kann, wenn es überhaupt richtig ist, ferner auch die Elektronenzahlen für Br^- und J^- nicht wesentlich zu klein sein können, da sie die Refraktionen der gleichgebauten Ionen Rb^+ und Cs^+ nahe richtig geben, scheint die einzig mögliche Erklärung, daß in der rechten oberen Ecke die Übergangswahrscheinlichkeit zur Resonanzlinie verhältnismäßig höher ist.

c) Die Molekularrefraktion der Salze.

Berechnete Molekularrefraktion.

	F	Δ	Cl	Δ	Br	Δ	J
Li	2,22	4,38	6,60	1,32	7,92	3,24	11,16
Δ	1,01		1,58		1,61		1,77
Na	3,23	4,95	8,18	2,35	9,53	3,40	12,93
Δ	2,75		3,05		2,80		3,24
Br	5,98	5,25	11,23	2,10	12,33	3,84	16,17
Δ	2,07		2,05		2,31		1,47
Rb	8,05	5,23	13,28	1,36	14,64	3,00	17,64
Δ	3,58		3,77		3,70		4,53
Cs	11,63	5,42	17,05	1,29	18,34	3,83	22,17

Experimentelle Molekularrefraktionen.[1])

	F		Cl		Br		J
Li	2,34	5,25	7,59	2,97	10,56	5,42	15,98
	0,68		0,93		1,00		1,10
Na	3,02	5,50	8,52	3,04	11,56	5,51	17,07
	2,15		2,33		2,42		2,68
K	5,17	5,68	10,85	3,14	13,98	5,77	19,75
	1,58		1,70		1,80		1,96
Rb	6.74	5,81	12,55	3,23	15,78	5,93	21,71
	2,77		2,70		2,68		2,56
Cs	9,51	5,74	15,25	3,21	18,46	5,81	24,27

3. Erdalkalioxyde.

Als besonders stark veränderlich haben Fajans und Joos die Molekularrefraktion des O^{--} in Erdalkalioxyden erkannt. Wir versuchen, ob wir auch diese Veränderung erklären können.

Fajans und Joos geben a. a. O. folgende Tabelle:

Molrefraktion der Oxyde.

	Oxyd	Anteil des Kations (von Fajans geschätzt)	Anteil des Anions	ber. Anteil des Anions
BeO	3,28	0,1	3,2	2,45
MgO	4,50	0,3	4,2	(4,2)
CaO	7,40	1,3	6,1	7,3

---

1) K. Spangenberg, Ztschr. f. Krist. 57. S. 494. 1923.

Wenn man den Wert für MgO zur Rechnung benützt, das Sauerstoffion wie das Fluorion behandelt, d. h. ihm den Zähler $3{,}91 \cdot 1{,}1 = 4{,}30$ zuschreibt, so findet man:

$$\nu_1^2 = 10{,}48 \cdot 10^{30}, \qquad \lambda_{\mathrm{Schwerpunkt}} = 926 \text{ Å.-E.}, \qquad Q = 290 \text{ Kcal};$$

die gegen das Gitter zu leistende Arbeit ist:

$$Q_G = 2\,\frac{1152}{a} \text{ (zweiwertige Ionen!)} = 548 \text{ Kcal},$$

demnach $Q_E = -258$ Kcal. Damit berechnen sich für die anderen Oxyde die in der letzten Spalte gegebenen Anteile des O^{--}-Ions.

Was die zweiwertigen Kationen betrifft, so würde sich nach 2 γ die Ionisierungsenergie des freien Mg^{++} bzw. Ca^{++} aus den Werten für Na^+ bzw. K^+ durch Multiplikation mit 1,85 ergeben, und zwar zu 1680 Kcal für Mg^{++}, zu 1245 für Ca^{++}.

In MgO wird dann $Q = Q_I - Q_G = 1130$ Kcal, also die Wellenlänge der Grenze 256 Å.-E. Es ist zweifelhaft, ob man bei so kurzen Wellen noch volle 70 Å.-E. zu subtrahieren hat um zum Schwerpunkt der kontinuierlichen Absorption zu gelangen. Wir wollen lieber:

$$\frac{\lambda_{1\,\mathrm{Na}}}{\lambda_{1\,\mathrm{Mg}}} = \frac{Q_{\mathrm{MgO}}}{Q_{\mathrm{NaCl}}} = 1{,}5$$

setzen, d. h. nur

$$\frac{70}{1{,}5} = 47 \text{ Å.-E.}$$

subtrahieren.

Dann wird die Molekularrefraktion des Mg^{++} in MgO der 2,25 Teil von der des Na^+ in NaCl (Zähler gleich, Nenner ν_1^2 um den Faktor $1{,}5^2$ höher), d. h. $\sim 0{,}22$ (geschätzt 0,3). Entsprechend findet man für Ca^{++} in CaO 0,77 statt des von Fajans und Joos geschätzten Wertes 1,3. Mit 0,77 für Ca^{++} bleibt für O^{--} 6,63, was dem theoretischen Wert 7,3 näher liegt.

4. Die Halogenwasserstoffe.

Endlich kann man versuchen, die Halogenwasserstoffe ähnlich zu behandeln, wenn man annimmt, daß die von

Knipping[1]) nach der Ionenstoßmethode gemessenen Werte sich nicht auf den Vorgang:

$$HCl \longrightarrow H^+ + Cl^-,$$

sondern auf:

$$HCl \longrightarrow HCl^+ + \text{Elektron}$$

beziehen.[2])

Dann stellen sie nämlich direkt das benötigte Q dar. Man findet, wenn man die Resonanzlinie nur durch Multiplikation mit 1,1 berücksichtigt:

	HCl	HBr	HJ
gemessen:	6,68	9,14	13,74
berechnet:	6,33	7,55	9,28
Differenz:	0,35	1,59	4,46

Die absoluten Werte sind bei Br und J wieder wesentlich zu klein, die Zahlen geben aber den Gang der Abhängigkeit vom Kation gut wieder, wie folgende Zusammenstellung zeigt:

Molekularrefraktion des Natriumsalzes weniger Molekularrefraktion der Säure.

	NaCl-HCl	NaBr-HBr	NaJ-HJ
gemessen:	1,84	2,42	3,33
berechnet:	1,85	1,98	3,65

Die Molekularrefraktion gelöster Ionen kommt viel zu groß heraus.

Zusammenfassung.

Die in der vorhergehenden Arbeit aus dem Dispersionsverlauf von NaCl und KCl gezogenen Schlüsse werden hier zur Berechnung der Molekularrefraktion einfacher Salze mit edelgasähnlichen Ionen verwendet. Hierzu braucht man die „Elektronenzahl“ des Ions, die gleich der des betreffenden Edelgases gesetzt wird, und die „Eigenfrequenz“. Zur Bestimmung der letzteren berechnet man zuerst die Grenze der kontinuierlichen Absorption, indem man zur Elektronenaffinität (Anion) oder Ionisierungsarbeit (Kation) den Coulombschen Anteil der auf eine Ladung bezogenen Gitterenergie addiert

---

1) P. Knipping, Ztschr. f. Phys. 7. S. 328. 1921.

2) H. D. Smyth, Phys. Rev. 25. S. 452. 1925. H. G. Grimm, Zeitschr. f. El. 1925.

(Anion) oder subtrahiert (Kation). Der für die Eigenfrequenz maßgebende Schwerpunkt des kontinuierlichen Spektrums liegt etwas weiter im Ultraviolett, der Resonanzlinie wird schätzungsweise eine 1,6 mal so große Wellenlänge zugeteilt.

Die Verteilung der „Elektronenzahlen" auf kontinuierliche Absorption und Resonanzlinie ist dabei noch nicht eindeutig. Es ergibt sich so ohne weiteres die von Fajans und Joos gefundene „Verfestigung" großer Anionen durch kleine Kationen und die „Lockerung" großer Kationen durch kleine Anionen.

Nach diesen Grundsätzen gelingt die Berechnung der Molekularrefraktion sämtlicher Alkalihalogenide. Der Gang stimmt mit der Erfahrung gut überein, ebenso teilweise die Zahlwerte, doch ergeben sich diese für Salze mit großen Anionen und kleinen Kationen theoretisch zu klein (zu starke Verfestigung).

Auch die Molekularrefraktion der Erdalkalioxyde wird berechnet, endlich die der Halogenwasserstoffe.

München, Inst. f. theor. Physik, 1925.

(Eingegangen 12. August 1925.)

6. *Bemerkungen zu Hrn. C. Ramsauers Arbeit „Über den unmittelbaren Nachweis der elektrischen Erdladung“;*

von Teodor Schlomka.

Unter obigem Titel hat Hr. Ramsauer in dieser Zeitschrift[1]) eine Arbeit veröffentlicht, die zu folgenden Bemerkungen Anlaß gibt.

1. Hr. Ramsauer schreibt auf S. 449: „Aus der *Abnahme* des Potentials V mit der Höhe h über dem Erdboden pflegt man ....“ Das ist mißverständlich. Das Potential *nimmt zu* mit zunehmender Höhe, und man pflegt nach üblichem Sprachgebracuh dafür einfach zu sagen: Das Potential nimmt zu mit der Höhe, also gerade umgekehrt wie Hr. Ramsauer.

2. Es ist nicht einzusehen, inwiefern der Umstand, daß „alle Versuchsgrundlagen der Potentialtheorie ja gerade gegenüber dem Erdniveau als Bezugswert gewonnen sind“, eine Anwendung der Gleichung

$$\frac{dV}{dh} = -4\pi\sigma$$

zur Berechnung der Erdoberflächenladungsdichte bedenklich erscheinen lassen könne; auch die Tatsache, daß „der Potentialbegriff in seiner praktischen Anwendung stets nur relativen und niemals absoluten Charakter hat“, kann nicht die geringsten Bedenken erregen, in diesem Falle einen „Übergang von Laboratoriumsergebnissen zu kosmischen Schlüssen“ vorzunehmen.

3. Die gesamten Überlegungen, die Hrn. R. zur Einführung des „atomneutralen Zustandes“ veranlaßt haben,

---

1) C. Ramsauer, Ann. d. Phys. 75. S. 449—458. 1924.

sind als verfehlt zu betrachten. Hr. R. ist nämlich der Ansicht, daß man bisher die Erde als relativen Bezugskörper für die Ladung betrachtet habe und glaubt, demgegenüber den „atomneutralen Zustand“ als absolut gültigen Neutralwert der Ladung einführen zu müssen. Das ist ein Irrtum: *Auch bisher gilt die Ladung als etwas Absolutes*, und wenn man einem Körper eine positive oder negative Ladung zuschreibt, so heißt das nicht, positiv oder negativ in bezug auf die Erde. *Die Erde ist nur ein Bezugskörper für das Potential*; man kann auf einem Körper auch dann *positive Ladung* haben, wenn der Körper selber *negatives oder Null-Potential* hat.

Durch diesen Irrtum Hrn. Ramsauers sind mehrere Sätze seiner Arbeit unhaltbar geworden. Als Beispiel sei angeführt, daß Hr. R. auf S. 451 meint, es sei bei den Versuchen von Cavendish und Faraday über das Fehlen aller elektrischen Kräfte im Innern eines Leiters zunächst noch nicht gesagt, ob die bewiesene Neutralität des Leiterinnern eigentlich Erdneutralität (also Neutralität des Potentials!) oder Atomneutralität (also Neutralität der Ladung!) sei.

Im übrigen findet sich die von Hrn. R. bisher vermißte Angabe des „Neutralwertes“ schon bei Ebert.[1]) Solche Angaben des „Neutralwertes“ sind aber eher *Bilder*, als *Definitionen* des ladungslosen Zustandes. Man benutzt dabei die Begriffe „Elektronen“ und „positive Ladungseinheiten“, setzt also die Kenntnis des „ladungslosen Zustandes“, von dem sich die (negativen) Elektronen bzw. (positiven) Kernladungseinheiten in dem einen bzw. andern Sinne unterscheiden, schon voraus.

Einen Vorteil in experimenteller Hinsicht gewährt das Bild des „atomneutralen Zustandes“ auch nicht. Gerade in diesem Punkte zeigt sich deutlich, daß Hrn. Ramsauers „atomneutral“ *nur ein neues Wort* für „ladungslos“ ist. Die auf S. 450 angegebenen experimentellen Feststellungsmöglichkeiten des „atomneutralen Zustandes“ *folgen keineswegs aus der Definition* der „Atomneutralität“.

---

1) Ebert, Lehrbuch d. Physik, 2. Band, 1. Teil, Berlin u. Leipzig 1920, S. 16: „Ein Atom mit dem ihm eigentümlichen Gehalte an Elektronen nennen wir elektrisch neutral, ein Atom mit einem größeren Gehalte: elektrisch negativ, mit einem geringeren dagegen elektrisch positiv.“

4. Hr. **Ramsauer** schreibt auf S. 450: „Der atomneutrale Zustand eines Körpers läßt sich durch das Fehlen beschleunigender Kräfte im homogenen elektrischen Felde direkt nachweisen.“

Statt „beschleunigender“ muß es zunächst „verschiebender“ heißen. Denn im homogenen elektrischen Felde können auf einen ungeladenen Körper Kräfte wirken, die den Körper zu drehen suchen, und warum sollten diese Kräfte keine beschleunigenden sein?

Ferner muß es, streng genommen, statt „im homogenen elektrischen Felde“ heißen „im *unendlichen* homogenen elektrischen Felde“. Die das homogene Feld erzeugenden geladenen Platten müssen nicht nur unendlich groß sein, sondern sich auch noch in unendlich großem Abstand voneinander befinden. Denn im homogenen elektrischen Felde zwischen zwei unendlich großen Platten in endlichem Abstand *bewegt sich z. B. eine ungeladene Kugel* stets auf die Platte zu, der sie am nächsten steht.¹)

5. Es ist nicht einzusehen, wie *ein und dieselbe Tatsache*, nämlich das Vorhandensein freier Ladung auf der Platte P bei dem zweiten Versuchsschema Hrn. **Ramsauers**, *einmal* ein unmittelbarer Nachweis für die Erdladung, *das andere Mal* nur ein Maß für die Wirkung des Erdfeldes sein soll, je nachdem, ob man das Vorhandensein dieser freien Ladung dadurch feststellt, daß sie beim Erden von P über das Galvanometer zur Erde fließt, oder dadurch, daß sie eine mit dem Elektrometer feststellbare Änderung des Potentials von P bewirkt. Auch in der Form der Galvanometermessung kann man bei der zweiten Versuchsanordnung, wie eine einfache Überlegung²)

---

1) Man vergleiche **Drude-König**, Physik des Äthers, Stuttgart 1912, S. 113 u. 114 und W. v. **Ignatowski**, Archiv d. Math. u. Phys. (3) 16. S. 179 u. 331. 1910.

2) Das bei übergeklapptem P' geerdete P hat Erdpotential; hebt man die Erdung auf, entfernt P' und erdet dann wieder P über das Galvanometer, so würde dieses keinen Strom anzeigen, wenn nicht unmittelbar über P ein Feld vorhanden wäre. Denn P hat zunächst Erdpotential; durch das unmittelbar über P vorhandene Feld wird jedoch eine Elektrizitätsmenge (E) auf P gebunden und die frei gewordene Elektrizitätsmenge $(-E)$ bewirkt eine Änderung des Potentials von P, so daß eine Spannungsdifferenz zwischen Erde und der Platte P entsteht, die Veranlassung zu einem über das Galvanometer fließenden Strom gibt. Dieser Strom ist also lediglich ein Nachweis für das unmittelbar über P herrschende Feld.

zeigt, *nur auf das* unmittelbar über der Platte vorhandene *Feld schließen.*[1])

6. Hr. R. sagt auf S. 457, es sei eine „negative Gesamtladung der Erde primär vorhanden“. Diese Behauptung ist jedoch durch seine Versuche keineswegs begründet. Um die Gesamtladung der Erde angeben zu können, muß man an möglichst vielen, der geographischen Länge und Breite nach gleichmäßig verteilten Orten *zu genau derselben Zeit* das Feld oder die Ladungsdichte messen. Aus den bisher festgestellten *zeitlichen* Potentialgefälle-*Mittelwerten* der einzelnen Beobachtungsorte einen Durchschnittswert für die ganze Erdoberfläche (einschließlich der Polargebiete, von denen kaum Messungen vorliegen!) zu bilden und daraus auf die Gesamtladung zu schließen, ist ziemlich willkürlich.

So würde z. B. ein positiver Raumladungsgürtel, der sich — rings um die Erde parallel zum Äquator — nach Norden und Süden bis zu den höheren Breiten erstreckte, in den bisher meist untersuchten niederen und mittleren Breiten negative Elektrizität an der Erdoberfläche influenzieren; die (der Gesamtmenge nach gleich große) freie positive Elektrizität würde sich dann an den Polargebieten befinden und dort ein Feld erzeugen, das die umgekehrte Richtung hätte wie das in unseren Breiten im Mittel vorhandene Feld.

Es ist also noch längst nicht zwingend bewiesen, daß die Erde im ganzen einen Elektronenüberschuß über den ladungslosen Zustand besitzt. Hrn. Ramsauers Ladungsmessungen aber beweisen hierin nicht im geringsten mehr als die bisherigen Feldmessungen.

7. Schließlich sei darauf hingewiesen, daß Hrn. Ramsauers Methode den Luftelektrikern schon lange bekannt ist. Sie stimmt *im Prinzip* mit dem 1835 von Peltier angegebenen und seit 1853 besonders von Dellmann in Kreuznach benutzten Verfahren überein, eine Kugel durch Erden im Freien zu einem Teil der Erdoberfläche zu machen, sie zu isolieren und dann ihre Ladung im Zimmer an einem Elektro-

---

1) Daß dieser Versuch kein „unmittelbarer Nachweis der Erdladung“ sein könne, scheint Hr. R. übrigens zum Teil selber gemerkt zu haben, denn er sagt vorsichtigerweise, der Versuch verliere dadurch etwas an unmittelbarer Klarheit, als auch hier das Erdfeld die treibende Ursache sei.

meter festzustellen. Hrn. Ramsauers *Ausführung* dieser Methode entspricht ziemlich genau dem schon 1860 von S. W. Thomson angegebenen Verfahren.[1])

Halle a. S., den 30. August 1925.

---

[1]) S. W. Thomson, Ges. Abh., Berlin 1890, S. 202: „Legt man ein großes Metallblech an einer vollständig ebenen Stelle auf die Erde und auf dieses eine kreisförmige Platte von demselben Metall, hebt diese letztere nach Art der Coulombschen Prüfscheibe an einem isolierten Handgriff ab und bringt dieselbe an ein durch geeignete Bedeckung der äußeren Influenz entzogenes Elektrometer, so bekommt man eine Messung der Elektrizität für den betreffenden Zeitpunkt.“

(Eingegangen 2. September 1925.)

1925. № 19.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 78.

---

1. *Der Geschwindigkeitsverlust mittelschneller Kathodenstrahlen in Metallen aus direkten Messungen und aus Absorptionsversuchen;*

von A. Becker.

(Hierzu Tafel II und III.)

Bezüglich der Gesamtliteratur kann auf eine frühere eigene Mitteilung[1]) und insbesondere die umfassende Bearbeitung des Gebietes durch Hrn. **Lenard**[2]) hingewiesen werden. Aus ihr geht hervor, daß wir zwar über den Gesamtverlauf des Geschwindigkeitsverlustes über alle Geschwindigkeiten im wesentlichen unterrichtet sind, daß aber die Genauigkeit unserer Kenntnis in einzelnen Geschwindigkeitsgebieten noch wenig befriedigend ist. Auch bedarf die für die Ergründung der Strahlwege im Körperinneren wichtige Frage nach dem Gang des Geschwindigkeitsverlustes mit der Schichtdicke und dem Einfluß der letzteren auf die Homogenität der Geschwindigkeit in quantitativer Hinsicht noch systematischer Untersuchung.

Die gegenwärtige, schon vor einer Reihe von Jahren begonnene Untersuchung will in dieser Richtung weiterführen. Sie nimmt zu diesem Zweck zum erstenmal eine sorgfältige Analyse der Strahlgeschwindigkeit vor, indem sie einerseits die magnetische Zerlegbarkeit ins Einzelne verfolgt und andererseits das empfindlichste Reagens auf die Geschwindigkeit, die Strahlabsorption zu Hilfe nimmt.

Messungen im Geschwindigkeitsgebiet dieser Untersuchung, in der Nähe der halben Lichtgeschwindigkeit, liegen seit längerer Zeit nur von Hrn. v. **Baeyer**[3]) vor, der als Strahlenquelle ein radioaktives Präparat benutzt hat. Das Nachbargebiet nach kleineren Geschwindigkeiten hin ist in neuerer Zeit von Hrn. Eisenhut[1]) und von Hrn. Terrill[2]) untersucht worden, die beide die Strahlen einer Glühkathodenröhre benutzt haben. Die Ergebnisse dieser Arbeiten werden im Nachfolgenden mit den gegenwärtigen zusammengefaßt betrachtet werden.

---

[1]) A. **Becker**, Heidelb. Akad. d. Wiss. 4. Abh. 1917.

[2]) P. **Lenard**, Quantitatives über Kathodenstrahlen aller Geschwindigkeiten, Heidelberg 1918; Neuherausgabe mit Zusätzen 1925.

[3]) O. v. **Baeyer**, Physik. Ztschr. 13. S. 485. 1912.

1. Versuchsanordnung.

Dieselbe wird aus Fig. 1 ersichtlich. Strahlenquelle ist eine Gasentladungsröhre mit Aluminiumfenster in der Konstruktion, wie ich sie früher[3]) eingehend beschrieben und als Kontrollkopfröhre bezeichnet habe. Sie wird unter

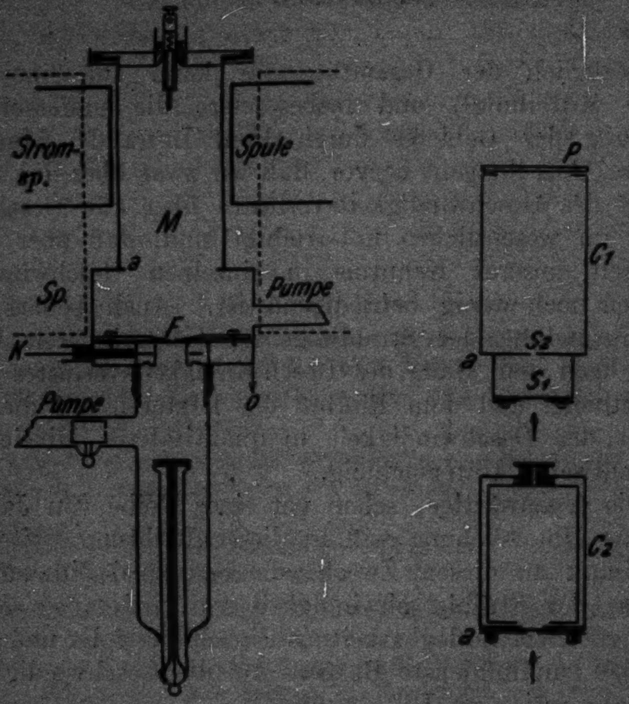


Fig. 1.

---

[1]) O. Eisenhut, Diss. Heidelberg 1921; siehe auch A. Becker, Ann. d. Phys. 75. S. 435. 1924.

[2]) H. M. Terrill, Phys. Rev. 22. S. 101. 1923.

[3]) A. Becker, Heidelb. Akad. d. Wiss. 4. Abh. 1917; über ihre Bewährung bei anderen Messungen siehe auch A. Becker, Ann. d. Phys. 67. S. 428. 1922.

Zwischenschaltung eines 8 Liter betragenden Ballastraumes an eine rotierende Quecksilberpumpe angeschlossen. Daß die nachfolgenden Versuche überhaupt in der zu beschreibenden Weise ausgeführt werden konnten und zu einer Sicherheit der Beobachtung führten, welche alle bisher mit irgendeiner Anordnung erreichte erheblich übertrifft, ist der selten erreichbaren außerordentlichen Konstanz der Gasverdünnung zu verdanken, welche während der ganzen Versuche anhielt. Nach Herstellung des geeigneten Vakuums blieb die Pumpe jeweils während der Ausführung der Versuche mehrere Tage gänzlich außer Betrieb, und danach genügten 1—2 Umdrehungen der Trommel, um den richtigen Zustand des Vakuums für eine ähnlich lange Zeit herzustellen. Als Spannungsquelle dient das Induktorium. Bezüglich der Bedingungen, unter denen dasselbe eine völlig einwandfreie Strahlung liefert, verweise ich auf die frühere eingehende Besprechung[1]) derselben.

Die der Beobachtung dienende Kathodenstrahlung tritt durch das Aluminiumfenster *F* in den Meßraum *M*. Er besteht aus einem Messingzylinder von 5 cm Durchmesser, der unten auf 8 cm erweitert und mit dem Kopf der Kathodenröhre verlötet ist, und der oben durch einen aufgeschliffenen und mit geruchfreiem Kitt gedichteten Metalldeckel luftdicht verschlossen werden kann. In diesen Zylinder können je nach der Art des Versuches geeignete Apparatteile bis zu dem Anschlag *a* eingeschoben werden (C_1 und C_2), worauf der Abschluß des oberen Deckels erfolgt. Der Raum *M* wird dann durch eine besondere Pumpe evakuiert, wobei es auf höchstes Vakuum (unter 0,001 mm) im allgemeinen nicht ankommt.

2. Strahlgeschwindigkeit.

Da beabsichtigt war, zunächst das Verhalten einer festgelegten Geschwindigkeit nach verschiedenen Richtungen zu verfolgen, so wurden die Erzeugungsbedingungen der Strahlen — Gasverdünnung und Parallelfunkenstrecke zur Röhre — für alle Versuche möglichst konstant erhalten.

Die Messung der Strahlgeschwindigkeit und die Prüfung ihrer Konstanz erfolgt in allen Fällen durch die magnetische

---

1) **A. Becker**, am erstgenannten Ort; außerdem **A. Becker**, Ann. d. Phys. 75. S. 435. 1924.

Ablenkung mit Hilfe eines Stromspulenpaares *s p* unter Verwendung des Einsatzes C_1. Dieser besteht aus einem in M einschiebbaren Zylinder, der nach unten eine Anordnung zweier feiner paralleler Spalte S_1 (0,11 mm) und S_2 (0,05 mm) und als Bedeckung die zur Strahlfixierung benutzte photographische Platte P trägt. Er kam in 2 Ausführungsformen zur Verwendung, die sich durch den Abstand der beiden Spalte (1,2 bzw. 2,5 cm) voneinander unterschieden. Der Strahlweg $S_2 P$ ist bei beiden 6 cm. Die Stromspule ist so hoch angeordnet, daß ihr Magnetfeld an der Stelle der Spalte praktisch verschwindet und erst dahinter im unbegrenzten Raum wirksam wird, so daß nicht etwa langsamere Anteile des ausgeblendeten Strahles vor S_2 ausgeschieden würden und dadurch der Beobachtung entgehen könnten.

Zur Bestimmung des *Absolutwertes der Strahlgeschwindigkeit* ist es nicht vorteilhaft, eine Ausmessung des Magnetfeldes längs des Strahlweges vorzunehmen und darüber zu integrieren. Statt dessen wurde eine Eichmethode in folgender Weise durchgeführt: Über die Anordnung wurde ohne irgendeine Änderung an derselben ein großes Stromspulenpaar *S p* geschoben, das als Normalspule über entsprechende Messingzylinder in *einer* Drahtlage exakt gewickelt war. Wurde der Spalt S_1 mit dünnster, die Geschwindigkeit nicht merklich ändernder Aluminiumfolie bedeckt und dadurch zur Strahlenquelle gemacht, so befand sich jetzt der ganze Strahlweg in dem sehr nahe homogenen Feld der Spulen. Die erforderliche Korrektur wegen der nicht strengen Homogenität und die Absolutbestimmung des Feldes erfolgte in der Weise, daß die Ablenkungen einer kleinen Bibilarspule[1]) an den einzelnen Stellen des Feldes mittels einer engeren, 30 cm langen Normalspule kompensiert wurden. Dann konnten die mit Hilfe von *s p* verursachten Strahlablenkungen mit denen durch *S p* verglichen und so in Geschwindigkeitsmaß übergeführt werden. In einer späteren Mitteilung wird auf solche absoluten Geschwindigkeitsbestimmungen im Zusammenhang mit anderen Fragen noch zurückzukommen sein.

Die *Homogenität* der benutzten Strahlung ist für die Messungen von grundsätzlicher Bedeutung. Sie muß daher besonders untersucht werden. Obwohl ich diese Frage bereits an früheren Stellen eingehend behandelt habe, seien doch noch weitere Belege hier beigebracht, die zeigen sollen, daß die immer noch in der Literatur bisweilen auftretende Ansicht, daß es unmöglich sei, mit der Gasentladungsröhre in Verbindung mit dem Induktorium praktisch homogene Kathodenstrahlen zu erhalten, durchaus irrig ist.

---

[1]) Vgl. A. Becker, Ann. d. Phys. 17. S. 381. 1905.

Fig. 2 (Taf. II) zeigt den ganzen Verlauf eines nach zwei Seiten abgelenkten und eines unbeeinflußten Kathodenstrahls bei sehr feinen, Fig. 3 bei relativ breiten Spalten. Von einem breiten Strahlspektrum kann keine Rede sein. Eine noch schärfere Prüfung gestattet die Vertikalstellung der photographischen Platte zur Strahlrichtung, die zu den anderen hier wiedergegebenen Bildern führt. Die Schärfe der abgelenkten Streifen steht hinter derjenigen der unabgelenkten kaum zurück; man erkennt höchstens die Spur einer Andeutung einer geringfügigen Verwaschung nach langsameren Geschwindigkeiten.

Einen noch tieferen Einblick ermöglicht die *mikrophotometrische Ausmessung*[1]) der Streifen. Das uns zunächst interessierende Ergebnis zeigt das erste Bild der Taf. III. Man findet den unabgelenkten Streifen 0 ganz rechts, den abgelenkten links; das nicht ganz gleichmäßig geschwärzte Zwischengebiet des Plattengrundes kommt nicht in Betracht. Die Vergrößerung beträgt 7,786, die bei der Photometrierung benutzte Spaltbreite 0,04 mm. Das abgelenkte Bild ist von ganz gleicher Schärfe wie das unabgelenkte; es zeigt aber eine geringe Verbreiterung. Da die Strahlverbreiterung aus geometrischen Gründen 0,5 v. H. beträgt, so berechnet sich eine überschüssige „physikalische“ Verbreiterung der wesentlichen Intensität um nur 0,6 v. H. nach der Seite kleinerer Geschwindigkeiten, während für die andere Seite keine Verbreiterung zu konstatieren ist. *Die an Intensität weit überwiegende Geschwindigkeit* der Kathodenstrahlen ist also *streng homogen* diejenige des Streifenmaximums, und die mit rasch abnehmender Intensität hinzukommende Inhomogenität an langsameren Strahlen erstreckt sich nur auf ein Geschwindigkeitsintervall von

---

1) Hrn. Prof. Dr. P. P. Koch in Hamburg, der die Registrierungen liebenswürdigst ermöglicht, und Hrn. Dr. C. Kuhlmann, der sie freundlichst ausgeführt hat, sage ich auch an dieser Stelle herzlichen Dank.

0,6 v. H. der Hauptgeschwindigkeit. Der sich anschließende, auf manchen Platten merkliche geringe Schleier[1]) ist vom Plattengrund kaum deutlich zu unterscheiden.

Daß irgendeine andere Erzeugungsweise mittelschneller Kathodenstrahlen zu noch schärferer Homogenität führen könnte, dafür liegt in der bisherigen Literatur keinerlei Beweis vor.

3. Geschwindigkeitsverlust.

Zur Bestimmung des Geschwindigkeitsverlustes von Metallfolien dienten diese jeweils als Bedeckung des Spalts S_1 des Metalleinsatzes. Die Versuche erfolgten durchweg in der Weise, daß abwechselnd eine photographische Aufnahme der Strahlbilder mit und ohne bedecktem Spalt aufgenommen wurde. Die magnetischen Ablenkungen mit Folie wurden dann jeweils mit dem Mittelwert der vorher und nachher ohne Folie gefundenen Ablenkung verknüpft. Mit welcher Konstanz sich im allgemeinen solche eingeschobenen Kontrollmessungen reproduzierten, möge aus der völligen Deckung von 8 solchen in Intervallen erhaltenen Aufnahmen der Fig. 5, Taf. II ersehen werden. Um möglichst gleiche Verhältnisse bei den Aufnahmen mit und ohne Geschwindigkeitsverlust zu haben, wurde der Spalt S_1 auch bei der Messung der Ausgangsgeschwindigkeit meist mit dünnster Aluminiumfolie (0,0006 mm) bedeckt, die selbst keine ersichtliche Geschwindigkeitsänderung hervorrief.

Während bei unbedecktem oder nur mit dünner Folie bedecktem Spalt wenige Entladungsschläge des Induktoriums ausreichten, um genügende Schwärzung der photographischen Platte zu erzielen, mußte die Zahl der notwendigen Entladungen bei dickeren Folien wegen ihrer vermehrten Strahlabsorption und Diffusion bisweilen sehr hoch gesteigert werden. Wo dies erforderlich war, erfolgten die Entladungen während längerer Zeit mit eingeschobenen Ruhepausen, um merkliche Temperatursteigerungen im Erzeugungsrohr und dadurch veranlaßte Änderungen der Gasverdünnung durchaus zu vermeiden. Auch war in solchen Fällen die nachträgliche Prüfung der Strahlgeschwindigkeit besonders wichtig. Daß die dabei gefundenen Geschwindigkeitsverluste in den betreffenden Folien mögliche Höchstwerte darstellen, ist daraus ohne weiteres er-

---

1) Der durch dünnste Zusatzfolien wegabsorbiert werden kann.

sichtlich, da eine etwaige Verschlechterung des Vakuums während der Aufnahme immer im Sinne einer Steigerung des Geschwindigkeitsverlustes wirkt. Ebenso ist die bei dickeren Folien sich findende Verbreiterung des abgelenkten Bildes als die unter den betreffenden Verhältnissen maximal mögliche anzusehen, da eine etwaige Vakuumänderung ebenfalls nur im Sinne einer Verbreiterung wirkt. Ob eine solche Störung tatsächlich vorliegt, kann aus der nachfolgenden Kontrollmessung der Geschwindigkeit ohne weiteres festgestellt werden. Als Folge längerdauernder Aufnahmen ist auch zum Teil neben dem seinerzeit erhältlichen nicht ganz einwandfreien Plattenmaterial der bei manchen Versuchen sich findende erhebliche Plattengrund anzusehen. Er erklärt sich durch das beim Kathodenstrahldurchgang erregte Leuchten des Gasrestes im Versuchsraum und wäre bei sorgfältigerer Evakuierung des letzteren zu vermeiden gewesen.

Die Ausmessung der Ablenkungen erfolgte mittels feiner Glasskala unter Einstellung auf die Stellen maximaler Schwärzung sowohl direkt auf den Originalplatten als auf deren Kopie. Mit welcher Genauigkeit diese Messung möglich war, zeigt die in der nachfolgenden Tab. 2 sich findende Zusammenstellung solcher Meßergebnisse mit den Angaben der späteren photometrischen Registrierung. Ist z_0 bzw. z der gegenseitige Abstand des abgelenkten und unabgelenkten Streifens bei unbedecktem und bei bedecktem Spalt, so wird das Geschwindigkeitsverhältnis der gemessenen Strahlung in beiden Fällen bei Berücksichtigung der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Elektronenmasse

$$\frac{v}{v_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{z}{z_0}\right)^2 - v_0^2\left(\left(\frac{z}{z_0}\right)^2 - 1\right)}},$$

wo v_0 rechts nur im Korrektionsglied erscheint.

a) Aluminium.

Um zunächst näher in das Wesen des Geschwindigkeitsverlustes einzudringen, seien die Registrierungen der Taf. III betrachtet. Sie veranschaulichen den Gang des Geschwindigkeitsverlustes mit wachsender Schichtdicke bei Aluminium. In Betracht kommen die beiden ausgezeichneten äußeren

Maxima, während der dazwischen liegende Plattengrund, dessen Inhomogenitäten auf den Originalplatten selbst kaum mit bloßem Auge erkennbar sind, nicht interessiert.

Man erkennt vor allem die ausgesprochene Verschiebung der abgelenkten Maxima nach links. Bevor wir uns dieser zuwenden, seien die Veränderungen der Gestalt dieser Maxima betrachtet. Während die Breite derselben anfänglich nur eine geringe Steigerung gegenüber dem nicht verlangsamten Bild zeigt, wächst diese mit zunehmender Foliendicke recht erheblich an. Die Homogenität der Geschwindigkeit nimmt also ab, und zwar treten, da die Breitensteigerung unsymmetrisch ist, bevorzugt kleinere Geschwindigkeiten hinzu. Die dadurch allmählich auftretende Verwaschung des Maximums macht sich bei weiter wachsenden Foliendicken — gemessen wurden bis 0,028 mm — in verstärktem Maße bemerkbar. Vergleicht man die Breiten von unabgelenktem und abgelenktem Bild an bezüglich der Intensität äquivalenten Stellen, so ergibt sich in quantitativer Hinsicht das folgende:

Tabelle 1.

Nr.	Aluminiumdicke mm	Erweiterung des Geschwindigkeitsgebiets vom Maximum	
		nach schnelleren Strahlen	nach langsameren Strahlen
1	0	0,0 v. H.	0,6 v. H.
2	0,0045	0,4	1,0
3	0,0090	0,9	1,3
4	0,0135	2,3	3,1
5	0,0180	3,0	8,6

Wie bereits bemerkt, sind diese Erweiterungen als Höchstwerte anzusehen, die aber im gegenwärtigen Fall durchaus nicht durch Änderungen der Strahlgeschwindigkeiten während der Aufnahmen zu erklären sind. Letztere wurden überhaupt nur bei Nr. 5 deutlich erkennbar; sie betrugen aber nur 0,9 v.H. der Ausgangsgeschwindigkeit (vgl. Tab. 2). Ebensowenig sind sie durch die geringfügige Inhomogenität der Anfangsgeschwindigkeit zu erklären, da deren langsamere Anteile bei Dickenzunahme des Metalls rasch wegabsorbiert werden.

Zur Einschätzung der Bedeutung dieses Befundes für unsere Kenntnis der Strahlwege im Metall ist hervorzuheben, daß bei unseren Versuchen streng nur solche Strahlen gemessen werden, welche das Metall genau in der Richtung der auftreffenden Strahlen[1]) verlassen.

Was den *wahrscheinlichsten Geschwindigkeitsverlust*, d. h. denjenigen der Maximalmenge der Strahlen betrifft, so kann derselbe aus dem registrierten Verlauf erst bei Hinzunahme der die Anfangsgeschwindigkeit kontrollierenden Zwischenmessungen entnommen werden. Zu diesem Zweck sei die ganze hierhergehörige Versuchsreihe vollständig in Tab. 2 zusammengefaßt.

Tabelle 2.

Magnetspulenstrom 10,25 Wb.

Nr.	Aluminiumdicke mm	Ablenkung z direkt gemessen mm	Ablenkung z aus der Registrierung mm	z/z_0
1	0	5,67	5,61	
2	0,0045	5,87	5,78	1,0285
2a	0	5,64	—	
3	0,0090	5,97	5,99	1,060
3a	0	5,67	—	
4	0,0135	6,07	6,09	1,074
4a	0	5,68	—	
5	0,0180	6,49	6,47	1,117
5a	0	5,73	—	

Die Übereinstimmung der am Original und auf den Registrierplatten gemessenen Ablenkungen ist so befriedigend, daß gegen die ersteren keine Bedenken zu erheben sind. Wo Registrierungen vorliegen, sind sie naturgemäß zu bevorzugen.

Diese Ergebnisse sind durch eine Reihe wiederholter und weiterer Messungen geprüft und vermehrt worden, was die folgende Tab. 3 in Zusammenfassung zeigt.

Obwohl die Messungen bei den dünnsten benutzten Folien infolge der Schärfe der Streifen mit großer Genauigkeit durchführbar sind, bleiben die relativen Unsicherheiten wegen der Kleinheit des Geschwindigkeitsverlustes, wie sich zeigt, ziemlich beträchtlich. Bei der größten Dicke war wegen der

---

[1]) Die Ausdehnung des Aluminiumfensters (1 mm Durchmesser) läßt bei größter Nähe der ersten Spaltblende eine Höchstschiefe der auffallenden Strahlen von 3° zu.

Tabelle 3.

Mittlere Ablenkung[1]) 11,06 mm/10 Wb.
Mittlere Eintrittsgeschwindigkeit[2]) $v_0 = 0,52$.

Aluminiumdicken mm					
0,0045	0,0090	0,0135	0,0180	0,0224	0,0280
Ablenkungsverhältnis z/z_0					
1,028	1,060	1,074	1,117	1,153	1,239
1,026	1,039	1,087	1,124	1,156	1,215
1,018	1,050	1,069	1,114	1,159	
1,024	1,040	1,082	1,112		
1,015	1,055	—	1,123		
1,018	1,055	—	1,111		
1,028	1,040				
1,023	1,045				
1,020					
1,018					
1,019					
1,021	1,048	1,078	1,117	1,156	1,227
Geschwindigkeitsverhältnis v/v_0					
0,985	0,965	0,944	0,918	0,894	0,855
Relative Geschwindigkeitsabnahme $-\frac{v - v_0}{v_0}$					
0,015	0,035	0,056	0,082	0,106	0,144
Absolute Austrittsgeschwindigkeit v					
0,512	0,502	0,491	0,477	0,465	0,445

großen Verwaschenheit der Streifen nicht mehr auf ein Schwärzungsmaximum, sondern nur auf die Mitte des starken Streifens einstellbar.

Der auf diesem Wege direkt gefundene Gang der Austrittsgeschwindigkeit mit der Schichtdicke findet sich zu späterer Verwendung in Fig. 8 mit Punkten • eingezeichnet.

b) Gold und Platin.

Das Ergebnis einiger kürzerer Versuche mit diesen Metallen findet sich in Tab. 4. Zum Vergleich sind die entsprechenden Aluminiumwerte beigefügt, berechnet auf die gleiche durchstrahlte Masse der Flächeneinheit.

---

1) Nach beiden Seiten zusammen.

2) Die Geschwindigkeiten werden durchgängig in Bruchteilen der Lichtgeschwindigkeit angegeben.

Tabelle 4.

$v_0 = 0,52$.

g/cm²	0,00208	0,00295	0,00354	0,00472	0,00506
			Ablenkungsverhältnis x/x_0.		
Gold	1,017	1,035	1,060	1,067	
	1,028	1,042	1,068	1,070	
	1,017	—	1,049		
Platin					1,123
					1,117
					1,123
					1,134
Aluminium	1,041	1,061	1,077	1,113	1,125

Der Geschwindigkeitsverlust in Gold ist deutlich kleiner als in Aluminium, während derjenige in Platin mit dem in Aluminium sehr nahe zusammenfällt.[1] Das Aussehen der abgelenkten Bilder deutet in allen drei Fällen auf eine ganz ähnliche Verbreiterung mit zunehmender Schichtdicke hin.

4. Absorption.

Da die direkte Geschwindigkeitsmessung wegen mit wachsender Schichtdicke rasch zunehmenden Intensitätsmangels nur auf dünnere Schichten mit Erfolg anwendbar ist, habe ich versucht, auf dem Wege der Absorptionsuntersuchung weiterzukommen. Die bekannte starke Abhängigkeit der Absorption von der Strahlgeschwindigkeit läßt dabei für letztere eine besonders genaue Festlegung zu, falls es gelingt, die durchgehende Intensität als Funktion der Schichtdicke mit Genauigkeit festzulegen. Andererseits erschwert allerdings gerade dieser starke Absorptionsgang genaue Messungen, und dies ist der Hauptgrund dafür, daß wir heute über die Absolutwerte der Absorption immer noch wenig befriedigend unterrichtet sind.

Die im vorstehenden bereits erkannte ausgezeichnete Geschwindigkeitskonstanz der gegenwärtigen Versuche, die wesentlich über diejenige älterer Arbeiten hinausgeht, gestattet jetzt auch Absorptionsangaben zu machen, denen ein bisher nicht erreichter Grad an Sicherheit zuzuschreiben ist. Es soll diese Aussage hier vor allem auf den Gang der Absorption mit der Schichtdicke bezogen werden, während sich mit der Frage der Absolutwerte, die eine gleichsichere Geschwindigkeitsbestimmung voraussetzt, eine spätere Mitteilung näher beschäftigen soll.

---

[1] Vgl. die Übersicht über die hierhergehörige Literatur bei P. Lenard, Quantitatives . . . . S. 61.

Zur Absorptionsmessung wurde der Einsatz C_2 benutzt. Seine 8 mm weite Öffnung wurde jeweils mit der zu untersuchenden Folie bedeckt, und die aus ihr austretende Strahlung gelangte in einen Käfigauffänger, der durch Vermittelung des am Deckel des Beobachtungsraumes angebrachten federnden Kontakts mit dem Elektrometer in Verbindung stand. Der Beobachtungsraum war jeweils evakuiert (hierfür erforderliche Öffnungen an den Zylindern für die Luftzirkulation sind in der Zeichnung weggelassen); es werden also durchweg Elektronenmengen gemessen. Zur Intensitätskontrolle wird jetzt die Kontrollanordnung K benutzt und mit einem zweiten

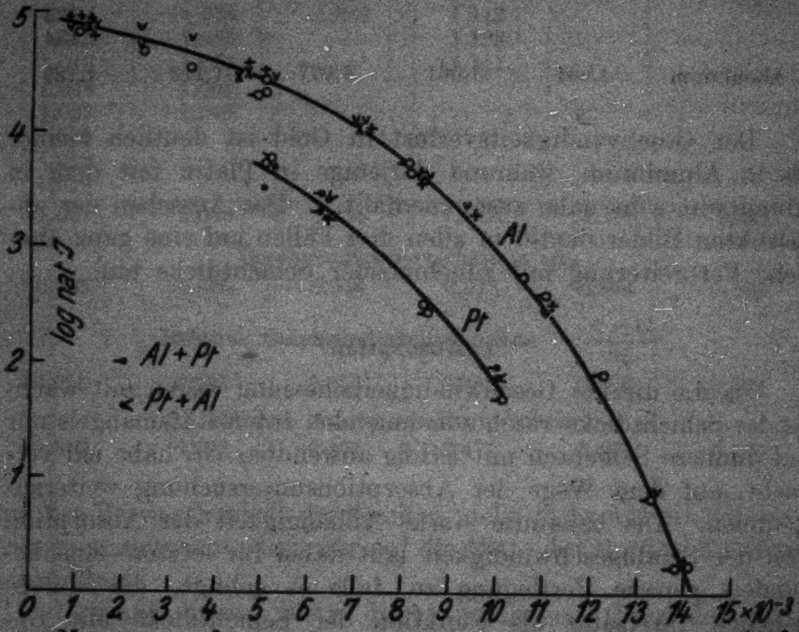


Fig. 6.

Elektrometer in Verbindung gesetzt. Alle Intensitätswerte beziehen sich daher auf die gemessene Kontrollmenge als Einheit. Daß im Gegensatz zu den Geschwindigkeitsmessungen das ganze hinten austretende Strahlenbündel aufgefangen wird, kann im Normalfall des Strahlenlaufs kein prinzipieller Unterschied sein.

Zur dauernden Prüfung der Geschwindigkeitskonstanz wurde zwischen jeweils einige Absorptionsmessungen eine magnetische Ablenkungsmessung mit dem Einsatz C_1 eingeschaltet. Im ganzen wurden für wachsende Aluminiumdicken 57 Absorptionsmessungen an verschiedenen Tagen durchgeführt, die sich, wie man erkennt, vorzüglich aneinander anschließen. Das Ergebnis zeigt die zugehörige Kurve der Fig. 6, auf welcher ein Teil der beobachteten Werte — die zu einer zusammenhängenden Versuchsreihe gehörigen mit gleichem Zeichen — eingetragen ist. Die beiderseitige magnetische Ablenkung der Eintrittsstrahlung lag bei 10 Ablenkungsmessungen zwischen den Grenzen 11,05 und 11,11 mm/10 Wb. und betrug im Durchschnitt 11,06, d. i. genau der gleiche Wert, der auch den früheren Ablenkungsmessungen entspricht. Die Messung der Austrittsgeschwindigkeit und der Absorption beziehen sich also streng auf die gleiche Eintrittsgeschwindigkeit. Der Vergleich der beiden untereinander ist also ohne weiteres zulässig.

Wegen des Hinzukommens von Rückdiffusion und Austrittssekundärstrahlung der Folien bleiben die absoluten Strahlintensitäten außer Betracht. Von Wichtigkeit ist dagegen der Gang mit der Schichtdicke. Da die Ordinaten der maßgebenden Kurve die natürlichen Logarithmen der jeweils austretenden Intensität, die Abszissen die durchstrahlte Masse der Flächeneinheit angeben, so gibt ihre Steigung sofort den auf die Masseneinheit des Körpers bezogenen sogenannten spezifischen Absorptionskoeffizienten.

Die bis zu Aluminiumdicken von 0,05 mm gehende Kurve zeigt dauernd zunehmende Steigung[1]) entsprechend der mit abnehmender Geschwindigkeit wachsenden Absorption. Der

---

[1]) Man sieht auch, daß es bei etwas geringerer Meßgenauigkeit noch leicht möglich wäre, durch die Beobachtungspunkte eine ausgleichende Gerade bis nahe zur Kurvenmitte zu legen, was Konstanz des Absorptionsvermögens auf diesem ganzen Gebiet anzeigen würde.

Gang der letzteren findet sich in Fig. 7 durch die Kurve 1 veranschaulicht und durch die Zahlen der Tab. 5 belegt.

Um diesen Gang zu *Geschwindigkeitsbestimmungen* auszuwerten[1]), muß derjenige der Absorption mit der Geschwindigkeit aus anderweitigen Versuchen bekannt sein. Umgekehrt könnte man den letzteren aus unserer Kurve entnehmen, soweit die zu den Abszissenwerten gehörigen Austrittsgeschwindigkeiten bekannt sind. Im Gebiet der kleineren Dicken stehen uns beide Wege zur Verfügung; es ist also hier ein Anschluß der beiden Verfahren aneinander zu erwarten, sofern sie auf zutreffender Grundlage durchgeführt werden.

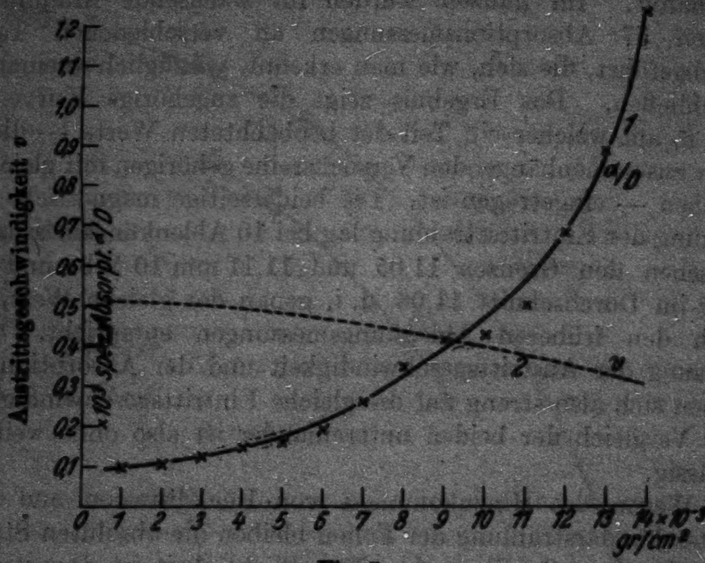


Fig. 7.

Unserer Auswertung sei für das in Betracht kommende Geschwindigkeitsgebiet der von Hrn. **Lenard** angegebene Gang der Absorption[2]) mit der Geschwindigkeit zugrunde gelegt. Das Ergebnis findet sich in Tab. 5 und durch die Kurve 2 der Fig. 7 wiedergegeben.

---

[1]) Zu beachten ist noch, daß der beobachtete Intensitätsgang dadurch etwas gefälscht ist, daß der Austrittssekundärstellung, die wir mitmessen und der Primärintensität proportional setzen, ein mit v variabler Proportionalitätsfaktor zugehört. Man überzeugt sich aber leicht durch eine Überrechnung, daß die dadurch veranlaßte Korrektion für unsere Schlüsse ganz unwesentlich ist.

[2]) Daß die Absolutwerte nicht ganz übereinstimmen, ist dabei nicht von wesentlicher Bedeutung.

Tabelle 5.

Aluminium. $v_0 = 0{,}52$.

Masse g/qcm	Dicke mm	α/D $\frac{\text{cm}^{-1}}{\text{g/ccm}}$	v
0,001	0,00370	95	0,516
0,002	0,00741	102	0,507
0,004	0,0148	145	0,492
0,006	0,0222	192	0,463
0,008	0,0296	317	0,432
0,010	0,0370	430	0,392
0,012	0,0444	670	0,357
0,014	0,0519	1240	0,314

Die in kleinerem Bereich der Dicke gemessene Absorption des *Platins* zeigt die Kurve Pt der Fig. 6. Sie läuft derjenigen des Aluminiums nahe parallel; man findet nur eine geringe Zunahme der Entfernung beider nach größeren Dicken. Der Geschwindigkeitsgang und der Absolutwert des auf die gleiche Masse bezogenen Absorptionskoeffizienten ist bei Platin also nur um ein geringes größer als bei Aluminium. Dies geht auch deutlich aus einigen gleichzeitig auf der Kurve verzeichneten Beobachtungen hervor, bei denen Aluminium und Platin kombiniert wurden. Die erhaltenen Werte der durchgehenden Intensität liegen gut auf der Platinkurve, wenn man auf der Abszisse einfach die durchstrahlte Masse ohne Rücksicht auf ihre chemische Verschiedenheit aufträgt. Das gleiche Verhalten haben wir beim Geschwindigkeitsverlust gesehen.

Daß die Platinkurve erheblich tiefer liegt gegen Aluminium, erklärt sich aus seiner erheblich stärkeren Rückdiffusion. Diese erfolgt bei den Metallkombinationen im einen Fall (Al-Pt) hauptsächlich in der Tiefe, im anderen Fall (Pt-Al) in der Nähe der Oberfläche. Daß die durchgegangene Intensität von der Reihenfolge beider Schichten unabhängig ist, steht mit den Entwicklungen Hrn. **Lenards**[1]) in vollem Einklang.

---

[1]) P. **Lenard**, Quantitatives .... S. 222.

Die zusammenfassende Betrachtung der Ergebnisse beider Versuchsverfahren bezüglich des Geschwindigkeitsverlustes und die Zusammenstellung derselben mit der bisherigen Kenntnis ergibt das in Fig. 8 gezeichnete Bild.

Die nach Durchsetzen der auf der Abszisse angegebenen Aluminiumdicken vorhandenen Austrittsgeschwindigkeiten der Kathodenstrahlen sind in der Kurve 1 vereinigt. Die unmittelbar gemessenen Werte sind mit Punkten •, die aus der Absorption hergeleiteten mit Ringen ○ aufgetragen. Der Anschluß beider aneinander ist recht befriedigend, so daß sich die Kurve bis zu Dicken von 0,045 mm wohl unbedenklich fortführen läßt.

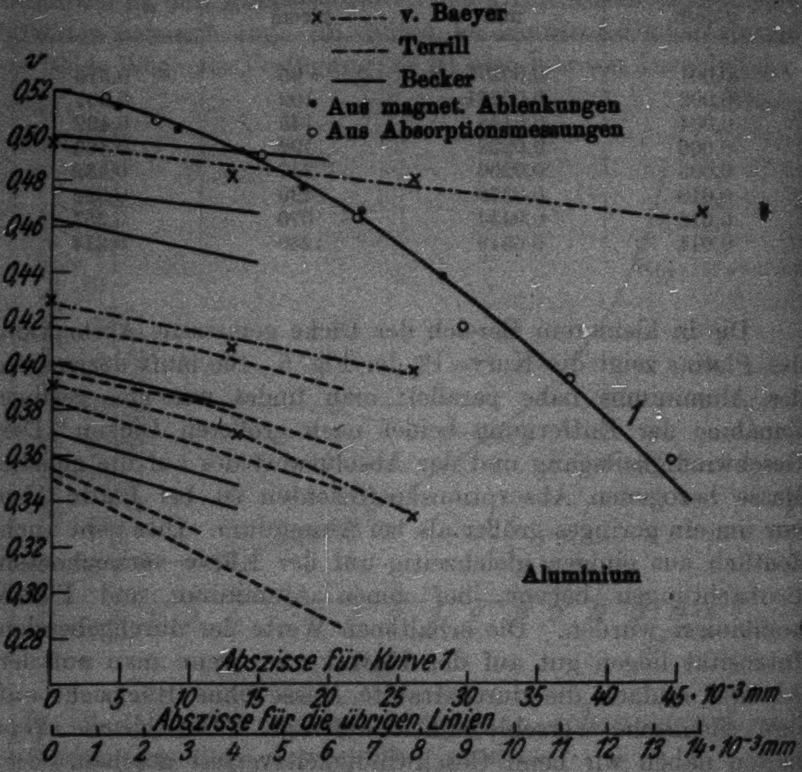


Fig. 8.

Vergleichen wir unsere Ergebnisse mit der bisherigen Literatur, so ist zunächst festzustellen, daß wir mit Hrn. Eisenhut in dem Nachweis übereinstimmen, daß der Geschwindigkeitsverlust mittelschneller Strahlen in dünneren Folien so nahe einheitlich ist, daß von einem merklichen Geschwindigkeitsspektrum keine Rede sein kann, ganz wie es meinen früheren Ergebnissen[1]) und den ältesten Beobachtungen von Hrn. **Lenard**[2]) aus dem Jahre 1894 entspricht, die ohne Grund als zweifelhaft angesehen wurden. Bei dickeren Schichten, d. h. abnehmender Geschwindigkeit, macht sich allerdings eine Verbreiterung des Geschwindigkeitsintervalls geltend, die aber wesentlich geringer ist, als dies bisweilen in der Literatur angegeben wird. Würde diese Verbreiterung mit abnehmender Geschwindigkeit schnell anwachsen, so wäre ein erheblich stärkerer Geschwindigkeitsverlust bei kleineren Geschwindigkeiten zu erwarten, als wie er tatsächlich beobachtet wird.

Zum quantitativen Vergleich der Höhe des Geschwindigkeitsverlustes mit der bisherigen Kenntnis, greifen wir die Steigungen der Gesamtkurve stückweise heraus und setzen sie unter Übergehen zu einem vergrößerten Abszissenmaßstab an diejenige Ordinatenhöhe an, die dem betreffenden Geschwindigkeitsgebiet zugehört. Auf diese Weise sind die ausgezogenen Geraden der Fig. 8 erhalten worden. Ihre Steigung nimmt, wie man sieht, naturgemäß mit abnehmender Geschwindigkeit zu. Durch strichpunktierte und gestrichelte Gerade sind entsprechend die direkten und nur bis zu den durch die Abszisse gegebenen Dicken durchgeführten Messungen von Hrn. **v. Baeyer** und Hrn. **Terrill** verzeichnet. Alle Geraden laufen sehr ähnlich. Während die Schiefe der Geraden des Hrn. **Terrill** nur wenig merklich geringer ist als diejenige der **v. Baeyerschen** Geraden, ist der Unterschied beider gegenüber den eigenen Messungen deutlicher ausgesprochen. Die letzteren sprechen (bis auf das Geschwindigkeitsgebiet bei 0,40, wo ein herausfallender Punkt die Sicherheit unserer Kurve offenbar beeinträchtigt) für kleinere Geschwindigkeitsverluste ganz in Übereinstimmung mit der Vermutung Hrn. **Lenards** über die wahren Werte. Allerdings ist diese Abweichung unserer Ergebnisse von denjenigen Hrn. **v. Baeyers**, namentlich bei den größeren Geschwindigkeiten, wesentlich geringer, als wie sie Hr. **Lenard** für die wahren Werte glaubte annehmen zu müssen.

---

1) **A. Becker**, Heidelb. Ak. d. Wiss. A. 13. 1917.

2) Vgl. **P. Lenard**, Quantitatives . . . S. 25.

5. Grenzdicke.

Unter der Grenzdicke eines Körpers für eine bestimmte Eintrittsgeschwindigkeit verstehen wir diejenige Dicke, welche diese Geschwindigkeit infolge Geschwindigkeitsverlustes auf Null herabsetzt. Ihre experimentelle Bestimmung gibt also Anhaltspunkte für den Gang des Verlustes mit der Dicke und kann die Bestimmung des letzteren in gewisser Weise prüfen. Allerdings kann es sich bei den hierauf gerichteten Versuchen nur um eine je nach der verfügbaren Strahlintensität mehr oder weniger große Annäherung handeln, da in Wirklichkeit die Vernichtung der Strahlintensität nicht so sehr durch Geschwindigkeitsverlust als durch Absorption erfolgt.

Unsere Versuche zeigten in dieser Hinsicht, daß die Aluminiumdicke 0,056 mm noch gut merkliche Strahlen hindurchließ, und daß bei 0,064 mm durchgehende Elektronen gerade noch erkennbar wurden, wenn zahlreiche Entladungen zur Anwendung kamen. Wurde eine mit 0,070 mm Aluminium bedeckte photographische Platte im Vakuum eine Stunde lang mit Ruhepausen bestrahlt, so war keine Schwärzung nachweisbar. Da man hier immer noch mit dem Hinzukommen von Wellenstrahlung hätte rechnen können, so darf diese Dicke wohl nahe als Grenzdicke angesprochen werden. Beachtet man nun, daß nach unseren Versuchen eine Dicke von 0,045 mm die benutzte Strahlgeschwindigkeit auf 0,85 herabsetzt, so wäre für letztere als Grenzdicke die Differenz 0,025 mm zu fordern. Da dies mit Hrn. Lenards Angabe gut übereinstimmt, ist anzunehmen, daß unterhalb $v = 0{,}85$ der von Hrn. Lenard angenommene Geschwindigkeitsverlust mit den vorliegenden Beobachtungen in Einklang ist. Tatsächlich bemerkt man in der Nähe von $v = 0{,}85$ eine zunehmende Annäherung unserer Ergebnisse an Hrn. Lenards Annahmen. Andererseits wäre nach letzteren für unsere Ausgangsgeschwindigkeit der merklich höhere Wert von etwa 0,10 mm als Grenzdicke zu fordern, was offenbar eine zu weitgehende Extrapolation aus unseren Versuchen wäre, so daß der beobachtete größere Geschwindigkeitsverlust im Gebiet größerer Geschwindigkeiten auch hierdurch gestützt wird.

Zusammenfassung.

1. Der Geschwindigkeitsverlust mittelschneller Kathodenstrahlen in Metallen wird durch magnetische Ablenkungs-

versuche, durch Absorptionsmessungen und eine Annäherung an die Grenzdicke experimentell untersucht.

2. Die Messungen zeichnen sich durch die im einzelnen nachgewiesene Vollkommenheit der benutzten Eintrittsstrahlung in bezug auf Konstanz und Homogenität der Geschwindigkeit aus.

3. Die Ablenkungsversuche sind bis zu einer Dicke von 0,028 mm Aluminium durchgeführt worden, um den Gang des Geschwindigkeitsverlustes mit der Dicke bzw. mit der Geschwindigkeit festzulegen.

4. Ein vertiefter Einblick in die Art des Geschwindigkeitsverlustes wird durch mikrophotometrische Ausmessung der im Magnetfeld erhaltenen Photogramme gewonnen.

5. Hierdurch wird gezeigt, daß der Geschwindigkeitsverlust in dünneren Schichten mit großer Annäherung einheitlich ist und daß bei größeren Dicken eine langsam wachsende Verbreiterung des austretenden Geschwindigkeitsbereichs auftritt.

6. Die Absorptionsmessungen zeigen einen starken Anstieg des Absorptionskoeffizienten mit wachsender Schicht entsprechend der Strahlverlangsamung im Metall. Die hieraus herleitbaren Geschwindigkeitsverluste schließen sich den direkt gemessenen voll befriedigend an.

7. Auf gleiche Masse bezogen sind die Geschwindigkeitsverluste in Aluminium und Platin nahe gleich. Dies trifft auch auf die Absorption zu. Gold verursacht deutlich kleinere Verluste als diese genannten Metalle.

8. Die Absolutwerte des Geschwindigkeitsverlustes in Aluminium sind etwas kleiner als die von Hrn. v. **Baeyer** gefundenen, und nähern sich bei abnehmender Geschwindigkeit den von Hrn. **Lenard** angegebenen.

[redacted]

Heidelberg, Radiologisches Institut und Theoretisch-Physikalischer Apparat.

Eingegangen 1. September 1925.

2. *Über die Geschwindigkeit der sekundären Kathodenstrahlung;*

von A. Becker.

Der in einigen vorhergehenden Arbeiten begonnene Versuch der Ergründung des allgemeinen Mechanismus der Elektronenauslösung aus Materie durch die vergleichende Untersuchung der verschiedenen bekannten Emissionsprozesse soll in gegenwärtiger Arbeit weitergeführt werden.

Nachdem zunächst der Vergleich zwischen der *glühelektrischen* und der *lichtelektrischen Wirkung* gezeigt hatte[1]), daß der Emissionsvorgang praktisch in ganz gleicher Weise abläuft, ob ein Körper thermisch oder durch die gleiche Temperaturstrahlung lichtelektrisch erregt wird, fand sich[2]), daß auch die sog. *Delta-Strahlung* zur thermischen Elektronenemission nahe Beziehungen hat, insofern die Geschwindigkeitsverteilung der emittierten Elektronen beider Prozesse auf die gleiche Gesetzmäßigkeit zurückführbar ist. Aus der Form dieses Gesetzes — Maxwellsche Verteilung der inneren Lineargeschwindigkeiten — war zu schließen, daß *die emittierten Elektronen nicht ursprünglich freie, sondern im Atom gebundene und erst durch den speziellen Erregungsvorgang befreite Elektronen* sein müssen.

Zu weiterem Eindringen in diese Verhältnisse war es wichtig, auch die Erregung durch die andere Korpuskularstrahlung, die uns in den Kathodenstrahlen zur Verfügung steht, unter den genannten Gesichtspunkten zu studieren. Damit sollte namentlich auch der besonders wichtigen Frage der *Absolutwerte der Elektronengeschwindigkeit* näher getreten werden. Während diese bei der glühelektrischen und der lichtelektrischen Wirkung durch die Temperatur des erregten bzw. des erregenden Körpers oder die erregende Wellenlänge festgelegt sind, entzieht es sich im Falle der δ-Strahlung noch völlig unserer Kenntnis, welches hierbei die Bestimmungsstücke für die Absolutgeschwindigkeit der emittierten Elektronen sind. Anhaltspunkte hierfür sind vor allem von der Untersuchung des Einflusses der Geschwindigkeit bzw. der Energie der erregenden Korpuskularstrahlung zu erwarten. Wenn das entsprechende Studium der δ-Strahlung praktisch Einflußlosigkeit der Geschwindigkeitsvariation der erregenden α-Strahlen ergeben hat, so könnte man für dieses negative Ergebnis noch die hier nur geringe Variationsmöglichkeit verantwortlich machen. Demgegenüber ist eine Entscheidung der Frage mit Sicherheit bei Erregung durch Kathodenstrahlen zu erlangen, deren Geschwindigkeit unschwer in weitesten Grenzen variierbar ist.

---

[1]) A. Becker, Ann. d. Phys. 60. S. 30. 1919.

[2]) A. Becker, Ann. d. Phys. 75. S. 217. 1924; 75. S. 781. 1924.

Nachdem zuerst durch Hrn. **Lenard**[1]) die in allen Fällen sehr geringe Geschwindigkeit der sekundären Kathodenstrahlen nachgewiesen und durch meine Beobachtungen[2]) eine erste Andeutung eines offenbar geringen Ganges dieser Geschwindigkeit mit derjenigen der erregenden Primärstrahlung erbracht worden war, ist die Sekundärstrahlung vielfach Gegenstand weiterer Untersuchung gewesen. Ihre Kenntnis ist durch sie bisher wesentlich gefördert worden, soweit sie sich auf die Sekundärstrahlausbeute und die zur Erregung erforderliche Grenzgeschwindigkeit in Gasen bezieht.[3]) Dagegen ist die uns gegenwärtig besonders interessierende Frage der Verteilung und des Absolutwerts der Sekundärstrahlgeschwindigkeit noch vollständig ungelöst geblieben. Dies ist zum Teil auf eine hierfür wenig geeignete Apparatanordnung[4]) oder die ungenügende Auswertung einer prinzipiell geeigneten Versuchsweise[5]), zum über-

---

1) P. **Lenard**, Ann. d. Phys. 12. S. 476. 1903; 15. S. 485. 1904.

2) A. **Becker**, Ann. d. Phys. 17. S. 441. 1905.

3) Vgl. P. **Lenard**, Quantitatives über Kathodenstrahlen aller Geschwindigkeiten. Heidelberg 1918 und 1925.

4) Aus diesem Grunde sind z. B. die an sich wertvollen Beobachtungen von O. v. **Baeyer**, Verh. d. D. Phys. G. 10. S. 96 u. 953. 1908; Phys. Ztschr. 10. S. 168. 1909; A. **Gehrts**, Ann. d. Phys. 36. S. 995. 1911; N. **Campbell**, Phil. Mag. 28. S. 286. 1914 für unsere Frage nicht quantitativ verwertbar.

5) Vgl. C. **Füchtbauer**, Verh. d. D. Phys. Ges. 8. S. 394. 1906; Phys. Ztschr. 7. S. 748. 1906; H. M. **Dadourian**, Phys. Rev. (2) 14. S. 484. 1919; H. E. **Farnsworth**, Phys. Rev. 20. S. 358. 1922.

wiegenden Teil aber darauf zurückzuführen, daß bisher in keinem mir bekannten Fall mit Erfolg der Versuch gemacht worden ist, eine scharfe Trennung der Sekundärstrahlung von der sie begleitenden diffundierten primären Stahlung vorzunehmen.[1] Dies hat seinen Grund weniger in der technischen Schwierigkeit dieser Trennung als in dem häufig sich zeigenden Mangel an klarer Einsicht in das Wesen der Sekundärstrahlung, welcher das Bedürfnis einer Trennung überhaupt nicht aufkommen ließ.

Die gegenwärtige Untersuchung setzt daher neue Beobachtungen voraus. Sie kann dabei in manchen die Messung von Elektronenaustrittsgeschwindigkeiten allgemein betreffenden Fragen auf frühere Mitteilungen[2] verweisen und sich im wesentlichen auf die Darstellung der Lösung der vorliegenden besonderen Fragen beschränken.

1. Prinzip der unmittelbaren Messung.

Homogene Kathodenstrahlen variierbarer Geschwindigkeit treffen vertikal auf einen festen Leiter im Zentrum einer evakuierten leitenden Hohlkugel. Gemessen wird nach der Gegenfeldmethode im zentralen elektrischen Feld die Geschwindigkeitsverteilung der aus dem Leiter austretenden Elektronen.

Diese Methode hat den Vorteil, daß alle emittierten Elektronen gemessen werden und daß daher die für die Messung erforderliche Elektronendichte so gering bleiben kann, daß eine Beeinflussung des Ergebnisses durch die Eigenkräfte der Elektronen (die sog. Raumladung) völlig auszuschließen ist. Daß dabei gleichzeitig Elektronen verschiedener Emissionsrichtung zur Messung kommen, dürfte jedenfalls insofern unbedenklich sein, als eine Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Emissionsrichtung, die bei der δ-Strahlung ebenso wie bei der lichtelektrischen Wirkung als fehlend nachgewiesen ist, auch bei der Sekundärstrahlung nicht anzunehmen ist. Andererseits wird auch eine etwaige Richtungsabhängigkeit der Geschwindigkeit rückdiffundierter Primärelektronen[1]) das Endergebnis nicht beeinträchtigen, falls es gelingt, die Sekundärstrahlung rein abzutrennen. Immerhin wird eine Prüfung der Ergebnisse an Elektronen mit einheitlicher Emissionsrichtung, die wir einer späteren Arbeit vorbehalten, wertvoll sein.

---

[1] Vgl. namentlich H. G. J. **Moseley**, Proc Roy. Soc. A. 87. S. 250. 1912; M. **Ishino**, Phil. Mag. 32. S. 202. 1916; J. G. **Barber**, Phys. Rev. 17. S. 322. 1921; L. E. **Mc Allister**, Phys. Rev. 21. S. 122. 1923. Die bei M. **Baltruschat** u. H. **Starke**, Phys. Ztschr. 23. S. 403. 1922, sich findende Angabe, daß die Sekundärstrahlung fester Körper erst bei Primärgeschwindigkeiten über 6000 Volt merklich von rückdiffundierter Primärstrahlung begleitet sei, wird weder durch meine eigene Erfahrung, noch durch die Beobachtungen der genannten Literatur gestützt. Die weitere Angabe, daß Ruß „besonders weiche Sekundärstrahlen" gebe, erklärt sich durch das gerade in diesem Falle erhebliche Zurücktreten rückdiffundierter (schnellerer) Begleitstrahlen.

[2] A. **Becker**, Ann. d. Phys. 58. S. 393. 1919; 75. S. 217. 1924.

2. Abtrennung der Sekundärstrahlen.

Unter der sekundären Kathodenstrahlung eines Körpers verstehen wir streng diejenigen ursprünglich diesem Körper angehörigen Elektronen, welche durch Einwirkung vorgegebener „primärer“ Kathodenstrahlen aus diesem ausgelöst werden. Das entscheidende Merkmal für die Sekundärstrahlung ist also ihr Ursprung. Dieser ist aber im allgemeinen für die emittierten Elektronen eines derart erregten Körpers nicht angebbar. Denn da die Erregung nicht Absorptionswirkung, sondern mit Geschwindigkeitsverlust des Primärelektrons verbundene Durchquerungswirkung ist[2]), so resultiert stets eine Mischung von sekundären und mehr oder weniger verlangsamten primären Elektronen. Zu deren Trennung bedarf es daher eines anderen Kriteriums für die Sekundärstrahlung. Als solches steht nur die von Hrn. **Lenard** gezeigte relativ geringe Geschwindigkeit der letzteren zur Verfügung. Man wird daher die Möglichkeit einer Unterscheidung um so eher erwarten dürfen, je höher die benutzte Primärgeschwindigkeit und damit auch der ursprüngliche Geschwindigkeitsunterschied beider Elektronensorten ist. Andererseits wird die Schwierigkeit der Unterscheidung mit der Annäherung der Primärgeschwindigkeit an die sekundäre wachsen und schließlich unüberwindlich werden können.

---

[1]) Vgl. C. **Davisson** u. C. H. **Kunsmann**, Phys. Rev. **22**. S. 242. 1923, deren Ergebnisse aber vielleicht erheblich durch Raumladungen beeinträchtigt sind.

[2]) Vgl. P. **Lenard**, Quantitatives ... S. 137.

Um mit einigem Erfolg noch zu möglichst kleinen Primärgeschwindigkeiten herabgehen zu können, hat sich für die gegenwärtige Untersuchung der Kunstgriff vorteilhaft erwiesen, einen Körper zu erregen, der bei ausreichender Sekundärstrahlung eine möglichst geringe Rückdiffusion primärer Strahlung aufweist. Als besonders günstig und in ihren Eigenschaften völlig konstant fand sich eine auf ein beliebiges Metall aufgetragene, noch durchscheinende *Rußschicht.*[1]) Mit ihr wurde als untere Grenze eine Primärgeschwindigkeit von 24 Volt benutzt; die benutzte obere Grenze betrug 1075 Volt. Innerhalb dieses Bereiches wurde die Sekundärstrahlung bei elf verschiedenen Primärgeschwindigkeiten verfolgt.

3. Versuchsanordnung.

Dieselbe wird durch Fig. 1 in etwa $^1/_5$ natürlicher Größe wiedergegeben. Sie besteht im wesentlichen aus einer innen verkupferten Glaskugel von etwa 10 cm Durchmesser mit zwei

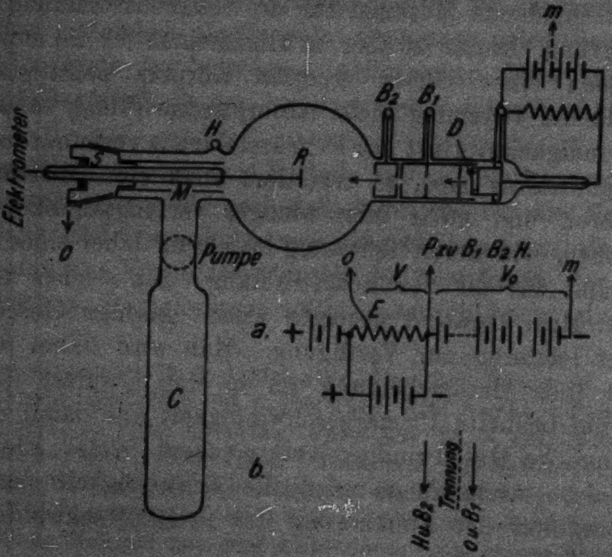


Fig. 1.

---

[1]) Von ähnlicher Wirkung zeigte sich Platinschwarz.

Ansätzen und ist mittels kurzer, weiter Glasröhre an eine rotierende Gaedepumpe angeschlossen. Als Primärelektronenquelle dient ein Wolframglühdraht[1]) *D*, der durch einige Akkumulatoren elektrisch geheizt wird und mit Hilfe einer (nicht gezeichneten) geeigneten Anordnung von Gleitwiderständen exakt auf konstanter Temperatur gehalten werden kann. Die für die Messung benutzten Primärelektronen treten durch zwei streng konaxiale, voneinander isolierte Blendensysteme B_1 und B_2 hindurch in die Kugel ein und werden hier vollständig[2]) von der in deren Zentrum befindlichen Metallscheibe *R* aufgefangen. Der Durchmesser dieser Scheibe beträgt nur 7 mm, um auch in ihrer unmittelbaren Nähe den Kraftlinienverlauf des zentralen Feldes möglichst sicherzustellen. Sie wird durch einen 1 mm dicken Messingdraht gehalten, der, durch Flintglas isoliert, zu einem Quadrantelektrometer führt. Für die Messungen wird die Scheibe ebenso wie ihr freistehender Messingstiel in der Amylacetatflamme gleichmäßig berußt, dann zur Entfernung aller Dampfspuren in der Bunsenflamme längere Zeit kräftig erhitzt und danach mittels des Metallschliffs *S* in den Apparat eingesetzt.

Für die Erzielung völlig konstanter Verhältnisse im Meßraum und die Vermeidung irgendwelcher Elektronenverluste durch Absorption oder Diffusion ist äußerstes Vakuum erforderlich. Alle Zuführungen, mit einziger Ausnahme des Metallschliffs, sind daher eingeschmolzen. Nach Zusammensetzen des Apparates wird derselbe während 1—2 Tagen unter

---

1) Den benutzten Einkristalldraht verdanke ich dem freundlichen Entgegenkommen der Jul. Pintsch A.-G. in Berlin.

2) Um dies sicherzustellen, wurde in einem Vorversuch mit geringer Primärgeschwindigkeit (10—20 Volt) die Scheibe *R* mit einem ebenfalls berußten Metallring umgeben, der entweder mit *R* oder mit der geerdeten Schutzröhre *M* leitend verbunden werden konnte und auf diese Weise durch seinen Einfluß auf die Ladungsangabe des Elektrometers auf die Begrenzung des Strahlquerschnitts schließen ließ. Beim Herausnehmen der berußten Scheibe nach einer größeren Zahl von Versuchen zeigte sich in ihrer Mitte ein deutlicher hellerer Fleck von 2,5 mm Durchmesser, der offenbar das Resultat einer Zerstäubung der Rußschicht war und anzeigt, daß die Begrenzung des Primärstrahlbündels tatsächlich so scharf ist, daß eine Streuung auch im elektrischen Gegenfeld nicht zu Störungen führen kann.

kräftigem Erhitzen der Absorptionskohle C und der Glaswände mit Unterbrechungen durch die Pumpe evakuiert, dann von der Pumpe abgeschlossen und durch Eintauchen des Kohlegefäßes in flüssigen Sauerstoff gekühlt. Die Beobachtungen werden hierauf unter ständigem Kühlen der Anordnung über mehrere Tage fortlaufend ausgedehnt. Vor jeder Meßreihe wird der Wolframdraht etwa 15 Minuten geglüht und die berußte Scheibe durch gleichzeitige Bestrahlung mit einem intensiven Kathodenstrahl von absorbierten Gasspuren befreit.

Die für die Messung der Geschwindigkeitsverteilung der aus R austretenden Elektronen erforderliche *elektrische Anordnung* kann im wesentlichen zwei Formen annehmen (vgl. Fig. 1).

a) Die Primärelektronen werden zwischen Glühkopf und der angrenzenden Blende B_1 beschleunigt und treten mit der dadurch erlangten Geschwindigkeit V_0 in die Kugel ein. Zwischen R und der in jedem Fall mit dem Blendensystem B_2 und dem eingeschmolzenen Platindraht H verbundenen leitenden Kugelwand wird die innerhalb einer Versuchsreihe variable Meßspannungsdifferenz V hergestellt. Die zugehörige Schaltung wird aus Fig. 1a ersichtlich. Der negative Pol einer Spannungsbatterie steht mit der Mitte m der Heizbatterie in Verbindung, während der positive Pol P gleichzeitig mit B_1, B_2 und H verbunden ist. Die Meßspannung V kann durch beliebige Variation der zur Erde abgeleiteten Stelle E der Spannungsquelle in mittels Präzisionsvoltmeters genau meßbarer Weise verändert werden.

Der Vorteil dieser Anordnung besteht darin, daß die in die Kugel eintretende Primärelektronenmenge bei Konstanthaltung von V_0 (und der Drahttemperatur) unabhängig von der Wahl von V streng konstant bleibt, da innerhalb der beiden Blendensysteme dauernd Feldfreiheit vorhanden ist. Ein Nachteil besteht aber darin, daß die Primärgeschwindigkeit innerhalb der Kugel durch das Meßfeld verändert wird und zwar innerhalb einer Versuchsreihe um den variablen Betrag $\pm V$. Die von R austretende Elektronenmenge[1]) wird infolgedessen nicht nur von V — wie es das Meßverfahren verlangt —, sondern auch von dem entsprechenden Gang des $V_0 \pm V$ abhängig.

---

[1]) Gegenüber der Änderung der *Menge* tritt der Einfluß einer Änderung der sekundären Geschwindigkeit, wie aus den nachfolgenden Versuchen hervorgehen wird, völlig zurück.

Die hierdurch verursachte Störung der Eindeutigkeit der Meßergebnisse ist praktisch belanglos, solange V_0 wesentlich größer bleibt als V. Denn in diesem Fall ist die Änderung der aus R austretenden Elektronenzahl durch die relativ geringe Änderung der erregenden Primärgeschwindigkeit ganz unerheblich. Soll diese Meßweise dagegen auch noch bei kleinen Werten von V_0 zur Anwendung kommen, so muß die erwähnte Mengenänderung der austretenden Elektronen durch besondere Versuche gemessen und am Beobachtungsergebnis als Korrektur angebracht werden. Ein Resultat eines solchen besonderen Versuchs wird durch Fig. 2 verzeichnet. Die Kurve zeigt den Gang der negativen Aufladung der benutzten Rußschicht[1]) (in relativem Maß), wenn jeweils die gleiche Primärelektronenzahl mit einer von 10—60 Volt variierten Geschwindigkeit auftrifft. Man erkennt, daß dieser Gang schon bei Geschwindigkeiten unter 100 Volt wenig erheblich ist. Da die Kurve das Resultat der Übereinanderlagerung von Sekundärstrahlung und Rückdiffusion der Primärstrahlen ist, so läßt sie natürlich spezielle Aussagen über die Einzelvorgänge und damit auch über die auffallende Inflexion bei etwa 35 Volt nicht ohne weiteres zu.

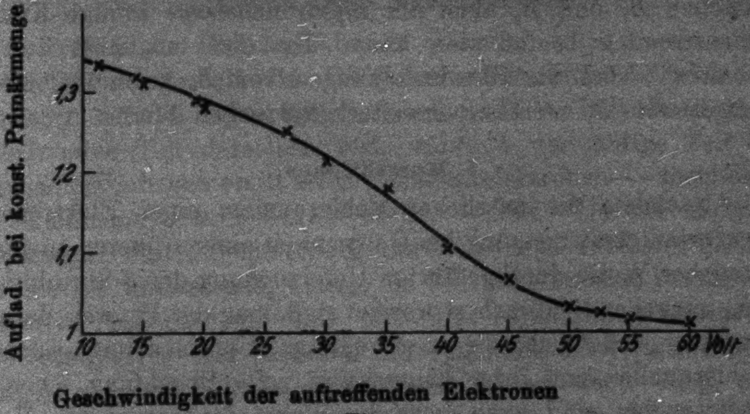


Fig. 2.

---

[1]) In einem die austretenden Elektronen beschleunigenden Meßfeld.

b) Die zur Beschleunigung der Primärelektronen dienende Spannungsbatterie wird von der Meßbatterie abgetrennt und ihr positiver Pol zusammen mit B_1 dauernd geerdet (Fig. 1b). Die wie zuvor variable Meßspannung V wird nur an H und B_2 angelegt. Die Primärelektronen erfahren jetzt eine Geschwindigkeitsänderung zwischen den beiden Blendensystemen, die aber auf dem Wege $B_2 R$ rückgängig gemacht wird. Die Geschwindigkeit derselben beim Auftreffen auf R ist also jetzt unabhängig von V dauernd konstant. Man wird daher diese Meßweise besonders im Falle kleinerer Primärgeschwindigkeiten anwenden. Zu beachten ist dabei allerdings, daß das (verzögernde) Feld zwischen B_1 und B_2 auch die Elektronen*menge* infolge Kraftlinienstreuung beeinflussen kann. Um dies möglichst auszuschalten[1], sind die Blendenöffnungen von B_2 gegenüber denenigen von B_1 merklich erweitert (2,2 gegen 1 mm).

4. Korrektionen.

Nachdem die möglichen Fehlerquellen einer Elektronengeschwindigkeitsmessung bei Gelegenheit einer früheren, in ganz ähnlicher Weise durchgeführten Untersuchung der δ-Strahlung[2]) sehr eingehend betrachtet worden sind, mag der Hinweis darauf genügen, daß auch die gegenwärtige Untersuchung solchen Fehlerquellen und ihrer Elimination volle Beachtung schenkt. Insbesondere sind auch jetzt die Werte der angelegten Meßspannungen um die zu + 0,17 Volt gefundene *Kontaktpotentialdifferenz* zwischen Rußschicht und Kugelhülle[3]) und außerdem um den zwar stets niedrig gehaltenen Durchschnittswert der Spannung, auf welche sich das Elektrometer auflädt, zu verändern. Was die noch vorwiegend zu beachtende *Mitwirkung von Wandstrahlen* betrifft, so ist diese nach dem Ausfall der später zu betrachtenden Versuche im feldfreien Meßraum als

---

1) Daß dies bei Einhaltung der für die Messungen erforderlichen Spannungswerte mit großer Annäherung auf dem angegebenen Wege tatsächlich erreichbar ist, wurde durch Vorversuche erwiesen, in welchen die Primärstrahlen in einem kleinen an Stelle von R befindlichen Faradaykäfig aufgefangen wurden.

2) A. Becker, Ann. d. Phys. 75. S. 217. 1924.

3) Um möglichste Homogenität der elektrischen Eigenschaften des Kugelinnenraums zu erzielen, wurde die Innenwand der Messingblende B_2 durch starke Erhitzung verkupfert.

ausgeschlossen zu bezeichnen. Daß sie aber auch bei den nicht zu hohen Meßspannungen, wie sie für die Sekundärstrahlung erforderlich sind, die Beobachtungen nicht in nennenswerter Weise beeinträchtigen werden, ist daraus zu schließen, daß eine solche Beeinträchtigung schon im Falle der δ-Strahlung als wenig erheblich nachweisbar war, und daß jenen Versuchen gegenüber, bei denen eine direkte Erregung von Wandstrahlen durch ständig auftreffende α-Strahlen stattfand, die gegenwärtigen Verhältnisse insbesondere bei Verwendung der berußten Zentralelektrode wesentlich günstigere sind.

5. Unmittelbare Meßergebnisse.

Treffen die Primärelektronen während einer bestimmten, festgehaltenen Zeit (bei den Versuchen wurden meist 30 Sekunden gewählt) auf die zu erregende Scheibe auf, so hält diese einen bestimmten Teil derselben fest, während der übrige Teil — zusammen mit neu emittierten Sekundärelektronen — sie infolge Rückdiffusion bzw. Reflexion wieder verläßt. Da bei unseren Messungen die festgehaltene Elektronenmenge durchweg größer ist als die austretende, nimmt die Scheibe stets eine bestimmte negative Ladung an, die mit dem Quadrantelektrometer gemessen wird. Bei Variation der Spannungsdifferenz zwischen Kugelwand und Scheibe zeigt diese Ladung einen Gang, aus dem auf die Geschwindigkeitsverteilung der austretenden Elektronen zu schließen ist.

Eine Sicherstellung dieses Ganges setzt naturgemäß völlige Konstanz der für jeden Versuch verfügbaren Primärelektronenmenge voraus. Zur dauernden Prüfung dieser Voraussetzung und zur Ausschaltung jeder infolge ihres etwaigen Nichtzutreffens möglichen Unsicherheit werden stets sogenannte Zickzackbeobachtungen ausgeführt, die darin bestehen, daß zwischen einige Beobachtungen mit variierter Meßspannung jeweils eine Beobachtung mit bestimmt festgehaltener Meßspannung (im allgemeinen bei 0 Volt) eingeschaltet wird. Alle Elektrometerangaben werden dann auf diese zugehörige Kontrollangabe als Einheit bezogen. Die hierdurch erreichte Genauigkeit der Messungen ist durchweg eine sehr befriedigende.

Das gesamte Versuchsmaterial, auf dessen ausführliche Wiedergabe wir besonderen Wert legen, da es die experimenteil gesicherte Grundlage für alle weiteren Deduktionen liefert, faßt die Tab. 1 — mit einiger Kürzung im Umfange der Spannungsvariation und unter Weglassen von unter denselben Verhältnissen ausgeführten wiederholten Messungen — zusammen.

Die in der ersten Kolonne verzeichneten Meßspannungen geben die bei der betreffenden Messung vorhandene Spannungsdifferenz zwischen Kugelwand und Zentralscheibe an, und zwar entsprechen die positiven Werte einer Beschleunigung, die negativen einer Verzögerung der die Scheibe verlassenden Elektronen. Es handelt sich hierbei noch um die direkt angelegten Spannungen, an denen noch keine Korrektion wegen des Kontaktpotentials und der Elektrometeraufladung angebracht ist. Die (negative) Aufladung bei geerdeter Kugelwand ist durchweg als Einheit gewählt.

Die bei den Beobachtungen mit der Anordnung *a* angegebenen Primärgeschwindigkeiten stellen die Werte von V_0 dar. Daß die „wirksame“ Geschwindigkeit damit nicht völlig zusammenfällt, ist bei allen höheren V_0-Werten belanglos. Die Identität der mit beiden Anordnungen für 48 Volt erhaltenen Aufladungen läßt schließen, daß auch hierbei noch die Zugehörigkeit dieser Aufladungen zum angegebenen Geschwindigkeitswert nicht fraglich bleibt. Um diese Zugehörigkeit auch im Falle der 24 Volt sicherzustellen, wurde an den beobachteten Aufladungen mit Benutzung der in Fig. 2 niedergelegten Kenntnis eine Korrektur vorgenommen, die bereits in den Angaben der entsprechenden Kolonne der Tab. 1 enthalten ist. Bezüglich der Übereinstimmung dieser Angaben mit den in der Tabelle nicht aufgeführten Meßergebnissen nach Anordnung *b* verweisen wir auf die nachfolgende Fig. 3.

Aus den Angaben lassen sich sofort einige wichtige *Folgerungen* allgemeiner Art ziehen, die vorweggenommen seien:

Man erkennt zunächst bei allen der verzeichneten 12 Versuchsreihen einen regelmäßigen Anstieg der Aufladung mit zunehmender Verzögerung der austretenden Elektronen. Bei nicht allzu großer Verschiedenheit der Primärgeschwindigkeit ist dieser Anstieg bei verschiedenen Versuchsreihen nahe der gleiche. Ein fast völliges Zusammenfallen beobachtet man beispielsweise bei 675 und 875 Volt Primärgeschwindigkeit. Dasselbe findet sich auch beim Vergleich der nach den beiden

Tabelle 1.

	Meß-Spannung	Elektrische Anordnung *a*								Elektrische Anordnung *b*			
		Primärgeschwindigkeit in Volt											
		24	48	76	275	475	675	875	1075	48	88	100	200
	Volt	Aufladung der bestrahlten Scheibe (relativ)											
	+10	—	—	—	0,94	—	0,97	0,96	0,96	—	0,98	—	—
	2	0,99	1,00	1,00	0 97	—	—	0,98	0,99	—	0,98	—	—
	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	−0,3	—	—	1,02	1,05	—	1,06	1,03	1,04	—	—	—	1,05
	0,5	1,02	1,02	1,04	1,09	1,09	1,09	1,09	1,10	1,01	1,05	1,09	1,10
	1	1,04	1,08	1,09	1,28	—	1,23	1,22	1,26	1,07	1,11	1,15	1,24
	1,5	—	1,10	1,18	1,40	—	1,31	1,33	1,40	1,12	—	1,25	1,44
	2	1,09	1,13	1,28	1,62	1,50	1,47	1,45	1,51	1,16	1,26	1,33	1,60
	2,5	—	1,17	—	1,74	—	1,61	—	1,70	—	—	1,43	1,74
verzögernd	3	1,13	1,23	1,36	1,96	1,77	1,70	1,70	1,78	1,23	1,41	1,48	1,95
	4	1,17	1,29	1,45	2,12	2,04	1,90	1,90	2,03	1,30	1,53	1,60	2,16
	5	1,19	1,34	1,55	2,41	2,19	2,05	2,10	2,18	1,36	1,65	1,77	2,35
	6	1,21	1,40	1,56	2,50	2,36	2,15	2,24	2,38	1,41	1,71	1,82	2,47
	8	1,27	1,48	1,69	2,67	2,47	2,41	2,48	2,64	1,47	1,79	1,95	2,67
	10	1,29	1,54	1,73	2,82	2,67	2,53	2,56	2,78	1,53	1,86	1,98	2,85
	14	—	1,59	1,84	3,00	2,82	—	—	—	—	—	—	—
	16	1,31	—	—	—	—	2,64	2,76	2,94	—	2,00	—	—
	20	—	1,61	1,86	3,16	2.92	2,72	2,85	3,00	1,61	2,04	2,14	3,04
	32	—	—	—	3,20	2,94	2,80	2,88	3,05	—	—	2,18	3,16
	50	—	—	—	3,25	2,95	2,88	2,90	3,12	—	—	—	3,18

verschiedenen Meßanordnungen bei gleicher Primärgeschwindigkeit (48 Volt) erhaltenen Ergebnisse, was andeutet, daß einseitige Fehler des Meßverfahrens nicht vorhanden sind. Dies geht auch aus dem guten Anschluß der nach den beiden verschiedenen Verfahren für 200 und 275 Volt erhaltenen Resultate aneinander deutlich hervor. Beachtenswert ist der Gang der

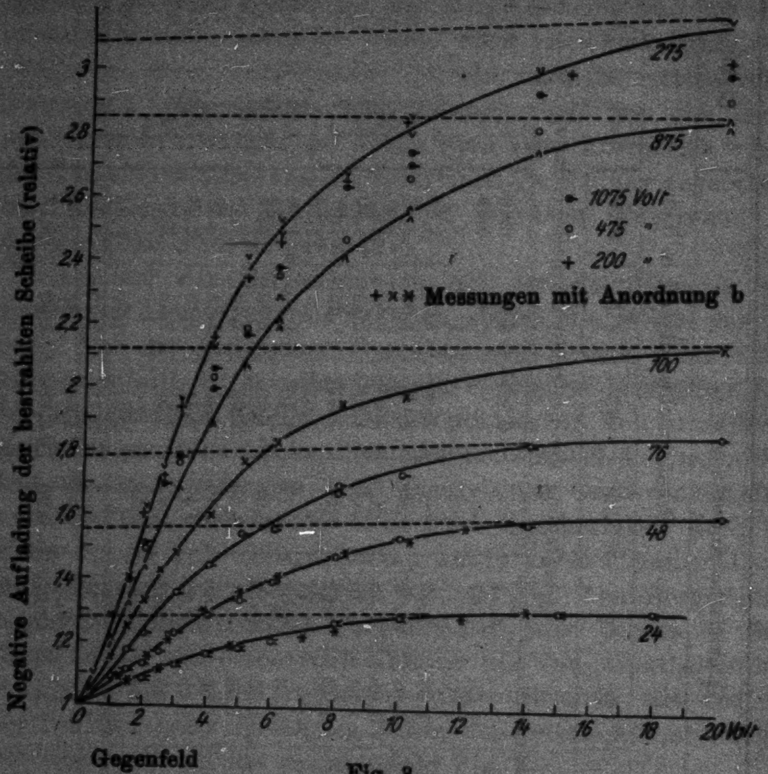


Fig. 3.

Aufladung im Gebiet der beschleunigenden Felder. Man sieht, daß im allgemeinen eine Abnahme erfolgt beim Übergang von 0 auf + 2 Volt. Dieselbe beträgt aber im Höchstfall 3 Proz. und ist durch das Vorhandensein eines verzögernden Kontaktpotentials völlig verständlich. Da auch stärkere beschleunigende Felder keine wesentliche weitere Verringerung der Aufladung hervorrufen, darf mit Sicherheit geschlossen werden, daß auch bei der benutzten Rußschicht praktisch alle überhaupt abtrennbaren Elektronen (mindestens bis auf etwa 2 Proz.) keiner beschleunigenden Kräfte zur Ermöglichung ihres Austritts bedürfen. *Gegen die benutzte Methode, welche aus der Abhängigkeit der austretenden Elektronenzahl von äußeren Kräften auf die Austrittsgeschwindigkeit schließt, ist also bei unsrer Rußschicht ebensowenig ein prinzipieller Einwand zu erheben, wie dies für Metalle mit normaler glatter Oberfläche*[1]) *früher gezeigt worden ist.* Es ist dadurch gleichzeitig nachgewiesen, daß auch Raumladungen bei den gegenwärtigen Messungen gänzlich einflußlos sind[2]), was ohnedies schon vorauszusehen war.

Zur besseren Veranschaulichung und weiteren Verwertung des wesentlichen Inhalts der Tab. 1 diene dessen graphische Darstellung in Fig. 3.

Einen besonderen Hinweis verdient das Auftreten einer *Inflexion der Kurven* in der Nähe kleiner Gegenspannungen, die wir auch bei der δ-Strahlung nachgewiesen haben, während in den meisten Arbeiten andrer Beobachter ein exponentieller Verlauf der Geschwindigkeitsverteilungskurven[3]) angegeben wird. Nur in Hrn. **Dadourian's** in methodischer Hinsicht beachtenswerter Veröffentlichung[4]) zeigt sich eine deutlich ausgeprägte (offenbar aber durch Raumladungswirkung verstärkte) Inflexion, deren Sinn und Berechtigung dieser Autor aber durchaus nicht erkennt, da er sie auf Meßfehler zurückführt.

Da die Inflexion in unsrem Fall immerhin in wenig erheblichem Maße auftritt, ist eine Sicherstellung des entsprechenden Kurvenlaufs durch möglichste Verfeinerung der Messungen im betreffenden Gebiet aus prinzipiellen Gründen wünschenswert. Das Ergebnis solcher Verfeinerung zeigt Fig. 4 für zwei Primärstrahlgeschwindigkeiten. Durch sie ist das Vorhandensein der Inflexion und damit einer bestimmten von Null verschiedenen *wahrscheinlichsten Geschwindigkeit* der austretenden Elektronen als sichergestellt zu betrachten. Da die dadurch angedeutete Geschwindigkeitsverteilung — Abnahme der Elektronenmenge vom wahrscheinlichsten Wert nach kleineren und nach größeren Geschwindigkeiten hin — sich nur auf die sekundäre Strahlung beziehen kann, so ist das geringe Hervortreten der Inflexion als Folge der Überlagerung in ganz andrer Weise über die Geschwindigkeiten verteilten rückdiffundierten Primärstrahlung verständlich.

---

[1]) A. **Becker**, Ann. d. Phys. **75**. S. 244. 1924.

[2]) Vgl. demgegenüber M. **Baltruschat** u. H. **Starke**, Phys. Ztschr. **23**. S. 411. 1922.

[3]) Von Homogenfeldkurven natürlich abgesehen.

[4]) H. M. **Dadourian**, Phys. Rev. (2) **14**. S. 434. 1919.

Man könnte aber immerhin noch die Frage aufwerfen, ob die durch die Inflexion angezeigte Abnahme der Elektronenmenge nach kleinsten Geschwindigkeiten hin nicht etwa durch irgendeine die langsamsten Elektronen ausschaltende Fehlerquelle verursacht sein könnte. Demgegenüber ist hervorzuheben, daß die Gesamtheit der Beobachtungen und der möglichen Überlegungen für die Berechtigung dieser Vermutung keinerlei Raum lassen. So würde beispielsweise eine an der erregten Scheibe mögliche geringe Abweichung des Kraftlinienverlaufs vom radialen die Inflexion eher verwischen. Daß andrerseits wesentliche Mengen der langsamsten Elektronen aus mechanischen Gründen oder wegen gewisser elektrischer oder magnetischer Kräfte am Verlassen der erregten Schicht verhindert sein könnten, wird durch die Beobachtung in beschleunigenden Feldern nicht gestützt. Auch Einwände hinsichtlich der Güte

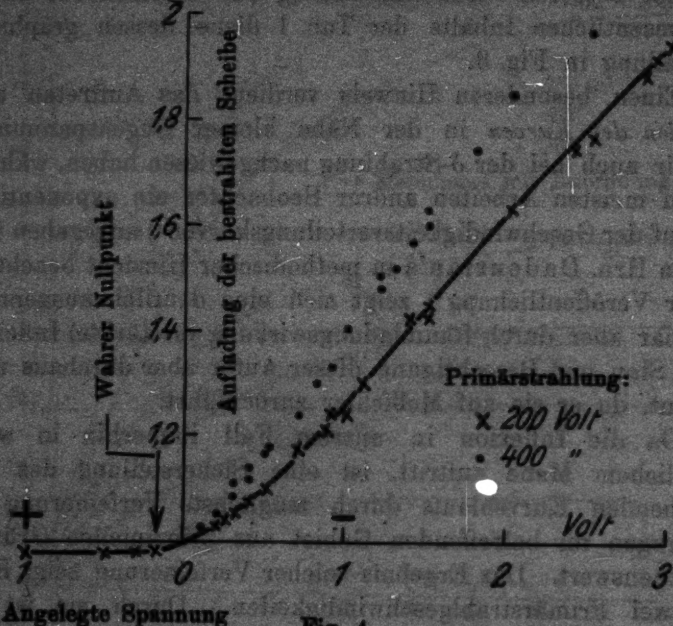


Fig. 4.

des Vakuums oder der Elektronendichte müssen zurückgewiesen werden. Besonders ist das gänzliche Fehlen irgendwelcher grobmechanischer Begrenzungen des Verlaufs der austretenden Elektronen bei der gewählten Versuchsanordnung hinsichtlich der hier besprochenen besonderen Frage als günstiger Umstand anzusehen.

6. Geschwindigkeitsverteilung der Sekundärstrahlung.

Um über sie etwas auszusagen, muß aus der vorstehenden, durch unmittelbare Beobachtung gewonnenen Kenntnis einer Erscheinungssumme der reine Sekundärstrahlungseffekt abgetrennt werden. Wir stützen uns dabei, wie früher hervorgehoben, auf die Tatsache der geringeren Geschwindigkeit der Sekundärstrahlen, Wenn wir bei diesem Versuch auch nicht lückenlos gesichertes experimentelles Material zugrunde legen können, da die Grenze für diese Geschwindigkeit ebensowenig von vornherein durch direkte Erfahrung bekannt ist, wie die Größe der Geschwindigkeitsverluste der Primärelektronen bei ihrer Rückdiffusion, so ist doch nach dem Ausfall dieses Versuchs und den direkten Andeutungen der mitgeteilten Beobachtung anzunehmen, daß die Unsicherheit des Verfahrens so eng begrenzt ist, daß die Ergebnisse (vielleicht bis auf geringe quantitative Beträge) im wesentlichen als zuverlässig bezeichnet werden können.

Unsere Beobachtung zeigt, daß die Beeinflußbarkeit der aus der untersuchten Rußschicht austretenden Elektronenzahl durch ein elektrisches Gegenfeld bei allen Primärgeschwindigkeiten weit überwiegend im Gebiet kleiner Gegenspannungen hervortritt, woraus wir schließen, daß die sekundären Elektronen in unsrem Fall die rückkehrenden (rückdiffundierten bzw. reflektierten) primären, innerhalb des Bereichs der benutzten Gegenfelder, an Zahl erheblich übertreffen. Die Kurven steigen bis zu Gegenspannungen von 10 bis 15 Volt stark an, um dann, wie aus der Tab. 1 weiter verfolgbar ist, entweder nur noch mit geringer und sehr nahe konstanter Neigung weiterzusteigen oder einen nahe konstanten Wert anzunehmen.

Bleiben wir zunächst *bei den höheren Primärgeschwindigkeiten* (über 100 Volt), so ist ohne weiteres kein ersichtlicher Grund dafür vorhanden, anzunehmen, daß unter den rückkehrenden Elektronen sich überwiegend nur solche finden sollten, deren Geschwindigkeitsverlust gerade immer bis zu nahe vollständiger Aufzehrung der ursprünglichen (relativ verschieden hohen) Geschwindigkeit fortgeschritten wäre. Wir schreiben deshalb nur den langsamen Gang von da an, wo er sich als nahe konstant erweist, den rückkehrenden Primärelektronen zu und nehmen an, daß er sich in gleicher Weise auch über das kleine Gebiet der niedrigsten Gegenspannungen fortsetzt. Auf diese Weise resultiert die durch gestrichelte Geraden in Fig. 3 verzeichnete Rückwärtsverlängerung des späteren Kurvenastes. Als sekundäre Elektronen sehen wir dann alle diejenigen an, deren Menge durch das von der ausgezeichneten Kurve und der zugehörigen gestrichelten Geraden begrenzte Flächenstück darstellbar ist.

Dieser Auffassung haftet natürlich eine gewisse Willkür an. Denn einerseits ist es nicht ganz sicherzustellen, an welchem Ort des Kurvenlaufs die Rückwärtsverlängerung anzusetzen ist, und andrerseits steht nicht fest, ob diese Rückwärtsverlängerung eine geradlinige sein darf. Demgegenüber ist auf folgendes hinzuweisen:

Bei den höheren Primärgeschwindigkeiten ist das Gebiet, *in* das wir extrapolieren, immer von geringer Ausdehnung im Vergleich zu demjenigen Gebiet, *aus* welchem wir extrapolieren. Es ist daher schwer anzunehmen, daß die in letzterem sich zeigende Gesetzmäßigkeit außerhalb desselben eine so durchgreifende Veränderung erfahren sollte, daß diese innerhalb der geringen Grenzen des Außengebiets von tief einschneidender Bedeutung werden könnte. Außerdem ist die Elektronenmenge, die wir in unserem Versuchsfall auf Grund der Geschwindigkeitswerte als sekundäre ansehen können, so überwiegend gegenüber derjenigen, die wir als rückkehrende auffassen, daß eine geringe Unsicherheit bei letzteren die Aussagen über die ersteren nicht grundlegend beeinträchtigen kann. Man überzeugt sich in der Tat leicht, daß bei der meist erheblichen Verschiedenheit des anfänglichen Anstiegs der Kurven und der zuzuordnenden gestrichelten Geraden kleinere Veränderungen der letzteren nahezu belanglos bleiben. Eine größere Unsicherheit ist nur an den Stellen nicht zu vermeiden, wo die Kurven und die Geraden sich stark nähern und zusammen-

Tabelle 2.

Volt	Primärgeschwindigkeit in Volt										
	24	48	76	88	100	200	275	475	675	875	1075
	Emittierte Sekundärelektronenmenge $\overline{Z}$										
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0,3	—	—	0,97	—	0,96	—	0,98	—	0,98	—	0,98
0,5	—	0,98	0,95	0,95	0,93	0,95	0,95	—	0,94	0,95	0,95
1	0,85	0,87	0,90	0,89	0,86	0,88	0,87	0,90	0,86	0,88	0,87
1,5	—	0,83	0,78	—	0,78	0,78	0,81	0,80	0,80	0,82	0,80
2	0,65	0,77	0,71	0,74	0,71	0,68	0,71	0,74	0,72	0,75	0,75
2,5	—	0,70	—	0,66	0,62	0,63	0,65	—	0,63	0,66	0,65
3	0,54	0,60	0,56	0,60	0,58	0,53	0,56	0,59	0,58	0,62	0,61
4	0,43	0,50	0,44	0,42	0,47	0,42	0,47	0,45	0,46	0,52	0,46
5	0,31	0,40	0,34	0,35	0,32	0,33	0,35	0,37	0,37	0,41	0,40
6	0,27	0,29	0,31	0,29	0,28	0,26	0,31	0,28	0,31	0,32	0,31
7	—	—	0,22	—	0,21	—	0,26	0,24	0,23	—	0,24
8	0,14	0,15	0,16	0,21	0,16	0,17	0,21	0,22	0,15	0,23	0,18
10	—	0,09	0,12	0,14	0,13	0,08	0,15	0,12	0,09	0,16	0,13
12	—	—	0,05	0,07	0,10	0,07	0,10	0,11	0,06	0,10	0,08
15	—	—	0,03	0,03	0,05	0,05	0,05	0,05	0,03	0,04	0,03

treffen. Dies betrifft gerade die Frage der Maximalgeschwindigkeit der Sekundärelektronen, bezüglich der wir auf bestimmte Aussagen daher verzichten müssen.

Beim Übergang zu den *kleinen Primärgeschwindigkeiten* nehmen die Schwierigkeiten naturgemäß zu; denn die Sekundärstrahlung nimmt ab, und die Annäherung an die Eigenschaften der rückkehrenden Primärstrahlen wächst. Der aber auch hier schon in großer Entfernung von der Primärgeschwindigkeit sich einstellende nahe horizontale Kurvenlauf läßt offenbar das besprochene Trennungsverfahren auch hier unbedenklich zu.

Auf diesem Wege gelangen wir zur Geschwindigkeitsverteilung der Sekundärstrahlen dadurch, daß wir jeweils die Ordinatenlänge zwischen der ausgezogenen Kurve und der zugehörigen gestrichelten Geraden als Funktion der Gegenspannung auftragen und dabei diese Länge für $V = 0$ zum Zweck der Ermöglichung eines Vergleichs der verschiedenen Beobachtungsreihen untereinander zur Einheit wählen. Gleichzeitig korrigieren wir die „angelegten“ Spannungswerte und verzeichnen sofort die „wahren“ Voltgeschwindigkeiten.

Das Ergebnis dieses Verfahrens ist in Tab. 2 zusammengestellt. Betrachten wir zunächst die den fünf höchsten Primärgeschwindigkeiten zugehörigen Kolonnen, so zeigt sich eine unter Berücksichtigung der Genauigkeitsgrenzen der Beobachtung und des Abtrennungsverfahrens so unerhebliche Verschiedenheit derselben, daß es berechtigt erscheint, die Werte jeder Horizontalreihe zu einem Mittelwert zu vereinen und diesen gleichzeitig allen fünf Fällen zuzuordnen. Der Gang dieser Mittelwerte mit der zugehörigen Voltgeschwindigkeit (1. Kolonne der Tabelle) ist in Fig. 5 durch die ausgezogene Kurve dargestellt. Vergleichen wir damit die eingezeichnete Lage der jeder Kolonne getrennt entnommenen Einzelwerte, so erkennt man, daß systematische Abweichungen derselben von der Kurve, die einen einfachen Zusammenhang mit der Primärgeschwindigkeit hervortreten ließen, nicht vorhanden sind.

Gehen wir zu kleineren Primärgeschwindigkeiten über, so zeigen zunächst die den Geschwindigkeiten 100 und 200 Volt zugehörigen Werte eine meist deutlich tiefere Lage. Es erscheint indessen nicht zwingend, hierfür die kleineren Primärgeschwindigkeiten verantwortlich zu machen, da bei 76 und 88 Volt im allgemeinen wieder eine gute Anpassung der Werte an den durchschnittlichen Verlauf vorhanden ist und bei 48 Volt sogar mehrfach deutliche Abweichungen im entgegen-

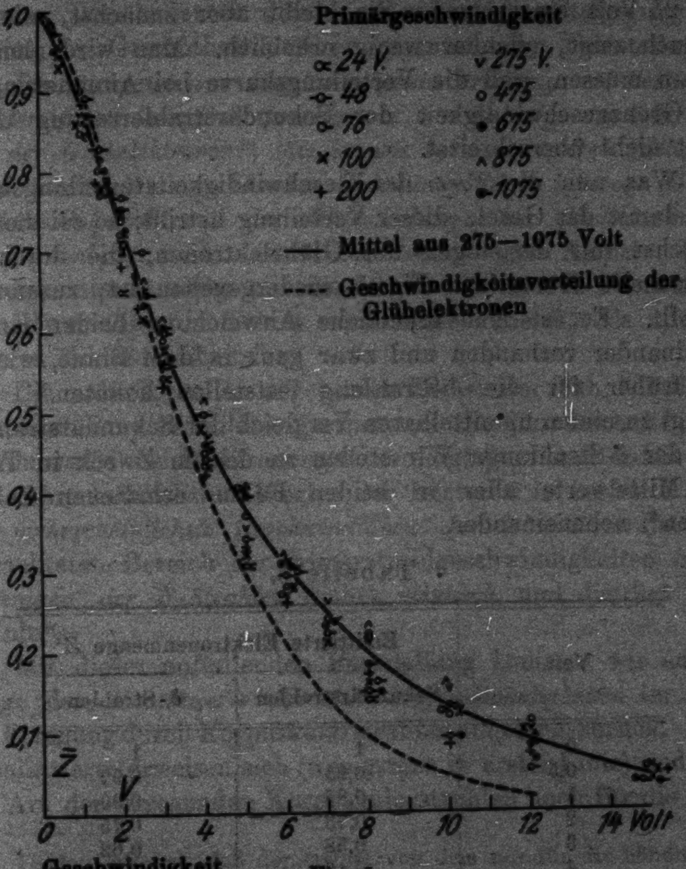


Fig. 5.

gesetzten Sinne sich geltend machen. Ein ernsterer Hinweis auf einen rascheren Abfall der Verteilungskurve beim Übergang zu kleinen Primärgeschwindigkeiten liegt vielleicht bei 24 Volt vor.

Fassen wir die prinzipiellen Ergebnisse dieser Betrachtung zusammen, so folgt, daß *die Form der Geschwindigkeitsverteilungs-*

kurve der Sekundärstrahlen von der Höhe der Primärstrahlgeschwindigkeit in dem ganzen untersuchten Bereich von rund 25 bis 1100 Volt unabhängig ist. Dasselbe gilt zum mindesten mit großer Annäherung für die Lage der Kurve, d. h. für die Absolutwerte der sekundären Geschwindigkeit. Eine deutliche Verringerung der Absolutwerte scheint erst in der Gegend von 25 Volt einzusetzen. Sie bleibt aber zunächst, wie der Versuch zeigt, offenbar wenig erheblich. Man wird aber erwarten müssen, daß die Verteilungskurve bei Annäherung an die Grenzgeschwindigkeit der Sekundärstrahlerregung deren Wert nicht überschreitet.

Was nun die *Form* der Geschwindigkeitsverteilungskurve und damit das Gesetz dieser Verteilung betrifft, so sei dieselbe zunächst mit derjenigen der Glühelektronen, die durch die gestrichelte Kurve der Fig. 5 wiedergegeben ist, zusammengestellt. Es ist eine erhebliche Abweichung beider Kurven voneinander vorhanden und zwar ganz in dem Sinne, wie wir sie früher für die δ-Strahlung feststellen konnten.[1]) Dies drängt zu einem unmittelbaren Vergleich der Sekundärstrahlung mit der δ-Strahlung. Wir stellen zu diesem Zweck in Tab. 3 die Mittelwerte aller in beiden Fällen erhaltenen Zahlenreihen[2]) nebeneinander.

Tabelle 3.

Volt	Emittierte Elektronenmenge $\overline{Z}$	
	Sekundärstrahlen	δ-Strahlen
0	1	1
0,5	0,95	0,97
1	0,88	0,90
2	0,73	0,75
3	0,58	0,62
4	0,46	0,51
6	0,30	0,35
8	0,18	0,23
10	0,12	0,13
12	0,08	0,05

---

[1]) Vgl. A. Becker, Ann. d. Phys. 75. S. 250. 1924.

[2]) Und zwar von 10 Kolonnen der vorstehenden Tab. 2 (ohne die zu 24 Volt gehörige) und von den ersten 3 Kolonnen der Tab. 3 der vorgenannten Arbeit.

Der Gang[1]) beider Reihen ist nahe identisch, was insofern noch besonders bemerkenswert ist, als die erregten Stoffe in beiden Fällen verschiedene sind. Da sich die Geschwindigkeiten der δ-Strahlung vom emittierenden Material unabhängig erwiesen haben, so wird man auch für die Sekundärstrahlung zum mindesten keine starke Materialabhängigkeit erwarten müssen. Es bedeutet dies eine erfreuliche Steigerung des Wertes der Gesamtheit unserer gegenwärtigen Feststellungen.

Die nachgewiesene Geschwindigkeitsverteilung der Sekundärstrahlen folgt demselben Grundgesetz wie diejenige der δ-Strahlen und der Glühelektronen.[2]) *Sie ist wie in den letzteren Fällen die Folge einer Maxwellschen Verteilung der inneren Lineargeschwindigkeiten und der Überwindung einer flächennormalen Oberflächenkraft beim Austritt aus dem erregten Körper.* Diese Aussage stimmt sogar mit den etwas niedrigeren Werten der Sekundärstrahlen in Tab. 3 noch besser überein als mit den höheren der δ-Strahlen.[3])

Die nahe Identität der beiden Reihen der Tab. 3 bedeutet aber auch eine nahe Übereinstimmung der (durchschnittlichen) Absolutwerte der Elektronengeschwindigkeiten und damit auch des wahrscheinlichsten Wertes der letzteren in beiden Fällen. *Die wahrscheinlichste Geschwindigkeit der Sekundärstrahlen* im betrachteten Bereich der Primärstrahlgeschwindigkeiten *ist mit derjenigen der δ-Strahlen* (nahe) *identisch* und beträgt nahe 2 Volt.[4])

Mit dieser auffallenden Feststellung kommen wir auf die Frage der *Absolutwerte der Austrittsgeschwindigkeiten* im Falle der Erregung durch Korpuskularstrahlen allgemein zurück. Diese Absolutwerte erweisen sich (wenigstens in erster Linie) weder für die Art der erregenden Korpuskularstrahlen noch für die Höhe ihrer Geschwindigkeit charakteristisch. Für sie bestimmend ist offenbar der Erregungsvorgang selbst, d. h. letzten Endes das Atom, in welchem die Erregung erfolgt. Während bei der lichtelektrischen Wirkung im allgemeinen jede Erregung mit vollständigem Verbrauch der in das Atom eintretenden Energie und daher auch mit einer restlosen Umwandlung der letzteren in Elektronenenergie verbunden ist, entnimmt das Atom einem es durchsetzenden Korpuskularstrahl immer nur einen bestimmten Teil seiner Energie, dessen Größe es vorschreibt[1]) und der als Elektronenenergie in Erscheinung treten kann. Die wahrscheinlichste Austrittsgeschwindigkeit bzw. die zugehörige wahrscheinlichste innere Geschwindigkeit der Sekundärstrahlung wird dann ebenso wie die Grenzgeschwindigkeit der Sekundärstrahlerregung, mit der sie offenbar zusammenhängt, als Atomkonstante[2]) aufzufassen sein. Daß bisher eine Materialabhängigkeit dieser Geschwindigkeit nicht deutlich in Erscheinung getreten ist, steht mit dieser Auffassung nicht in Widerspruch; denn bekanntlich ist auch die Grenzgeschwindigkeit der meisten bisher untersuchten gewöhnlichen Substanzen nahe von gleicher Größe.

---

[1]) Man erkennt, daß der erstere von dem nur für die höheren Geschwindigkeiten gefundenen durchschnittlichen Gang (ausgezogene Kurve der Fig. 5) nicht wesentlich abweicht.

[2]) Die oben konstatierte Abweichung ist lediglich auf die Verschiedenheit der *relativen* Austrittsarbeit zurückzuführen.

[3]) Vgl. A. Becker, Ann. d. Phys. 75. S. 784 u. 790. 1924.

[4]) Es ist sehr bemerkenswert, daß die von Hrn. Lenard, Quantitatives . . ., S. 173—177, zum Teil auf Grund meiner älteren Untersuchungen (1905) hergeleitete Größe der „mittleren“ Sekundärgeschwindigkeit nahe diesen Wert trifft.

Der durch die gegenwärtigen und die genannten älteren Versuche angedeutete Gang der sekundären Geschwindigkeiten mit der primären, der sich offenbar nur in unmittelbarster Nähe der Grenzgeschwindigkeit[3]) einerseits und bei sehr hohen Primärgeschwindigkeiten andrerseits deutlich bemerkbar macht, ist wohl im letzteren Falle auf einen dem obengenannten Grundvorgang sich überlagernden besonderen Vorgang zurückzuführen, dessen Kenntnis noch aussteht.

Zusammenfassung.

1. Es wird die Geschwindigkeitsverteilung der bei vertikaler Bestrahlung mit homogenen Kathodenstrahlen aus einer berußten Metallfläche austretenden Elektronen im zentralen elektrischen Felde gemessen.

---

[1]) Vgl. N. Akesson, Heidelb. Akad. d. Wiss. A. 21. Abh. 1914.

[2]) Wieweit sie außerdem durch die Atomhäufung im festen Körper beeinflußt sein könnte, bleibt zunächst unbestimmt.

[3]) Dies wird auch schon von Hrn. Lenard, Quantitatives ..., S. 160, angenommen; vgl. auch J. Stark, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. 12. S. 437. 1916.

2. Die Geschwindigkeit der erregenden Primärstrahlen wird zwischen 24 und 1075 Volt variiert.

3. Bei einer berußten Fläche überwiegen im allgemeinen die Sekundärstrahlen erheblich gegenüber dem Anteil von rückkehrenden (rückdiffundierten bzw. reflektierten) Primärelektronen geringer Geschwindigkeit. Dadurch verringern sich die Schwierigkeiten, die einer Trennung der beiden Elektronenarten voneinander im Wege stehen.

4. Die unter sorgfältiger kritischer Berücksichtigung der Genauigkeitsgrenzen der Versuchsergebnisse und des Auswertungsverfahrens erfolgende rechnerische Abtrennung der Sekundärstrahlung gestattet eine wesentliche Erweiterung unserer bisherigen Kenntnis ihrer Eigenschaften.

5. Die *Ergebnisse* sind — unter dem Vorbehalt kleiner, innerhalb der Genauigkeitsgrenzen der Untersuchung liegenden Variationsmöglichkeiten — folgende:

a) Die *Geschwindigkeitsverteilung* der untersuchten Sekundärstrahlung ist mit derjenigen der δ-Strahlung identisch. Sie ist wie bei der δ-Strahlung und den Glühelektronen die Folge einer Maxwellschen Verteilung der „inneren" Lineargeschwindigkeiten und der Überwindung einer flächennormalen Oberflächenkraft beim Austritt aus dem erregten Körper.

b) Die *wahrscheinlichste Austrittsgeschwindigkeit* und damit der Absolutwert aller sekundären Geschwindigkeiten ist im untersuchten Bereich von der Primärstrahlgeschwindigkeit unabhängig. Eine Andeutung einer Abnahme bei Annäherung an die Grenzgeschwindigkeit der Sekundärstrahlerregung findet sich bei 24 Volt.

c) Die beobachtete wahrscheinlichste Sekundärstrahlgeschwindigkeit beträgt nahe 2 Volt; sie ist also mit derjenigen der δ-Strahlung identisch.

d) Die Austrittsgeschwindigkeiten sind daher — in erster Näherung — weder für die Art der erregenden Korpuskularstrahlung noch für die Höhe ihrer Geschwindigkeit (solange Atomdurchquerung stattfindet) charakteristisch. Für sie bestimmend ist ursprünglich offenbar das Atom, in welchem die Erregung erfolgt und welches den Energiebetrag vorschreibt, den es dem Korpuskularstrahl entzieht.

e) Der Gang der sekundären Geschwindigkeiten mit den primären, der durch die ältere Erfahrung bei schnelleren Primärstrahlen angedeutet ist, ist offenbar auf einen sekundären Vorgang zurückzuführen, der sich dem obengenannten überlagert.

6. Diese neue Kenntnis fügt sich widerspruchslos ein in das Bild, welches Hr. Lenard in seiner kritischen Auswertung der älteren Literatur von der Sekundärstrahlung entworfen hat.

Der Gesellschaft der Freunde der Universität Heidelberg habe ich für die finanzielle Unterstützung der vorliegenden Untersuchung bestens zu danken.

Heidelberg, Radiolog. Institut u. Theor.-Physikal. Apparat.

(Eingegangen 24. September 1925.)

3. *Über die Rückdiffusion, Reflexion und Sekundärstrahlerregung langsamer Kathodenstrahlen;*

von A. Becker.

Wird die Oberfläche eines festen Körpers von Kathodenstrahlen getroffen, so treten aus ihr Elektronen aus, die ihrer Herkunft nach in zwei Gruppen zu teilen sind, welche wir als *sekundäre* und *rückkehrende* bezeichnen. Während die ersteren den erregten Atomen des Körpers entstammen, sind die letzteren aus dem Körper zurückkehrende Primärelektronen. Für die Elektronenrückkehr kommen zwei Ursachen in Betracht: die *Reflexion*, welche sich beim geeigneten Zusammentreffen eines Primärelektrons mit einem einzigen Atom abspielt, und die *Rückdiffusion*, welche nach Hrn. Lenards[1]) Definition das Resultat wachsender Ablenkungen beim aufeinanderfolgenden Durchdringen vieler Atome ist.

Versuchen wir, auf dem Wege des Studiums dieser drei verschiedenen Äußerungsformen des Atommechanismus in letzteren einzudringen, so bedarf es einer systematischen Analyse des der Erfahrung zugänglichen Erscheinungskomplexes. Nachdem ein kürzlich in Fortsetzung und Verfeinerung älterer Untersuchungen[2]) unternommener Versuch[3]) einer Abtrennung der Sekundärstrahlung aus diesem Komplex zu bemerkenswerten Ergebnissen geführt hat, erscheint es wertvoll, die Analyse weiterzuführen.

Der bisherige Versuch stützte sich auf die summarische Beobachtung der Geschwindigkeitsverteilung der von einer vertikal bestrahlten berußten Metallfläche emittierten Elektronen aller Emissionsrichtungen. Es zeigte sich, daß die Sekundärstrahlung dabei so ausgeprägt war, daß ein Schluß auf ihre Eigenschaften auch ohne tiefergehende Kenntnis der Begleiterscheinungen unbedenklich erschien.

---

[1]) P. Lenard, Quantitatives ..., Heidelberg 1918 u. 1925, S. 190.
[2]) A. Becker, Ann. d. Phys. 17. S. 428 ff. 1905.
[3]) A. Becker, Ann. d. Phys. 78. S. 228. 1925.

Die gegenwärtige Untersuchung wendet sich nun näher diesen Begleiterscheinungen zu. Sie ermöglicht damit nicht nur neue Aussagen über den Vorgang der Rückdiffusion und der Reflexion, sondern auch eine Prüfung der die Sekundärstrahlung betreffenden Feststellungen der vorhergehenden Arbeit. Sie geht über die letztere auch in prinzipieller Hinsicht insofern hinaus, als sie nicht mehr Elektronen verschiedener Emissionsrichtung zusammenfaßt, sondern bestimmte Emissionsrichtungen festhält. Der untersuchte Bereich der Primärstrahlgeschwindigkeit liegt zwischen 10 und 1100 Volt.

Von den bereits in der vorhergehenden Mitteilung genannten Arbeiten der hierhergehörigen Literatur sind im Zusammenhang mit den gegenwärtigen besonderen Fragen die folgenden hervorzuheben:

Die Elektronenemission fester Oberflächen[1]) unter der Einwirkung langsamer Primärstrahlen ist im Anschluß an Versuche des Hrn. v. Baeyer[2]) zuerst von Hrn. Gehrts[3]) näher studiert worden. Die von den lichtelektrisch erzeugten Primärstrahlen getroffenen Oberflächen zeigten auch unter 11 Volt, wo Sekundärstrahlung als fehlend anzunehmen war, eine diffuse Rückstrahlung, welche als Reflexion angesehen wurde. Bei Primärgeschwindigkeiten über 11 Volt verlaufen die aufgenommenen „Geschwindigkeitsverteilungskurven“ exponentiell und erreichen die Geschwindigkeitsachse durchweg unterhalb 25 Volt, woraus Hr. Gehrts schließt, daß eine „reflektierte“ Strahlung mit einer Geschwindigkeit größer als 25 Volt nicht zu bemerken sei. Für die Sekundärgeschwindigkeit wird „etwa 8 Volt oder kleiner“ angegeben. Für einwandfreie Geschwindigkeitsmessungen war aber die benutzte Versuchsanordnung, wie der Autor selbst erkannt hat, wenig geeignet; außerdem berücksichtigt er keine Kontaktpotentiale in der irrigen Annahme, daß sie einflußlos seien.

---

1) Auf die Untersuchungen der entsprechenden Vorgänge in Gasen gehen wir hier nicht ein.

2) O. v. Baeyer, Verh. d. D. Phys. Ges. 10. S. 96 u. 953. 1908.

3) A. Gehrts, Ann. d. Phys. 36. S. 995. 1911.

Mit einer im Prinzip und der Apparatanordnung ähnlichen Versuchsweise, die alle Emissionsrichtungen zusammennimmt, arbeiten Frl. **Baltruschat** und Hr. **Starke**[1]) und Hr. **Farnsworth**[2]). Die ersteren benutzen nur meist höhere Primärgeschwindigkeiten, während die letztere Untersuchung besonderes Gewicht auf die Beseitigung aller Gasspuren aus dem Beobachtungsraum und dem erregten Körper (Nickel) legt. In den Ergebnissen, soweit sie den Verhältnissen entsprechend vergleichbar sind, besteht keine volle Übereinstimmung beider Arbeiten.[3]) Während nach der ersteren, deren Geschwindigkeitsangaben[4]) erheblich durch von den Verfassern nachgewiesene Raumladungen beeinflußt sind, „bis ungefähr 6000 Volt primär die Reflektorstrahlung nur oder fast nur langsame Sekundärstrahlung ist von vorwiegend einigen Volt Geschwindigkeit", geht bei der letzteren die Verteilungskurve der emittierten Geschwindigkeiten in allen Fällen bis zur Primärgeschwindigkeit, woraus Hr. **Farnsworth** schließt[5]), daß „Elektronenreflexion" auch bei höheren Primärgeschwindigkeiten (gemessen wurden bis 260 Volt) vorhanden ist.

Daß auch noch bis 1000 Volt Primärgeschwindigkeit unter den rückkehrenden Elektronen gut meßbare Mengen vorhanden sind, deren Geschwindigkeit mindestens $^{9}/_{10}$ der primären beträgt, geht aus den Beobachtungen der Herren **Davisson** und **Kunsman**[6]) hervor, die sich im übrigen nicht mit der Geschwindigkeitsverteilung, sondern mit der Richtungsverteilung dieses herausgegriffenen raschesten Anteils der Rückkehrelektronen bei festgehaltenem Inzidenzwinkel beschäftigen.

Dieser historische Überblick lehrt, daß einwandfreie Messungen der Geschwindigkeitsverteilung der von einem von Kathodenstrahlen getroffenen Körper in bestimmter Richtung ausgehenden Elektronen nicht vorliegen, daß ebenso die Kenntnis des Anteils der verschiedenen Einzelvorgänge an der Ge-

---

1) M. **Baltruschat**, u. H. **Starke**, Physik. Zt. 23. S. 403. 1922.

2) H. E. **Farnsworth**, Phys. Rev. 20. S. 358. 1922.

3) Was nicht etwa durch mehr oder weniger Gasgehalt des bestrahlten Körpers erklärlich wäre.

4) Für die emittierten Strahlen.

5) Es ist dies sein einziger Schluß aus diesen Kurven.

6) C. **Davisson** u. C. H. **Kunsman**, Phys. Rev. 19. S. 253. 1922; 22. S. 242. 1923.

samterscheinung und der ihn bestimmenden Faktoren noch aussteht und daß bisher kein Anzeichen bekannt ist, welches mit Sicherheit zwischen rückdiffundierten und reflektierten Elektronen experimentell zu unterscheiden gestattet.

Diese Fragen sucht die gegenwärtige Arbeit im wesentlichen zu lösen.

1. Versuchsverfahren.

Das *Prinzip der Messung* ist das folgende: Die von einem Glühdraht emittierten Primärelektronen treffen, scharf ausgeblendet, auf ein Metallblech, dessen Ausstrahlung zu untersuchen ist. Zu diesem Zweck wird ein durch Blenden ausgesonderter Teil der letzteren meßbar in einem Faradaykäfig

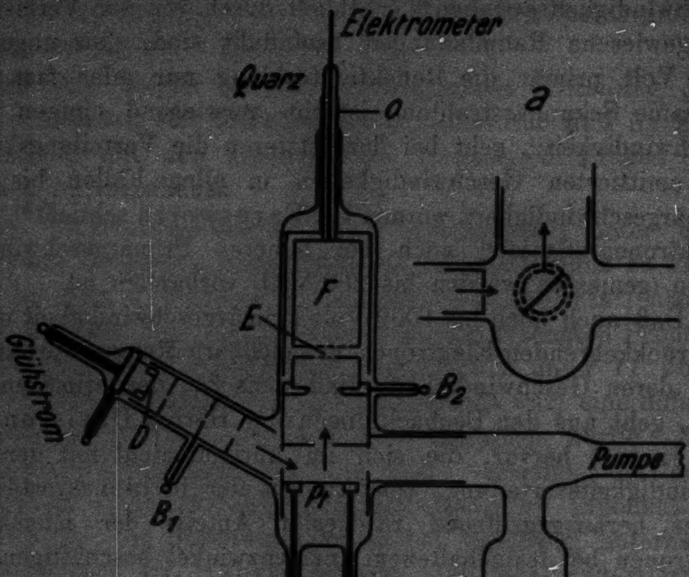


Fig. 1.

aufgefangen, dem ein elektrisches (Gegen-) Feld genau in Strahlrichtung vorgeschaltet ist. Die gesuchte Geschwindigkeitsverteilung ergibt sich dann einwandfrei aus der Untersuchung der in den Käfig eintretenden Menge in ihrer Abhängigkeit von der Höhe dieses Feldes. Der bestrahlte Körper befindet sich dabei dauernd im feldfreien Raum; die Ausstrahlung erfolgt also völlig unbeeinflußt von fremden elektrischen Kräften. Daß hierbei tatsächlich die volle Emission (bis auf mindestens etwa 2 v. H.) meßbar wird und der Elektronenaustritt keiner beschleunigender Felder bedarf, hat die vorhergehende Arbeit gezeigt.

Die *Versuchsanordnung* wird durch Fig. 1 dargestellt. Um Winkeländerungen vornehmen zu können, erhielt die Versuchs-

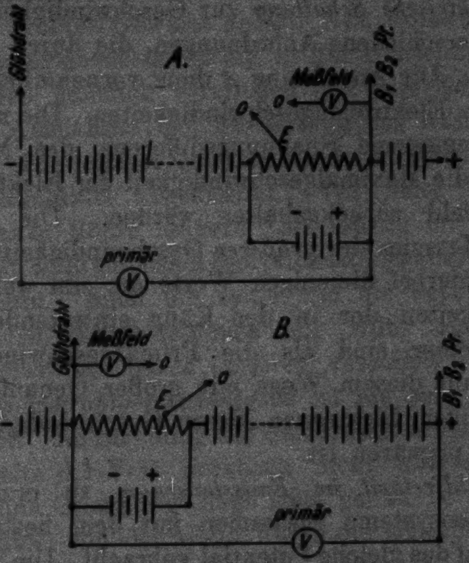


Fig. 2.

röhre zunächst die unter *a* angedeutete Gestalt. Die bestrahlte Scheibe befindet sich hier, von einem vertikalen mittels Schliffs drehbaren dünnen Stab gehalten, im Kreuzpunkt zweier aufeinander senkrechter Röhren. Die Primärstrahlung kommt in Pfeilrichtung von einem Tubus, während das Auffängersystem für die Austrittsstrahlung im darauf senkrechten Tubus eingebaut ist.

Für die Hauptuntersuchung diente die Anordnung *b*. Die vom glühenden Wolframdraht *D* ausgehende, durch das Blendensystem B_1 ausgeblendete Primärstrahlung trifft hier unter etwa 80° (gemessen gegen die Fläche) auf eine feststehende Platinfolie *Pt*, die von zwei dicken Drähten gehalten wird. Die vertikal von ihr ausgehenden Elektronen treten durch ein Blendensystem B_2 (Ein- und Austrittsöffnung je 4 mm Durchmesser) hindurch in einen ebenso wie die hintere Blendenöffnung mit dünnstem Platinnetz abgeschlossenen Faradaykäfig *F* ein, der durch ein Quarzrohr isoliert und mit dem Quadrantelektrometer verbunden ist. Zwischen *F* und B_2 wird das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ angelegt, dessen Kraftlinien mit der Elektronenbahn gleichgerichtet sind.

Die *elektrische Schaltung* zur Geschwindigkeitsmessung erhielt zwei verschiedene Anordnungen, die durch Fig. 2 wiedergegeben sind. Die Anordnung *A* dient vornehmlich der Messung der *kleineren* Elektronengeschwindigkeiten. Die mit Präzisionsvoltmeter gemessene Spannungsdifferenz des Meßfeldes gibt hier direkt die Maximalgeschwindigkeit der Elektronen an, die vom Gegenfeld zurückgehalten werden. Die Anordnung *B* dient der Messung der *größeren* Geschwindigkeiten. Das Voltmeter gibt hierbei diejenigen Werte an, um welche die Voltgeschwindigkeiten der in den Käfig eintretenden Elektronen maximal kleiner sind als die Primärgeschwindigkeit. Man untersucht auf diesem Wege mit großer Genauigkeit vorzugsweise diejenigen Elektronen, deren Geschwindigkeit nahe derjenigen der primären ist.

Um *Feldfreiheit im Emissionsraum* zu erzielen, werden beide Blendensysteme zusammen mit dem bestrahlten Metall durchweg auf das gleiche Potential gebracht. Um auch Kontaktpotentialdifferenzen und gleichzeitig störende „Wandelektronen“ möglichst auszuschließen, wurden alle Wände des Emissionsraumes und die sich gegenüberstehenden Flächen des Meßfeldes vor dem Zusammensetzen des Apparats in der Amylacetatflamme dünn berußt. Ebenso wurde in den Hauptversuchen die Platinfolie berußt. Mit Poloniumpräparat war dann zwischen dieser Folie und den Wänden keine Potentialdifferenz nachweisbar. Ist auf diese Weise die Feldfreiheit im Emissionsraum vor der Erregung sichergestellt, so gilt dies aber nicht ohne weiteres auch während der Bestrahlung. Denn hier kommen die Eigenkräfte der Elektronen hinzu, die bei der gegenwärtigen Anordnung nicht so klein gemacht werden können, daß sie, wie bei der vorhergehenden Untersuchung, belanglos bleiben müssen. Wählt man auch eine hohe Elektrometerempfindlichkeit, so daß die eigentliche Messung mit geringen Elektrizitätsmengen auskommen kann, so muß doch die Elektronendichte im Meßstrahl infolge der Ausblendung aus der viel größeren gesamten Elektronenausstrahlung eine gegen früher merklich höhere bleiben. Um ein Urteil über die Größe des Einflusses dieser Verhältnisse auf die Meßergebnisse zu gewinnen, waren Beobachtungen mit variierter Strahlintensität vorzunehmen.

Auf höchstes *Vakuum* und Dampffreiheit des Versuchsraums wurde größtes Gewicht gelegt. Alle Apparatteile wurden vor dem Zusammensetzen kräftig in der Bunsenflamme erhitzt. Schliffe wurden gänzlich vermieden und alle Zuführungen — mit einziger Ausnahme der Fortleitung des Käfigs F — eingeschmolzen. Die letztere ist durch Kupferamalgam mit darübergelegtem Vakuumkitt abgedichtet. Vor jeder Versuchsreihe wurde die ganze Röhre längere Zeit kräftig mit der Bunsenflamme erhitzt, während das Absorptionskohlegefäß C in flüssigem Sauerstoff stand. Auch die reine und die berußte *Platinfolie* wurde bei den Hauptversuchen mit Hilfe eines hindurchgeleiteten Heizstroms *durch längeres Ausglühen entgast.*[1])

Die *Primärstrahlgeschwindigkeit* ist als sehr nahe einheitlich anzusehen; die Streuung um den jeweils angegebenen Wert wird beiderseits 0,1 Volt praktisch nicht überschreiten. Die beschleunigende Spannung liegt stets genau in der Mitte des Wolframdrahtes, von der allein durch die scharfe Ausblendung (1 mm Öffnung) der Primärstrahl entnommen ist. Andererseits waren alle Messungen mit niedrigen Glühtemperaturen Rot- bis Gelbglut) ausführbar. Da die beschleunigende Spannungsdifferenz bei der gewählten Schaltung von der Variation der Meßspannungen völlig unabhängig bleibt, so ist die Primärgeschwindigkeit während jeder Versuchsreihe auch streng konstant.

---

1) Daß dadurch eine vollständige Entgasung von Platin zu erzielen wäre, nehmen wir natürlich im Hinblick auf sonstige Kenntnis nicht an.

2. Meßergebnisse.

Die Versuche zeigten, daß der Anteil der Einzelerscheinungen an der beobachtbaren Gesamterscheinung wesentlich von der Richtung der Bestrahlung bzw. Ausstrahlung des benutzten Metalls abhängt. Der Ausführung der Absicht, das Gesetz dieses Zusammenhangs systematisch aufzusuchen, stellte sich die Schwierigkeit entgegen, daß die Zentrierung der Anordnung des benutzten Apparats nicht so vollkommen durchführbar war, wie sich dies zur Erzielung genügend sicherer Ergebnisse hinsichtlich der Winkelabhängigkeit als notwendig erwies. Es seien daher im folgenden nur 2 Spezialfälle eingehender betrachtet.

a) Bestrahlung und Ausstrahlung unter 45°.

Die mit reinem, nicht ausgeglühtem *Platin* und der Apparatanordnung *a* erhaltenen Ergebnisse werden in Fig. 3 und 4 veranschaulicht. Dieselben zeigen die Geschwindigkeitsverteilung der ausgestrahlten Elektronen für mehrere Primärstrahlgeschwindigkeiten.

Die oberen 4 Kurven der Fig. 3, welche sich auf den gegenwärtigen Fall beziehen, zeigen den Verlauf der Geschwindigkeitsverteilung in dem die kleineren Geschwindigkeiten betreffenden Bereich von 0 bis 100 Volt. Der anfänglich allen 4 Kurven sehr nahe gemeinsame etwas steilere Abfall deutet die Sekundärstrahlung an, während der weitere flachere und für jede Primärgeschwindigkeit individuelle Verlauf anzeigt, daß unter den austretenden Elektronen auch alle durch die Abszissenwerte angegebenen größeren Geschwindigkeiten vertreten sind.

Verfolgt man die Kurven nach größeren Geschwindigkeiten, so zeigt sich zunächst ein weiterer Abfall mit nahe konstanter Neigung. Bemerkenswerte Verhältnisse treten aber ganz in der Nähe der Primärgeschwindigkeit auf, wie die Kurven der Fig. 4 erkennen lassen, in welchen mit besonderer Genauigkeit das Ende der Verteilungskurven verzeichnet ist. Der Schnittpunkt jeder Kurve mit der Abscissenachse ist jeweils streng der Wert der Primärgeschwindigkeit, der jeder Kurve beigeschrieben ist. Von hier aus sind die in der Ausstrahlung vertretenen kleineren Geschwindigkeiten jeweils nach links zu zählen, wobei der konstante Maßstab durch die Angabe der Länge für 10 Volt festgelegt ist.

Es ist zunächst hervorzuheben, daß jede Verteilungskurve — bis auf etwa 0,1 Volt genau — bei der Primärgeschwindigkeit endigt. Schnellere Elektronen sind nie nachweisbar gewesen; eine Andeutung dafür, daß etwa ein Teil der Elektronenenergie dem emittierenden Atom entnommen sein könnte, ist also aus diesen Beobachtungen nicht zu ersehen.

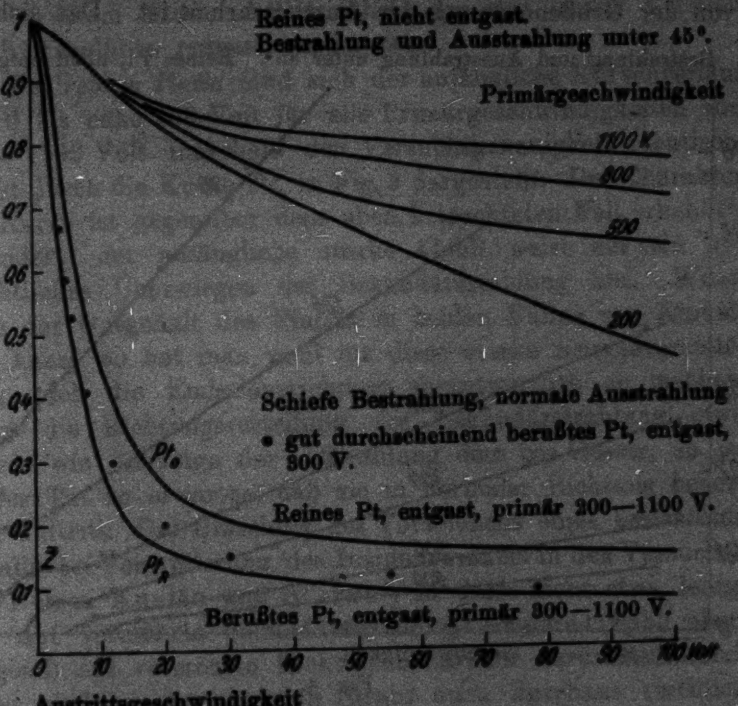


Fig. 3.

Wird das elektrische Gegenfeld nur um ein Geringes unter die Primärgeschwindigkeit erniedrigt, so steigen die Kurven relativ rasch an, behalten dann kurze Zeit die gleiche Höhe, um bei weiterer Verringerung des Gegenfeldes in den bereits erwähnten nahe linearen langsameren Anstieg überzugehen. Der erste Anstieg ist um so ausgeprägter und stärker, je geringer die Primärgeschwindigkeit ist. Über 500 Volt ist die Erscheinung nicht mehr deutlich beobachtet worden.

Während der Allgemeinverlauf der Verteilungskurven zeigt, daß unter den austretenden Elektronen in allen untersuchten

Fällen Geschwindigkeiten von Null bis zur primären vorhanden sind, geht aus dem Endverlauf hervor, daß der Anteil der schnellsten Elektronen mit abnehmender Primärgeschwindigkeit wächst und einen relativ hohen Betrag annehmen kann. Der Durchschnittswert der Geschwindigkeit dieser Elektronen liegt bei allen Kurven etwa 1—2 Volt unterhalb der primären, was von der Größenordnung der Austrittsarbeit ist. Das sich an-

Bestrahlung und Ausstrahlung unter 45°. Reines Pt, nicht entgast.

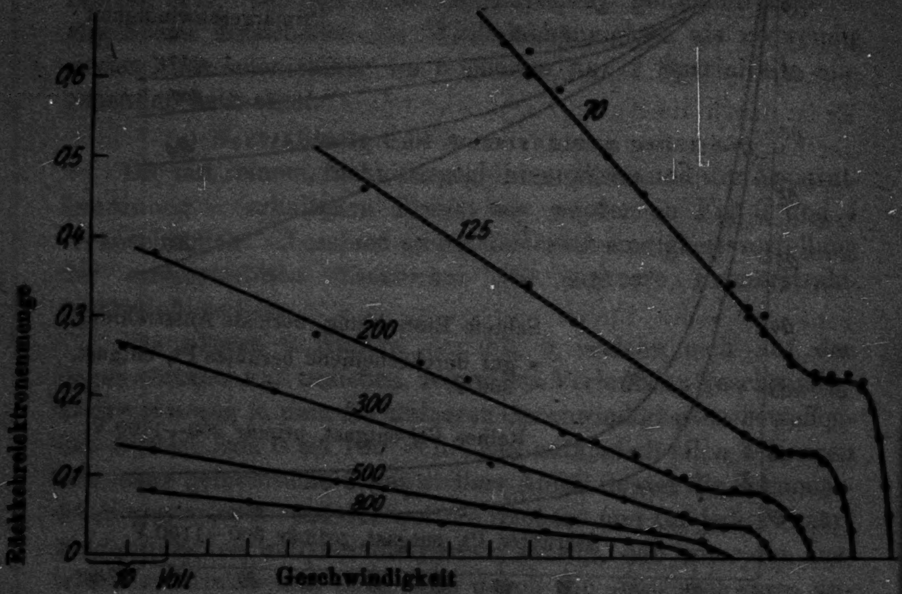


Fig. 4.

schließende horizontale Kurvenstück der Länge von etwa 5 Volt weist auf ein Fehlen von emittierten Elektronen im entsprechenden Geschwindigkeitsgebiet hin. Die Kurve der rückkehrenden Elektronen wird dadurch in 2 Teile getrennt, von denen der eine Elektronen zugehört, die nahezu keinen Geschwindigkeitsverlust erlitten haben, während der andere Elektronen umfaßt, deren Geschwindigkeitsverlust von einem bestimmten Minimalwert an wachsende Werte haben kann. Es liegt nahe, die ersteren als echt reflektierte, die letzteren als rückdiffundierte anzusehen. Damit dürfte in der Tat zum erstenmal eine scharfe, mit wachsender Primärgeschwindigkeit langsam verschwindende Grenze zwischen beiden Erscheinungen angezeigt sein.

Die Sekundärstrahlung tritt im vorliegenden Fall wenig scharf hervor, so daß der Versuch einer Abtrennung derselben kaum auf Sicherheit rechnen könnte.

b) Schiefe Bestrahlung und normale Ausstrahlung.

Wir wenden uns hiermit den mit der Anordnung *b* ausgeführten Hauptversuchen zu. Sie wurden mit reinem und mit berußtem Platin durchgeführt, das vor jedem Versuch durch Ausglühen entgast worden war.

Bei *reinem Platin* fand sich der anfängliche Kurvenverlauf von 0 bis nahe 100 Volt für alle Primärgeschwindigkeiten von 200—1100 Volt innerhalb der Versuchsgenauigkeit identisch. Er ist durch die Kurve Pt_0 in Fig. 3 dargestellt. Der Charakter der Kurve ist gegenüber dem oben betrachteten Fall erheblich verändert; der anfängliche starke Abfall weist auf ein beträchtliches Überwiegen der Sekundärstrahlung hin. Wenn auch der Gasgehalt des Platins in beiden Fällen von Einfluß sein kann, so hat man wohl für diese starke Kurvenveränderung auch die Emissionsrichtung verantwortlich zu machen. Folgt die Richtungsverteilung der Sekundärstrahlung etwa ebenso wie diejenige der δ-Strahlung dem cos-Gesetz, so ist in der Tat zu erwarten, daß sie in normaler Richtung bevorzugt auftritt. Der Umschlag des Vorzeichens eines bestrahlten Metalls bei Vergrößerung des Inzidenzwinkels in den Versuchen der Herren **Austin** und **Starke**[1]) ist dann nicht etwa lediglich auf vermehrte Sekundärstrahlung, sondern (wohl überwiegend) auf vermehrte Elektronenrückkehr zurückzuführen.[2]) Dann sind im austretenden Strahl auch durchaus reichlich hohe Geschwindigkeiten zu erwarten.

Unter den rückkehrenden Elektronen sind auch im gegenwärtigen Fall alle Geschwindigkeiten bis zu den primären vertreten.

Von großem Interesse ist auch jetzt die nähere Betrachtung des letzten Kurvenstücks. Wir geben zu diesem Zweck in Fig. 5 vier vollständige Verteilungskurven für die Primär-

---

1) L. **Austin** u. H. **Starke**, Ann. d. Phys. 9. S. 271. 1902; Verh. d. D. Phys. Ges. 4. S. 106. 1902.

2) Natürlich müßte der Bruchteil der rückkehrenden Elektronen (die auffallende Menge = 1 gesetzt) stets kleiner bleiben als 1.

geschwindigkeiten 12, 20, 30 und 39 Volt. Hierbei sind die ungestrichenen Beobachtungspunkte (•) mit der Schaltung *A*, die gestrichenen (•-) mit der Schaltung *B* gemessen worden. Der Anschluß der beiden Meßverfahren aneinander ist, wie man erkennt, voll befriedigend. Die früher betrachteten Geschwindigkeitsstufen sind auch jetzt stark ausgeprägt. Ein Unterschied liegt jetzt nur darin, daß hier, den kleinen Primärgeschwindigkeiten entsprechend, das Zwischengebiet zwischen dem ersten und letzten Kurvenabfall nahezu fehlt. In dem Maße, wie der letzte Kurvenanstieg mit sinkender Primärgeschwindigkeit wächst, tritt der Anteil der Sekundärstrahlung zurück, und bei 12 Volt Primärgeschwindigkeit ist die ganze Verteilungskurve zum Vertreter des letzten Kurvenstücks geworden. Alle hierbei vom Platin ausgestrahlten Elektronen sind also unserer zuvor geäußerten Auffassung entsprechend als reflektierte zu betrachten. Wie weit gleichzeitig noch sekundäre Elektronen etwa anwesend sind, läßt deren jeden-

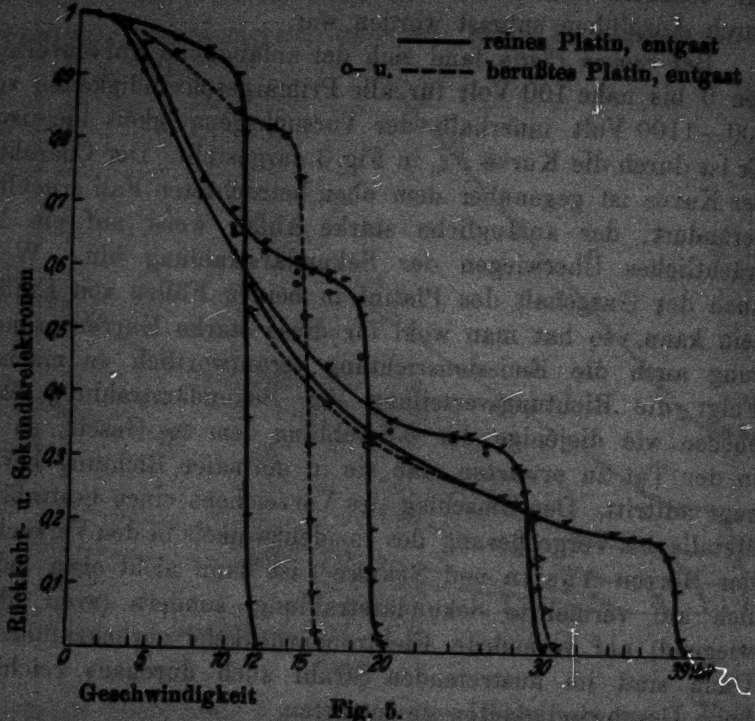


Fig. 5.

falls äußerst geringe Anzahl nicht mehr erkennen. Von einer scharfen Angabe der Grenzgeschwindigkeit auf Grund solcher Beobachtungen müssen wir daher absehen. Wie man erkennt, ist aber bei 20 Volt-Strahlen die Sekundärstrahlung schon sehr deutlich ausgeprägt, und ihr Einfluß wächst mit zunehmender Primärgeschwindigkeit weiter.

Bei *berußtem Platin* haben wir die reinsten Versuchsverhältnisse, da hier im Emissionsraum infolge Abwesenheit jeder Kontaktpotentialdifferenz (und geringe Strahldichte vorausgesetzt) volle Feldfreiheit besteht. Die hierbei gewonnenen Ergebnisse seien daher mit größerer Vollständigkeit wiedergegeben. Die Tab. 1 verzeichnet den Gang der in den Auffänger gelangenden Elektronenmenge mit der Höhe des Gegenfeldes (die ohne Gegenfeld eintretende Menge = 1 gesetzt). Das negative Vorzeichen der ersten Kolonne deutet beschleunigende Meßfelder an. Daß diese die eintretende Elektronenmenge nicht beeinflussen, zeigt Einwandfreiheit der Meßfeldanordnung an.

Der anfängliche Verlauf ist für Primärgeschwindigkeiten von 300—1100 Volt identisch. Eine graphische Darstellung desselben gibt die Kurve Pt_R der Fig. 8. Der Charakter der Kurve ist derselbe wie bei reinem Platin; die Sekundärstrahlung ist aber noch deutlicher vorherrschend. Durch die eingezeichneten Punkte (•) ist das Ergebnis eines Versuchs mit 300 Voltstrahlen und einer Platinfolie wiedergegeben, welche so dünn berußt worden war, daß das Platin noch hell durchschimmerte. Man erkennt den Übergang zur Kurve Pt_0, der anzeigt, daß die austretenden Elektronen von relativ niederen Geschwindigkeiten dünnste Rußschichten zu durchdringen vermögen.

Der erste Teil der Kurve Pt_R ist in Fig. 6 durch Kurve *a* in größerem Maßstab aufgetragen. Man findet hier außerdem die graphische Darstellung des Inhalts der anderen Kolonnen der Tabelle. Mit abnehmender Primärgeschwindigkeit liegen die Kurven höher, was eine entsprechende Abnahme des relativen Anteils der Sekundärstrahlung andeutet.

Bezüglich der Frage nach dem etwaigen Einfluß von Raumladungen auf den Kurvenverlauf sei zunächst auf die beiden in Tab. 1 eingetragenen Versuche mit 300 Voltstrahlen

Tabelle 1.

Berußtes Platin. **Meß-Schaltung A.**

Gegenfeld	Primärstrahlgeschwindigkeit Volt							
	31	49	100	200	300	300	500	1100
Volt	Aufgefangene Elektronenmenge $\bar{z}$ (relativ)							
−2	1,01	—	1,00	1,02	1,01	—	1,00	1,03
0	1	1	1	1	1	1	1	1
+0,5	—	—	—	0,99	0,98	1,00	0,99	—
1	—	0,98	0,99	0,98	0,95	0,94	0,94	0,94
1,5	—	—	0,95	—	—	—	0,89	0,88
2	—	0,93	0,90	0,87	0,85	0,84	0,83	0,82
3	0,94	0,88	0,81	0,77	0,72	0,73	0,73	0,72
4	—	0,80	0,71	0,67	0,61	0,61	0,68	—
5	0,81	0,75	0,64	—	0,54	0,58	0,55	0,54
6	0,77	0,71	0,58	0,53	0,49	0,48	0,47	0,47
8	0,68	0,61	0,46	0,42	0,38	0,37	0,39	0,38
10	0,56	0,51	0,41	0,34	0,32	0,30	0,31	0,31
12	0,50	0,43	0,33	0,28	0,27	0,25	0,26	0,27
20	0,29	0,28	0,21	0,17	0,17	0,16	0,16	0,17
30	—	0,16	0,16	—	—	—	0,12	0,14
40	—	—	0,11	0,11	0,11	0,095	—	0,12
50	—	—	—	0,09	0,09	0,086	0,10	0,11
70	—	—	0,070	0,083	0,071	0,073	—	0,10
100	—	—	—	0,058	0,051	0,052	—	0,098

hingewiesen. Dieselben unterscheiden sich dadurch voneinander, daß der erste mit möglichst niederer Strahlintensität ausgeführt wurde und der zweite mit einer etwa 3 fachen Intensität. Ein deutlicher Unterschied der Ergebnisse ist nicht vorhanden, woraus wir schließen, daß Raumladungseinflüsse bei diesen Versuchen nicht wesentlich waren. Eine viel stärkere Intensitätssteigerung führt allerdings zu deutlicher

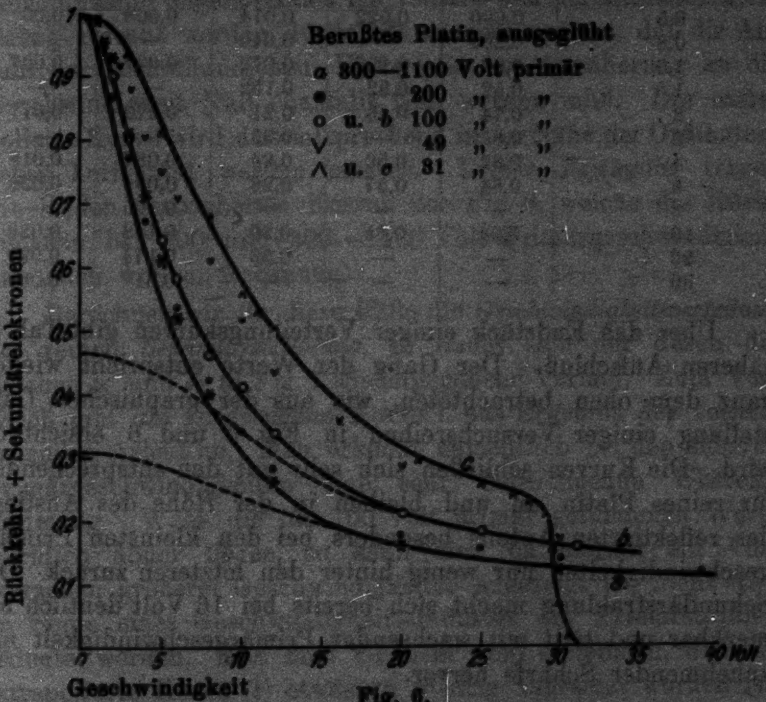


Fig. 6.

Kurvenänderung. Durch Sterne (*) ist in Fig. 6 das Resultat eines Versuchs eingetragen, der mit 800 Voltstrahlen und einer durch Erhöhung des Glühstroms hervorgerufenen Steigerung der normal benutzten Intensität auf das 30 fache ausgeführt wurde. Die Verschiebung der Kurve nach größeren Geschwindigkeiten zeigt, wie es zu erwarten ist, eine Verminderung der Zahl langsamer Elektronen an[1]), während der weitere Kurvenverlauf nicht merklich verändert erscheint.

---

[1]) Eine solche Kurvenstörung wird darnach bei galvanometrischer Messung immer vorhanden sein.

Tabelle 2.

Berußtes Platin. **Meß-Schaltung B.**

Volt unterhalb der Primärgeschwindigkeit	Primärstrahlgeschwindigkeit Volt				
	16	20	31	49	100
	Aufgefangene Elektronenmenge z (relativ)				
0,1	0,003	—	0,00	0,00	—
0,5	0,090	0,022	0,014	0,008	0,00
0,8	0,204	—	0,040	—	—
1,0	0,32	0,126	0,072	0,031	0,007
1,5	0,52	0,32	0,152	—	—
2	0,74	0,46	0,21	0,070	0,011
3	0,81	—	0,23	—	—
4	0,82	0,56	0,24	0,087	0,018
6	0,84	0,57	0,26	0,096	0,020
8	—	—	—	0,105	—
10	0,94	0,65	0,30	0,108	0,023
20	—	—	0,53	0,174	0,029
30	—	—	—	0,31	0,050

Über das Endstück einiger Verteilungskurven gibt Tab. 2 näheren Aufschluß. Der Gang der Werte entspricht wieder ganz dem oben betrachteten, wie aus der graphischen Darstellung einiger Versuchsreihen in Fig. 5 und 6 ersichtlich wird. Die Kurven schließen sich sehr gut den entsprechenden für reines Platin an und bleiben in der Höhe des Anstiegs des reflektierten Anteils besonders bei den kleinsten Primärgeschwindigkeiten nur wenig hinter den letzteren zurück. Die Sekundärstrahlung macht sich bereits bei 16 Volt deutlich bemerkbar und tritt mit wachsender Primärgeschwindigkeit mit zunehmender Schärfe hervor.

3. Sekundärstrahlung.

Dieses Hervortreten der Sekundärstrahlung im Falle des berußten Platins bei normaler Emission, gegenüber dem das reine Platin — vielleicht seiner Gasfreiheit wegen — merklich zurücksteht, legt den Versuch einer Abtrennung dieser Teilerscheinung nahe. Aus der vollen Identität des anfänglichen Kurvenverlaufs für Primärgeschwindigkeiten von 300 bis 1100 Volt darf von vornherein zum mindesten mit großer Annäherung an die Wirklichkeit auf Unabhängigkeit der Eigenschaften der Sekundärstrahlung von der Primärgeschwindigkeit in diesem Bereich geschlossen werden ganz in Übereinstimmung mit den Folgerungen der vorhergehenden Untersuchung. Um diese Eigenschaften im einzelnen zu erkennen, muß wie früher der Verlauf der Rückdiffusion extrapoliert und von der Gesamterscheinung im Bereich der kleinsten Geschwindigkeiten subtrahiert werden. Wir gehen dabei von der Erwägung aus, daß eine völlig geradlinige Rückwärtsverlängerung[1]) des der Rückdiffusion angehörenden Kurventeils den Verhältnissen nicht streng gerecht werden dürfte, da anzunehmen ist, daß die Anzahl der rückdiffundierten Elektronen bei Annäherung an die Geschwindigkeit Null ebenfalls Null werden muß. Die extrapolierte Kurve wird dementsprechend in der Nähe der Ordinatenachse horizontal werden müssen. Dieser Erwägung tragen die beiden gestrichelten Kurven der Fig. 6, welche die Rückdiffusion bei 100 und 300—1100 Volt Primärgeschwindigkeit darstellen wollen, Rechnung.

Berechnen wir für diese Fälle die *Geschwindigkeitsverteilung der reinen Sekundärstrahlung*, so findet sich der durch die Zeichen × und •– in Fig. 7 wiedergegebene Verlauf. Zum Vergleich gibt die ausgezogene Kurve 1 das Ergebnis der vorhergehenden Arbeit an. Man erkennt namentlich bei den höheren Primärgeschwindigkeiten eine sehr befriedigende Übereinstimmung. Wenn die für 100 Volt primär gefundenen Werte merklich höher liegen, so kann dies, da hiermit ein Vorherrschen größerer Geschwindigkeiten angezeigt ist, nicht etwa im Sinne eines Geschwindigkeitseinflusses der Primärstrahlen gedeutet werden. Man muß vielmehr wohl annehmen, daß die extrapolierte Kurve (*b*) etwas zu niedrig angesetzt worden ist. Diese noch bleibende Unsicherheit in der Extrapolation würde bei noch kleineren Primärgeschwindigkeiten noch stärker hervortreten, so daß auf ein Fortschreiten zu letzteren auf Grund der beobachteten Kurven verzichtet werden muß.

Es wurde demgegenüber der Versuch gemacht, auf mehr experimentellem Wege durch möglichst noch schärfere *Isolierung* der Erscheinung *der Sekundärstrahlung* deren Eigenschaften zu erforschen. Hierbei zeigten sich zwei Wege erfolgreich: 1. Wurde die scharfe Kante eines schwach berußten Metallblechs bestrahlt und deren Emission mit der Anordnung *a* gemessen, so fanden sich Geschwindigkeitsverteilungskurven, welche

---

[1]) Die Durchführung dieses Verfahrens in der vorhergehenden Arbeit bleibt insofern einwandfrei, als dort der Rückdiffusionseinfluß stets stark zurücktrat und die Korrektion, wie damals bemerkt, wenig erheblich blieb.

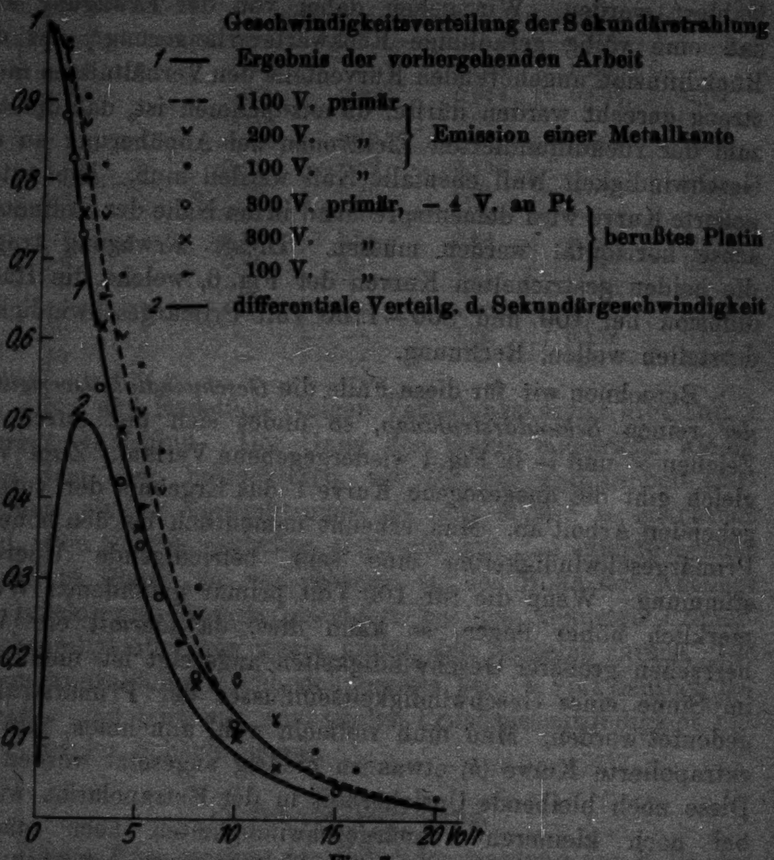


Fig. 7.

ein nahe vollständiges Fehlen größerer Geschwindigkeiten anzeigten. In Fig. 7 wird durch die gestrichelte Kurve eine solche Verteilung für 1100-Voltstrahlen angegeben, während die Zeichen • und ∨ Beobachtungen bei Primärgeschwindigkeiten von 100 und 200 Volt entsprechen. Die große Annäherung der unmittelbar beobachteten Werte an die aus andern Versuchen abgeleitete Sekundärstrahlenkurve läßt schließen, daß der Charakter der letzteren unzweifelhaft richtig erkannt ist. Aus dem Fehlen der höheren Geschwindigkeiten bei diesen nicht ganz leicht reproduzierbaren Versuchen geht hervor, daß die Rückdiffusion von der bestrahlten Kante jedenfalls weit weniger gerichtet war als die Sekundärstrahlung. 2. Als zweiter Weg der Begünstigung der Sekundärstrahlung fand sich die schwache negative Aufladung der feststehenden berußten Platinfolie der Anordnung *b*. Während im feldfreien Emissionsraum unter den emittierten Elektronen, wie gezeigt, alle Geschwindigkeiten von Null bis zu den primären deutlich vertreten sind, genügt schon eine negative Aufladung der emittierenden Folie auf wenige Volt, die schnelleren Elektronen relativ so stark zurückzudrängen, daß die beobachtbare Verteilungskurve nahe vollständig mit der für die reine Sekundärstrahlung abgeleiteten zusammenfällt. In Fig. 7 sind die bei Vorhandensein eines beschleunigenden Hilfsfeldes von —4 Volt Spannungsdifferenz im Emmissionsraum für 300 Volt Primärgeschwindigkeit beobachteten Werte durch Ringe (○) angezeigt. Man muß dieses scheinbar paradoxe Ergebnis offenbar so deuten, daß das geringe beschleunigende Feld die langsameren Sekundärelektronen vorzugsweise in die Meßrichtung richtet und daher der Meßanordnung zuführt, so daß deren *relativer* Anteil an der Gesamtelektronenmenge der betreffenden Richtung so hoch wird, daß demgegenüber die schnelleren rückdiffundierten Elektronen nur einen sehr geringen Bruchteil ausmachen. Daß letzterer tatsächlich noch vorhanden ist, zeigt die Beobachtung deutlich. Diese Erscheinung zeigt auch, wie wichtig es ist, daß der Emissionsraum völlig feldfrei ist, wenn die Verhältnisse der Ausstrahlung störungsfrei untersucht werden sollen. Bei Anlegen eines die austretenden Elektronen verzögernden Feldes beobachtet man im wesentlichen einen Kurvenverlauf, wie er sich durch Linksverschiebung der ungefälschten Kurve um die betreffende Spannung ergibt; es fehlen dann also vornehmlich die langsameren Elektronen, und die Kurve fällt langsamer ab.

Die Gesamtheit dieser Beobachtungen steht in guter Übereinstimmung mit der in der vorhergehenden Arbeit angegebenen Geschwindigkeitsverteilung der Sekundärstrahlung, für die also im wesentlichen die differentiale Kurve 2 der

Fig. 7 gilt, deren Gleichung wir früher für die δ-Strahlung entwickeln konnten.[1])

4. Elektronenreflexion.

Betrachten wir die Ordinatenhöhe der beobachteten Geschwindigkeitsstufe des jeweiligen Endstücks der Verteilungskurven, die wir als Maß für diejenigen Primärelektronen ansehen, welche ohne erheblichen Geschwindigkeitsverlust beim ersten Zusammentreffen mit einem Atom des bestrahlten Körpers in die Beobachtungsrichtung reflektiert werden, so erkennt man zunächst eine wesentliche Abhängigkeit von der Richtung der Bestrahlung bzw. der Reflexion. Diese ist unter 45°, bei Gasgehalt des Reflektors, in merklichen Beträgen noch bei Primärgeschwindigkeiten verfolgbar, welche in normaler Richtung kaum mehr eine Reflexion erkennen lassen. Die Abhängigkeit der Erscheinung von der Primärgeschwindigkeit ist in beiden Fällen stark ausgeprägt, während die Berußung des Metalls sich nicht von großem Einfluß gezeigt hat.

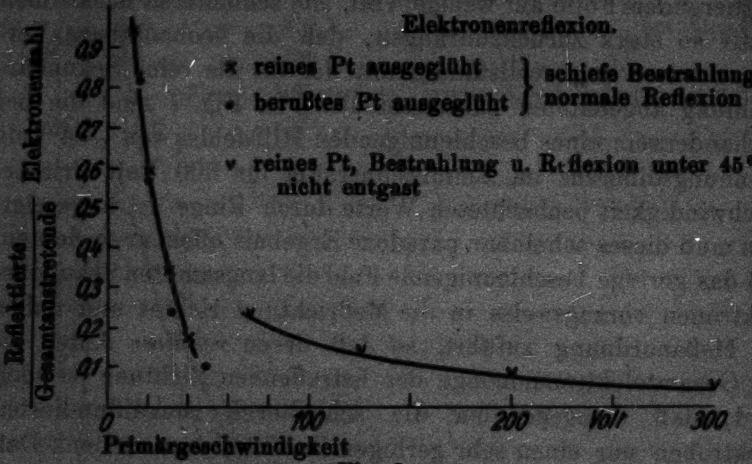


Fig. 8.

Zur Übersicht sei in Fig. 8 die Größe der Reflexion für alle untersuchten Fälle verzeichnet. Die Abscisse gibt die Primärgeschwindigkeiten an und die Ordinate die reflektierte Elektronenmenge als Bruchteil der jeweils im ganzen ausgestrahlten Menge. Es handelt sich hier also nicht um sog. Reflexionskoeffizienten, da eine Bezugnahme auf die einfallende Primärmenge in den gegenwärtigen Messungen nicht erfolgte.

---

[1]) A. Becker, Ann. d. Phys. 75. S. 791. 1924.

Während bei kleinen Primärgeschwindigkeiten von etwa 12 Volt abwärts alle ausgestrahlten Elektronen offenbar reflektierte sind, nimmt deren Anteil mit wachsender Primärgeschwindigkeit außerordentlich schnell ab und beträgt bei normaler Emission bei 50 Volt nur mehr 10 v. H. Wird der Winkel zwischen Einfalls- und Austrittsrichtung verringert — wie beim Übergang von 120 auf 90° in unseren beiden betrachteten Fällen — so wird der reflektierte Anteil vergrößert, während die Sekundärstrahlung zurücktritt.

Wenn wir alle nach Abzug der sekundären und der wie oben definierten reflektierten Elektronen verbleibenden als *rückdiffundierte* bezeichnen, so ist damit zweifellos zutreffend ausgedrückt, daß es sich dabei um primäre Elektronen handelt, welche den bestrahlten Körper verlassen, nachdem sie mit mehr als einem Atom desselben zusammengetroffen sind. Denn sie zeigen alle Geschwindigkeitsverluste, die um etwa 5 Volt und mehr größer sind als diejenigen der „reflektierten“ Elektronen. Das zu diesen Verlusten führende Zusammentreffen ist jedenfalls ein anderes als das zu Reflexion führende; denn die Höhe der entzogenen Energie ist in beiden Fällen verschieden. Für sie ist stets der jeweilige Atomvorgang maßgebend; denn sie ist unabhängig von der Primärgeschwindigkeit. Wollte man das wohl mögliche Auftreten endlicher Richtungsänderungen beim Zusammentreffen mit irgendeinem Atom im Körperinnern noch als Reflexion bezeichnen, dann wäre eine Abtrennung dieser Erscheinung aus dem Gesamtphänomen aussichtslos.

Man erkennt die in unseren Ergebnissen enthaltene wesentliche Erweiterung unserer Kenntnis des untersuchten Erscheinungsgebiets gegenüber den Angaben des Herrn Gehrts und denjenigen von Frl. Baltruschat und Herrn Starke. Auch gegenüber den Beobachtungen des Herrn Farnsworth gelangen wir mit unseren neuen Feststellungen zu einer bemerkenswerten Verfeinerung, indem wir zwar ebenso wie dieser Autor das Vordensein schneller Austrittsstrahlen bis zur Primärstrahlgeschwindigkeit nachweisen, bei diesen aber eine feinere

Differenzierung durch Abtrennung der Sekundärstrahlung und Trennung von Reflexion und Rückdiffusion vornehmen, die erst quantitative Angaben über die Größe der Reflexion allein zuläßt. Schließlich bleibt zu den Untersuchungen der Herren Davisson u. Kunsman zu bemerken, daß deren willkürliches Herausgreifen solcher rückkehrender Elektronen, deren Geschwindigkeit größer ist als $^9/_{10}$ derjenigen der primären zu einer je nach der Höhe der benutzten Primärgeschwindigkeit stark variablen Mischung von rückdiffundierten und reflektierten Elektronen führen mußte, die summarisch behandelt wird. Während ihre Beobachtungen bei den kleinsten Primärgeschwindigkeiten sich daher fast ausschließlich auf echt reflektierte Elekronen beziehen, sind es bei den höheren Primärgeschwindigkeiten fast nur rückdiffundierte, deren Verhalten untersucht wird. Durch unsere gegenwärtige Beobachtung wird der Weg gezeigt, auf dem es möglich wäre, die Untersuchung der Richtungsverteilung bei allen Primärgeschwindigkeiten streng nur auf die reflektierten Elektronen zu beziehen. Es wäre kein *relativ* gleichbleibendes Geschwindigkeitsintervall festzuhalten, wie es die genannten Autoren tun, sondern ein *absolut* gleichbleibendes von etwa 2—3 Volt.

Zusammenfassung.

1. Es wird ein Versuchsverfahren angegeben, welches eine direkte Messung der Austrittsgeschwindigkeiten der Elektronen ermöglicht, die einen von langsamen Kathodenstrahlen (10 bis 1100 Volt) bestrahlten Körper *in bestimmter Richtung* verlassen. Die der Messung unterworfenen Elektronen werden aus der Gesamtemission durch Blenden ausgesondert und dann durch ein variables elektrisches Gegenfeld geschickt. Beobachtet wird die Abhängigkeit der Anzahl der das Feld durchsetzenden Elektronen von der Höhe der verzögernden Spannungsdifferenz. Der Emissionsraum bleibt dabei streng kräftefrei.

2. Untersucht wird die Ausstrahlung von reinem und berußtem Platin, das bei den Hauptversuchen durch kräftiges Ausglühen im Vakuum möglichst entgast wird. Die Beobachtung bezieht sich vorzugsweise auf die Emissionswinkel 0° und 45° (gegen die Flächennormale) bei Inzidenzwinkeln von 60° und 45°.

3. Die Messungen führen zu folgenden Ergebnissen:

a) Unter den austretenden Elektronen sind im allgemeinen (nahe)[1] alle Geschwindigkeiten zwischen Null und der primären vertreten.

b) Die Verteilungskurve der Geschwindigkeiten läßt deutlich drei Teile erkennen, einen anfänglich rascheren Abfall, daran anschließend nahe gleichförmige langsamere Abnahme und gegen Ende wieder schnelleren Abfall gegen die Primärgeschwindigkeit. Während der erste Teil wesentlich der Sekundärstrahlung zukommt, entsprechen die beiden anderen Teile rückkehrenden Primärelektronen.

c) Bei kleinen Primärgeschwindigkeiten ist der letzte Kurventeil stark ausgeprägt. Er entspricht dem Vorhandensein solcher primärer Elektronen, welche den bestrahlten Körper nahe ohne Geschwindigkeitsverlust — der durchschnittliche Verlust beträgt nur 1—2 Volt — verlassen und die daher als *echt reflektierte* angesehen werden.

d) Während bei Primärgeschwindigkeiten unter etwa 12 Volt offenbar alle austretenden Elektronen reflektierte sind, sinkt der Anteil der letzteren an der Gesamtemission mit wachsender Primärgeschwindigkeit sehr rasch. Er behält aber um so länger merkliche Werte, je geringer der Winkel zwischen einfallendem und austretendem Strahl ist. War letzterer 90°, so konnte noch deutlich Reflexion von 300-Voltstrahlen beobachtet werden; war er 120°, so ließ sich eine Reflexion noch etwa bei 60-Voltstrahlen nachweisen. Da der Reflektor aber nur im letzteren Fall entgast war, bleibt allerdings noch unentschieden, wie weit diese Verschiedenheit der Reflexion auf den Gasgehalt zurückzuführen ist.

e) Etwa in dem Maß, wie bei kleineren Primärgeschwindigkeiten — sei es mit wachsenden Werten derselben, sei es mit größeren Winkeln zwischen einfallendem und austretendem Strahl — die Reflexion abnimmt, tritt die Sekundärstrahlung deutlicher hervor. Ihren Höchstwert erreicht sie offenbar bei vertikalem Austritt, was einer Richtungsverteilung nach Art des Cosinus-Gesetzes entsprechen würde.

---

[1] Bezüglich der Einschränkung vgl. den folgenden Abschnitt g.

f) Der Versuch einer Abtrennung der Sekundärstrahlung, der bei Primärgeschwindigkeiten über 100 Volt genügende Sicherheit erreicht, führt zu Ergebnissen, welche mit den auf anderem Wege ermöglichten Feststellungen der vorhergehenden Arbeit in guter Übereinstimmung sind. Daraus kann geschlossen werden, daß die Geschwindigkeitsverteilung der Sekundärstrahlen von der Emissionsrichtung nicht offenbar merklich abhängt.

g) Der zweite Teil der Geschwindigkeitsverteilungskurve ist in allen Fällen, in denen der dritte deutlich hervortritt, von diesem durch ein elektronenfreies bzw. elektronenarmes Geschwindigkeitsgebiet von etwa 5 Volt Breite getrennt. Ihm gehören Elektronen an, welche verschieden große Geschwindigkeitsverluste, mindestens aber einen um etwa 5 Volt größeren als die reflektierten Elektronen, erlitten haben und daher den bestrahlten Körper nach dem Zusammentreffen mit offenbar mehr als einem Atom desselben verlassen. Dieselben werden daher als *rückdiffundierte* Elektronen angesehen.

Für die Gewährung der von der vorliegenden Untersuchung beanspruchten laufenden Mittel habe ich der Gesellschaft der Freunde der Universität Heidelberg und der Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft bestens zu danken.

Heidelberg, Radiolog. Institut u. Theor.-Physikal. Apparat.

(Eingegangen 7. Oktober 1925.)

---

4. *Über die Leuchtdauer der Röntgenstrahlen;*
von Fritz Kirchner.

(Münchner Habilitationsschrift.)

In den letzten Jahren ist es gelungen, die Leuchtdauer der Atome bei der Aussendung einer Reihe von Spektrallinien im optischen Gebiet einwandfrei zu messen; diese Messung beruht darauf, daß die Abklingung der Intensität eines in ein hohes Vakuum eintretenden Kanalstrahls beobachtet wird.[1]) Die am Dopplereffekt meßbare Geschwindigkeit der leuchtenden Atome liefert dann zusammen mit dieser Abklingung die gesuchte mittlere Leuchtdauer. Im Gebiete der Röntgenstrahlen liegen nur vereinzelte Versuche vor, wenigstens die Größenordnung der gesuchten Zeit zu bestimmen. Die älteren Versuche[2]) mit mechanischen Zeitmeßmethoden lieferten nicht die Dauer des elementaren Strahlungsvorgangs, sondern die Dauer einer Partialentladung des Schwingungskreises, der durch Röntgenröhre und Zuleitungen gebildet wurde, oder die Dauer eines „Induktorschlages“. Als Resultat ergaben sich dabei Zahlen von der Größenordnung 10^{-3} bis 10^{-5} Sek. Später schloß E. Marx[3]) aus schwierigen Versuchen zur Geschwindigkeitsmessung der Röntgenstrahlen, daß „die Dauer der Röntgenstrahlen ein Bruchteil der halben Schwingungsdauer der die Strahlen erzeugenden Hertzschen Welle ist“;[4]) diese halbe Schwingungsdauer war $2 \cdot 10^{-9}$ Sek. Gegen die Versuche sind von J. Franck und R. Pohl Einwände erhoben worden, die zu einer längeren Diskussion führten, ohne aber eine restlose Klärung zu bringen. In neuerer Zeit hat C. T. R. Wilson[5])

---

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 60. S. 597. 1919 u. einige weitere Abhandlungen.

2) Z. B. Morize, Compt. rendus 127. S. 546. 1898.

3) E. Marx, Ann. d. Phys. 33. S. 1371. 1910.

4) E. Marx, Handbuch d. Radiol. V. S. 285. 1919.

5) C. T. R. Wilson, Proc. Roy. Soc. A. 104. S. 22. 1923.

beiläufig aus seinen bekannten Nebelkammeraufnahmen den Schluß gezogen, daß charakteristische Röntgenstrahlung während einer Zeit von der Größenordnung 10^{-3} Sek. nach ihrer Anregung bestehen kann. Eine solche überraschend große „Verweilzeit“ soll nach Wilson unter Umständen dadurch entstehen können, daß die Elementarstrahlung von Atom zu Atom „weitergereicht“ wird. Dieser Vorgang ist bei der optischen Resonanzstrahlung wohlbekannt und führt zu einer Art Diffusion der Strahlung durch ein Gas; er täuscht eine längere Dauer des Strahlungsvorgangs vor, als dem Elementarprozeß entspricht. Immerhin dürfte aber eine Verlängerung auf 10^{-3} Sek. schon im optischen Gebiet ziemlich unwahrscheinlich sein. Aus den bisherigen Ergebnissen läßt sich jedenfalls kein klares Bild über die Größenordnung der Dauer des Strahlungsprozesses im Röntgengebiet gewinnen.

Vor 3 Jahren wurde auf Anregung von Herrn Geheimrat W. Wien vom Verfasser dieser Arbeit mit Versuchen begonnen, die eine möglichst einwandfreie Messung der gesuchten Zeit bei langwelligen Röntgenstrahlen zum Ziele hatten. Als Meßmethode erschien im Prinzip geeignet das von Th. Des Coudres und E. Wiechert[1]) zur direkten Messung der Geschwindigkeit von Kathodenstrahlen benutzte Verfahren; dieses Verfahren beruhte auf der Ablenkung der Kathodenstrahlen durch schnelle elektrische Schwingungen. Die Versuchsanordnung Wiecherts ist in folgender Fig. 1 schematisch dargestellt:

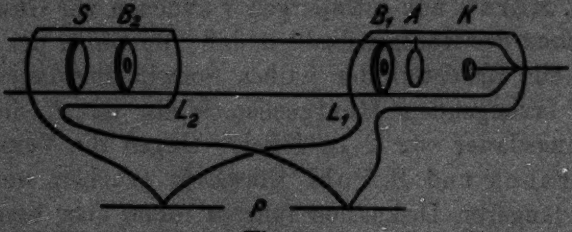


Fig. 1.

Um die Kathodenstrahlröhre mit Kathode K, ringförmiger Anode A, zwei Blenden B_1 und B_2 und einem Fluoreszenzschirm S sind in der angedeuteten Weise zwei Drahtkreise L_1

---

1) Th. Des Coudres, Verh. d. Physik. Ges. Berlin 14. S. 157. 1897; E. Wiechert, Ann. d. Phys. 69. S. 739. 1899.

und L_2 geschlungen, die mit den Platten P schwingungsfähige Systeme bilden. Die von K ausgehenden Kathodenstrahlen, die normalerweise parallel zur Röhrenachse verlaufen und durch die Blenden hindurchtreten würden, werden durch einen (nicht gezeichneten) Hufeisenmagneten nach unten gebogen. Werden nun durch einen Hertzschen Oszillator, mit dem die Drahtkreise kapazitiv gekoppelt sind, in dem Drahtkreise L_1 Schwingungen erzeugt, so pendeln die Kathodenstrahlen in dem Wechsel-Magnetfelde der Schwingung hin und her (in der Zeichenebene nach oben und unten). Man erregt nun die Schwingung gerade so stark, daß der am weitesten nach oben abgelenkte Strahl gerade durch die Blende B_1 hindurchtritt. Durch diese Blende gehen dann offenbar periodisch Kathodenstrahlstöße (die Periode ist gleich der Periode der elektrischen Schwingung), die nun durch das Entladungsrohr hindurch auf die Blende B_2 zueilen. Dort kommen sie in den Bereich des zweiten Drahtkreises L_2, der mit L_1 in gleicher Phase schwingt. Während der Strahl das Rohr durchläuft, ist die Schwingung weitergeschritten; und wenn man Schwingungsdauer und Rohrlänge so aufeinander abstimmt, daß vom Passieren der Blende B_1 bis zur Ankunft in B_2 gerade ein Viertel einer Schwingungsdauer verstrichen ist, dann kommen die Kathodenstrahlen in den Bereich von L_2, während hier das magnetische Feld 0 herrscht. Wird aus dieser Abstimmung heraus der Abstand $B_1 B_2$ verkürzt, so werden die Kathodenstrahlen im Bereich von L_2 nach der einen Seite, wird der Abstand verlängert, so werden sie nach der andern Seite magnetisch abgelenkt. Durch Einstellung auf diesen Umkehrpunkt konnte Wiechert aus der Schwingungsdauer — diese läßt sich leicht durch Messung der Wellenlänge an einem Paralleldrahtsystem bestimmen — und der Weglänge der Kathodenstrahlen $B_1 B_2$ die Geschwindigkeit der Strahlen berechnen.

Wenn man nun die periodischen Kathodenstrahlstöße dazu verwendet, etwa am Orte von B_2 Röntgenstrahlen zu erzeugen, und die Schwingung L_2 auf die von diesen Röntgenstrahlen ausgelösten Photoelektronen wirken läßt, so muß man nach demselben Prinzip eine bei der Umwandlung der Kathodenstrahlenergie in Röntgenstrahlenergie etwa eintretende Verzögerung, bzw. die „Leuchtdauer“ der die Röntgenstrahlen aussendenden Atome messen können. Dabei läßt sich freilich nicht entscheiden, ob bei der zu messenden Zeit auch die Auslösung des Photoelektrons eine Rolle spielt.

Zunächst ließ sich nun die Wiechertsche Methode mit den Mitteln der jetzigen Experimentiertechnik wesentlich verbessern. Die Messung mit Hilfe der magnetischen Ablenkung ist recht ungenau, vor allem weil die Meßstrecke wegen der großen Länge der Schleifen L_1 und L_2 zu wenig scharf definiert ist. Die elektrische Ablenkung mit Hilfe eines kurzen Kondensators konnte aber Wiechert deshalb nicht verwenden, weil in dem mäßig hohen Vakuum der Entladungsröhre sich am Kondensator eine selbständige Entladung bilden würde. Eine solche selbständige Entladung läßt aber das elektrische Feld zwischen den Kondensatorplatten sofort zusammenbrechen. Verwendet man nun Glühkathodenstrahlen im Hochvakuum, so fällt diese Störung weg; gleichzeitig wird es damit möglich, die beschleunigende Spannung und damit die Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen in beliebiger Weise unabhängig von der Stromstärke zu verändern. Einige Schwierigkeiten macht es bei Glühkathodenstrahlen freilich, einen kräftigen Elektronenstrom auf einem langen Wege annähernd parallel zu halten. Die bei Braunschen Röhren angewandte Zentrierung divergenter Strahlen durch Magnetspulen, unter deren Einwirkung sich die Strahlen auf einen Brennfleck zu „schrauben", mußte vermieden werden, weil die entstehende Wegverlängerung der Strahlen schwer kontrollierbar ist und die sonst klaren Versuchsbedingungen komplizieren würde. Da Versuche mit einer Steuerelektrode nicht den gewünschten Erfolg hatten, wurde schließlich ein kräftiges, annähernd paralleles Elektronenbündel in folgender Weise erzeugt: Das die Elektronen beschleunigende elektrische Feld wurde zwischen zwei parallelen, kreisrunden Platten aus Eisenblech (Kreisdurchmesser: 4 cm) hergestellt. Die Platten waren in einem gegenseitigen Abstand von etwa 2 cm — durch Quarz- oder Glasstäbe gehalten — in die Mitte einer Glaskugel von 12 cm Durchmesser geschoben. In der Ebene der einen Platte befand sich in einer kleinen Aussparung der 0,15 mm dicke und etwa 0,5 cm lange Wolfram-Glühfaden. Dem Glühfaden gegenüber hatte die andere Platte eine ähnliche Aussparung, durch die die Elektronen hindurchtreten konnten. (Über diese Aussparung wurde versuchsweise ein Gitter aus Wolframdraht gezogen; der Draht verdampfte aber im Elektronenstrom ziemlich rasch.) Aus dem durch die Aussparung hindurchgetretenen Elektronenbündel wurde in einigem Abstand nochmals ein Teil ausgeblendet, der nun zur Messung dienen konnte. Unter günstigen Bedingungen war dann der in 30—60 cm Entfernung von der Kathode fließende Elektronenstrom bei einem Querschnitt des Bündels von etwa 1 cm^2 ungefähr halb so stark wie der zwischen den Eisenplatten fließende Gesamtstrom. Die an den Platten liegende Spannung wurde durch Gleichstromdynamos geliefert; dabei lag der Glühfaden und mit ihm die isoliert aufgestellte Heizbatterie auf hohem negativem Potential, während die gegenüberliegende Platte geerdet war. Nach dem Passieren der geerdeten Platte verliefen die Kathodenstrahlen — abgesehen von dem elektrischen Feld der Ablenkungskondensatoren — dauernd in einem kräftefreien Raume, und zwar in geerdetem Metallrohr oder in Glasrohr, das zur Vermeidung störender Wandladungen innen mit geerdetem Drahtnetz ausgekleidet war.

Zur Ablenkung dienten bei Wiechert die gedämpften Schwingungen von Hertzschen Oszillatoren, die durch Funkenentladung angeregt wurden. Da aber trotz sehr schneller Funkenfolge die Zeit, während der der Oszillator schwingt, klein bleibt gegenüber der Zeit zwischen zwei Funken, während der er nicht schwingt, mußte Wiechert zur Erzielung genügender Intensität auch die Kathodenstrahlen nur während der kurzen Schwingungszeit entstehen lassen. Er beschleunigte deshalb die Kathodenstrahlen mit einer Schwingung, die durch denselben Funken angeregt wurde, wie die ablenkende Schwingung. Damit verzichtet man aber gleichzeitig auf eine scharf definierte, gleichbleibende Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen. Auf der andern Seite zeigten eigene Versuche mit einem durch Funken angeregten Schwingungskreis, daß die Intensität der durch eine solche Schwingung abgelenkten Kathodenstrahlen bei weitem nicht zu einer Beobachtung an Röntgenstrahlen ausreichte, wenn man zur Erzielung einer definierten Kathodenstrahlgeschwindigkeit Gleichspannung an das Entladungsrohr legte. Es wurde deshalb zur Verwendung ungedämpfter Schwingungen geschritten, die durch technische Elektronenröhren zu erzeugen waren. Die ganz kurzen Barkhausenschen Wellen kamen wegen ihrer geringen Energie nicht in Frage. Als brauchbar erwiesen sich die schnellen Schwingungen, die man mit Hilfe von zwei Senderöhren in Gegentaktschaltung[1]) erhält. Die Schaltanordnung ist in der folgenden Fig. 2 gegeben.

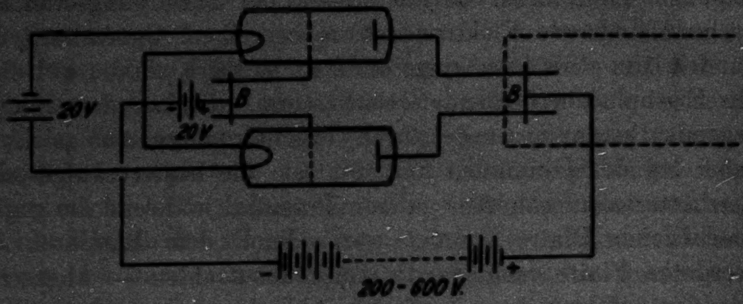


Fig. 2.

Als Senderöhren dienten z. T. Schottsche M-Röhren, z. T. Telefunkenröhren Type *RS* 55. Im schwingenden System liegt nur die Eigenkapazität der Röhren und die Selbstinduktion der kurzen Paralleldrahtleitung an Anode und Gitter. Die Frequenz der Schwingungen ließ sich durch Verschieben der Brücken *B* verändern; mit der Anordnung ließen sich intensive Schwingungen mit einer Wellenlänge von etwa 4 bis über 20 m hinaus leicht erzeugen. Für Wellenlängen über 10 m wurde zum Anodenkreis und zum Gitterkreis noch je ein variabler Plattenkondensator zugeschaltet. Die Abstimmung zwischen Gitter- und Anodenkreis war besonders bei hohen Frequenzen wegen der relativ festen Koppelung der beiden Kreise ziemlich unscharf; es wurde durch Probieren die Stellung der Gitterbrücke festgestellt, bei der zwar die Schwingungen leicht einsetzten, aber der primäre Energieverbrauch möglichst klein war. Mit der Anodenbrücke wurde das kurzgeschlossene Ende eines Paralleldrahtsystems aus 1 mm starken Kupferdrähten induktiv gekoppelt (in der Schaltskizze punktiert angedeutet). Im ungefähren Abstand von einer Viertelwellenlänge wurden mit kurzen Zuleitungen die Ablenkungskondensatoren an das

---

[1]) F. Holborn, Ztschr. f. Phys. 6. S. 328. 1921.

Paralleldrahtsystem gelegt. Schließlich wurde hinter den Kondensatoren auf dem Drahtsystem eine Metallbrücke solange verschoben, bis das System mit dem Sender in Resonanz war. Zur Messung der Wellenlänge des Senders genügte es, mit einem 2—4 Volt-Lämpchen als Brücke auf dem Paralleldrahtsystem eine Anzahl Knoten festzulegen — in den Knoten leuchtete das Lämpchen hell auf — und ihren Abstand zu bestimmen.

Mit diesen Veränderungen wird die Wiechertsche Methode der Messung der Kathodenstrahlgeschwindigkeit zu einem exakten Meßverfahren. Die Messung der Geschwindigkeit ist grundsätzlich dann möglich, wenn der Abstand zweier Schwingungskondensatoren so gewählt wird, daß das Kathodenstrahlelektron zum Durchlaufen dieses Abstandes ein ganzes Vielfaches einer Viertelschwingungsdauer braucht; am genauesten wird aber die Messung, wenn man als Meßzeit eine halbe, bzw. eine ganze Schwingungsdauer wählt und vor dem zweiten Kondensator mit einer engen Spaltblende gerade den Teil des pendelnden Bündels ausblendet, der vom ersten Kondensator überhaupt nicht abgelenkt wurde. Ist dann nämlich die Flugzeit der Teilchen etwas verschieden von der halben Schwingungsdauer, z. B. etwas kleiner, so wird der kurze Kathodenstrahlstoß, der den zweiten Kondensator passiert, abgelenkt, also in der nebenstehenden Fig. 3 z. B. nach oben, da im Kondensator noch nicht das elektrische Feld 0, sondern das in der Figur angedeutete herrscht. Der nächste Kathodenstrahlstoß passiert die Blende nach Verlauf einer halben Schwingungsdauer; er muß beim Passieren des zweiten Kondensators nach unten abgelenkt werden, da ja die Phase der Schwingung um 180° fortgeschritten, das elektrische Feld des Kondensators also gerade umgekehrt worden ist. Man erhält also auf dem Leuchtschirm, da die Blende spaltförmig — parallel

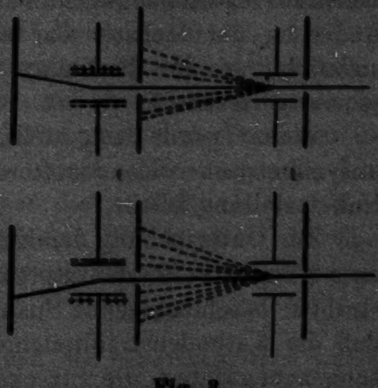


Fig. 3.

zu den Kondensatorplatten — ist, zwei getrennte scharfe Linien. Ist die Flugzeit der Elektronen genau gleich einer halben Schwingungsdauer, dann fallen die beiden Linien exakt zusammen. Die Einstellschärfe dieser Nullmethode ist ziemlich groß, so daß man die Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen auf wenige Promille genau bestimmen kann. (Zu dieser Bestimmung ist dabei nur die Messung von zwei Längen nötig, nämlich 1. die Messung des Abstandes der Mitten der beiden gleichen Kondensatoren, und 2. die Messung der Wellenlänge des Senders.)

Mit derselben Genauigkeit kann man umgekehrt mit Hilfe von homogenen Kathodenstrahlen die elektrischen Schwingungen selbst analysieren. In Hinsicht auf die Messungen an Röntgenstrahlen war zunächst die Frage zu beantworten: wie ändert sich die Phase, wenn an einem Kondensator die Zuleitungen vertauscht werden? Mit Hilfe der eben beschriebenen Nullmethode wurde festgestellt, daß die Nulleinstellung nach dem Vertauschen der Zuleitungen zwar nicht exakt dieselbe blieb, sondern sich um einen kleinen Betrag änderte. Diese Änderung ist offenbar auf die mit der Vertauschung der Drähte verbundene Änderung der Kapazität und Selbstinduktion eines Teiles des Schwingungskreises zurückzuführen. Die entsprechende Änderung der Meßzeit war aber kleiner als 1 Proz. und lag außerdem in der Richtung, daß sie die zu messende Zeit scheinbar verkürzte.

Weiter wurde festgestellt, daß auch die Verwendung eines unsymmetrischen Kondensators praktisch ohne Einfluß auf die Nulleinstellung blieb.

Zur Untersuchung der Kurvenform der Schwingung wurden zwei gekreuzte Kondensatoren verwendet. Die die Kathodenstrahlen beschleunigende Spannung wurde dann so einreguliert, daß die Kathodenstrahlteilchen gerade während einer Viertelschwingungsdauer die Strecke zwischen den beiden Kondensatoren passierten. Als Meßstrahl wurde dabei ein durch eine enge Lochblende begrenztes Strahlenbündel benutzt, das sich auf dem Leuchtschirm — wenn die Schwingung nicht erregt war, als kreisrunder Fleck von etwa 1 mm Durchmesser abbildete. Wurde die Schwingung erregt, so erschien eine Ellipse, bzw. bei einer bestimmten Dimensionierung der

Kondensatoren ein Kreis. Auch bei stärkster Erregung — der Kreis hatte dabei einen Durchmesser von etwa $4^1/_2$ cm — war keine Abweichung von der geometrischen Regelmäßigkeit der Leuchtfiguren zu erkennen: die Schwingung war demnach eine rein sinusförmige.1)

Zur Erzeugung der Röntgenstrahlen wurden die Kathodenstrahlen mit Gleichspannungen zwischen 5000 und 7700 Volt beschleunigt. Die Spannung wurde mit einem statischen Voltmeter (Hartmann u. Braun) gemessen. In dem verwendeten Spannungsbereich erhält man mit einer Kupferantikathode praktisch reine „Bremsstrahlung", da die Anregungsspannung der *K*-Serie des Kupfers wesentlich höher (etwa bei 8900 Volt!) liegt. Bei Eisen dagegen erhält man oberhalb 7100 Volt außer der Bremsstrahlung auch die *K*-Strahlung. Die Elektronenstromstärke wurde durch intensive Heizung des kurzen Glühfadens auf 2—10 Milliampère gebracht. Die Kathodenstrahlen liefen nach dem Passieren des ersten Ablenkungskondensators durch ein etwa 60 bzw. 30 cm langes geerdetes Rohr auf die Antikathode zu. Kurz vor der Antikathode befand sich eine Blende (*B* in der oben stehenden Fig. 4), die mit fluoreszierendem Zinksulfid versehen war.

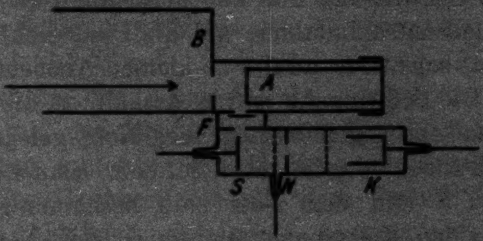


Fig. 4.

---

1) Die Prüfungen der Phase und der Schwingungsform wurden später an dem zu den eigentlichen Messungen benutzten Apparat wiederholt, und zwar derart, daß der untere Teil des Apparats in Fig. 4 bei *F* abgenommen und um 90° gedreht, statt der Antikathode als Verlängerung des Kathodenstrahlrohres angesetzt wurde. Die Kathodenstrahlen passierten so als zweiten Kondensator den Raum zwischen der Sekundärelektrode *S* und dem Netz und liefen dann durch ein weiteres Ansatzrohr auf einen Leuchtschirm. Das Ergebnis war das gleiche wie bei den oben beschriebenen Versuchen.

Die Kathodenstrahlen, die die Blende passieren konnten, fielen auf die Antikathode A. Die hier entstehenden Röntgenstrahlen konnten durch zwei Spalte (bei F) hindurch die Sekundärelektrode S erreichen. Der eine der beiden Spalte war mit Aluminiumfolie (0,02 mm dick) luftdicht verschlossen. (Der *luftdichte* Abschluß erwies sich als notwendig, da sonst diffundierte und sekundäre Elektronen aus dem Entladungsraum sich bei den Messungen störend bemerkbar machten.) An der Elektrode S wurden Photoelektronen ausgelöst. Der Versuch, die Photoelektronen mit Geschwindigkeiten vergleichbar der Primärgeschwindigkeit in einem abgeblendeten Bündel mit Hilfe der Schwingung hin- und herpendeln zu lassen, d. h. also die Kathodenstrahlmethode auf die Photoelektronen direkt zu übertragen, scheiterte an der zu kleinen Ausbeute an Photoelektronen. Die Schwingung wurde deshalb an die Elektrode S selbst und an ein gegenüberliegendes Netz gelegt. Die ausgelösten Elektronen wurden also in dem schnellen Wechselfeld zwischen S und dem Netz bald beschleunigt, bald verzögert; diejenigen Elektronen, die durch das Netz hindurchtreten konnten, passierten eine geerdete Blende und liefen dann im kräftefreien Raum auf den durch ein engmaschiges Drahtnetz geschützten Auffänger (K) zu, der mit dem Elektrometer in Verbindung stand. Als Elektrometer diente ein Wulfsches Einfadenelektrometer, das samt Zuleitung metallisch eingebaut war, um elektrostatische Störungen fernzuhalten. Die Zuleitung war kurz, um die Kapazität des Systems möglichst klein zu halten. Das Elektrometer konnte leicht auf eine Spannungsempfindlichkeit von 0,01 bis nahezu 0,001 Volt pro Skalenteil gebracht werden. Die Messung der Elektrometeraufladung geschah in der Weise, daß mit der Stoppuhr Aufladungs*zeiten* bestimmt wurden. Zwischen den Messungen mußte die Empfindlichkeit des Elektrometers öfters nachgeprüft werden.

Entladungsraum und Beobachtungsraum wurden teils mit je einer Glasdiffusionspumpe, teils mit einer Stahldiffusionspumpe nach Gaede evakuiert; Quecksilberdämpfe wurden durch flüssige Luft oder ein Gemisch aus Aceton und fester Kohlensäure ferngehalten. Der mit dem Mc Leodmanometer gemessene Druck im Beobachtungsraum war kleiner als 0,0001 mm Hg.

Wenn die Schwingung nicht erregt war, wurde das primäre Kathodenstrahlbündel auf der Blende *B* als hell leuchtender, rechteckiger Fluoreszenzfleck sichtbar, dessen Rand von dem dazu parallelen Rand der quadratischen Blende in *B* etwa $^1/_2$—1 cm entfernt lag (*F* in der nebenstehenden Fig. 5). Wenn der Fleck nicht schon infolge der geometrischen Verhältnisse der Entladungsröhre an der richtigen Stelle lag, wurde er mit einem Hufeisenmagneten dorthin dirigiert; da dabei nur kleine Korrektionen nötig waren, ließ sich die entstehende geringe Veränderung der Strahllänge vernachlässigen. Bei nicht erregter Schwingung traten also überhaupt keine Kathodenstrahlen durch die Blende hindurch. Wurde die Schwingung erregt, so wurde der Fleck in ein leuchtendes Band auseinandergezogen, das die quadratische Blende zum Teil überdeckte. Durch Änderung der Heizung des Senders und der Koppelung des Drahtsystems mit dem Sender ließ sich die Breite der Ablenkung auf einen bestimmten Betrag einregulieren.

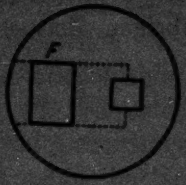


Fig. 5.

Um nun Aufschluß über die Stärke des auf die Antikathode fließenden Stromes als Funktion der Zeit während einer Schwingung zu erhalten, mußte die Verteilung der Stromdichte im ruhenden Fleck ermittelt werden. Zu diesem Zweck wurde an die Stelle der Blende *B* eine Blende mit kleinem Loch gebracht und der Fluoreszenzfleck mit Hilfe des Hufeisenmagneten langsam in allen Richtungen darüber hinweggeschoben, während mit einem Zeigergalvanometer, das zwischen Antikathode und Erde lag, der durch das Loch tretende Strom gemessen wurde. Es ergab sich, daß die Stromdichte im ganzen Fleck auf wenige Prozent konstant war. Der bei erregter Schwingung in jedem Zeitelement durch die quadratische Blende hindurchtretende Elektronenstrom ist also proportional dem vom Fleck zu dieser Zeit bedeckten Flächenteil der Blende. Dieser Flächenteil ist aber, da wir eine reine Sinusschwingung vor uns haben, eine Sinusfunktion der Zeit. Der während einer Schwingung auf die Antikathode fallende Elektronenstrom ist also darzustellen durch:

$$i = c\,(a \cdot \sin \omega t - b),$$

wobei ω die Frequenz, a die Amplitude der Schwingung und b den Abstand des Randes des Fluoreszenzflecks vom Rande der Blende bedeuten. (Die Gleichung gilt natürlich nur für $a \cdot \sin \omega t \geqq b$, d. h. nur während der Zeit, während der überhaupt Elektronen auf die Antikathode fallen; während der übrigen Zeit ist $i = 0$.) In der nachfolgenden Fig. 6 sind demnach die schraffierten Flächenteile den Elektrizitätsmengen proportional, die während jeder Phase auf die Antikathode fließen. Diesen Elektrizitätsmengen ist die Röntgenstrahlintensität proportional, und der Röntgenstrahlintensität ist wieder die an der Sekundärelektrode ausgelöste Photoelektronenmenge proportional, die mit dem Elektrometer gemessen wurde.

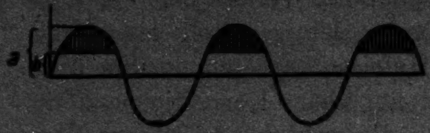


Fig. 6.

Zunächst war zu prüfen, ob die Ausbeute an Photoelektronen von der Bestrahlungsdauer abhängig sei. Dazu wurde, während an der Sekundärelektrode ein konstantes Feld lag, aus dem primären pendelnden Bündel ein schmaler Streifen herausgenommen, derart, daß jede Einzelbestrahlung der Sekundärelektrode S etwas weniger als 10^{-9} Sek. dauerte. Der dann erhaltene Elektrometerausschlag war exakt proportional dem auf die Antikathode fließenden Gesamtstrom (galvanometrisch gemessen), und im besonderen genau gleich dem Ausschlag bei ununterbrochenem Primärstrom derselben Stärke. Die photoelektrische Wirkung der Röntgenstrahlen ist demnach bei Unterteilung der Belichtungszeit unabhängig von der Dauer einer Teilbelichtung bis zu 10^{-9} Sek. herab. (Dies entspricht dem von E. Marx und K. Lichtenecker erhaltenen Resultat bei mechanischer Unterteilung von sichtbarem Licht auf etwa 10^{-7} Sek. Schätzt man bei räumlich und zeitlich gleichmäßiger Verteilung der Röntgenstrahlenintensität den während einer Teilbelichtung auf ein Atom der Oberfläche von S fallenden Energiebetrag, so erhält man etwa den 10^{12}ten Teil der Energie eines ausgelösten Photoelektrons.)

Wesentlich abhängig ist aber die zur Messung gelangende Elektronenmenge von dem zwischen der Elektrode *S* und dem Netz liegenden elektrischen Feld. Die Geschwindigkeitsverteilung der von weichen Röntgenstrahlen ausgelösten Elektronen ist von W. Seitz[1]) zuerst gemessen worden: es ergab sich, daß neben den Elektronen mit Geschwindigkeiten vergleichbar der Geschwindigkeit der primären Kathodenstrahlen eine große Anzahl von langsamen Elektronen mit Energien von wenigen Volt ausgelöst wird. Simons[2]) fand neuerdings bei der Bestrahlung eines dünnen Goldfilms mit mäßig harten Röntgenstrahlen, daß die Normalkomponente der Geschwindigkeit von über 85 Proz. der emittierten Elektronen kleiner als 2 Volt ist. Die Geschwindigkeitsverteilung der Sekundärelektronen bei unserer Anordnung ließ sich leicht messen; es war nur nötig, den Elektrometerausschlag als Funktion des an der Sekundärelektrode liegenden Potentials zu bestimmen. Eine der so erhaltenen Kurven ist in der Fig. 7 dargestellt.

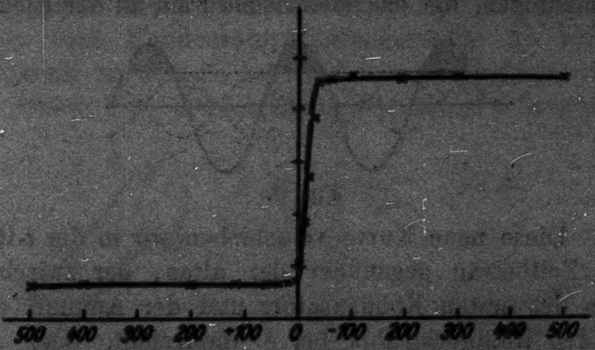


Fig. 7.

Das für uns Wesentliche, das die Kurve zeigt, ist, daß die Zahl der Elektronen von einem verzögernden Feld von 400 Volt bis fast zu 0 herab praktisch völlig konstant bleibt, und daß die schnellen Elektronen etwa $^1/_7$ der gesamten, bei beschleunigenden Feldern erhaltenen Elektronenmenge ausmachen. (Dieser Bruchteil wurde während der eigentlichen Messungen ständig kontrolliert.) Der langsame Anstieg der

---

[1]) W. Seitz, Phys. Ztschr. 11. S. 705. 1910.

[2]) L. Simons, Phil. Mag. 46. S. 473. 1923.

Kurve bei beschleunigenden Potentialen ist nach W. Seitz auf die abschirmende Wirkung des Netzes für kleine Geschwindigkeiten zurückzuführen. Da aber bei schnellen Schwingungen ein Elektron, das bei kleinem Beschleunigungsfeld ausgelöst wird, noch bevor es das Netz erreicht, durch das inzwischen angewachsene Feld der Schwingung stärker beschleunigt wird, wird der Anstieg der Kurve steiler. Wir nehmen deshalb zur Vereinfachung der Rechnung an, daß die Kurve beim Potential 0 senkrecht ansteigt, d. h. daß während der ganzen Dauer einer Beschleunigungsphase die Ausbeute an Photoelektronen proportional dem (maximalen) Endwert der Ordinate ist. Auf Grund dieser Vereinfachung werden die berechneten Elektrometerausschläge gegenüber den beobachteten etwas zu klein ausfallen in dem Falle, wenn während des Anstiegs des Beschleunigungspotentials Elektronen ausgelöst werden.

Wir können also zu der Kathodenstromkurve noch eine Kurve hinzufügen, die das elektrische Feld an der Elektrode *S*

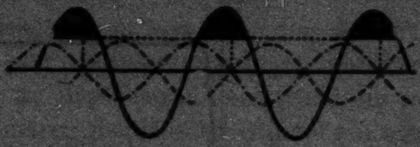


Fig. 8.

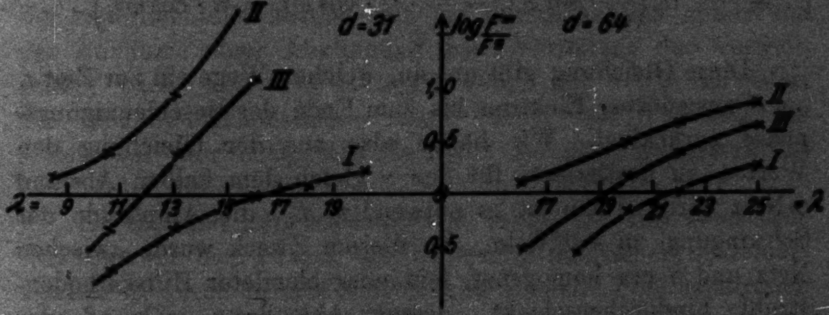
darstellt. Diese neue Kurve verschieben wir in der *t*-Richtung um den Zeitbetrag gegenüber der alten, der zwischen dem Passieren des ersten Kondensators und der Ankunft des entsprechenden Röntgenstrahls bei *S* verstreicht. Der Abstand der Mitte des ersten Kondensators von der Antikathode war 64 bzw. 31 cm; die die Kathodenstrahlen beschleunigende Spannung 7500 Volt. Der Abstand der Antikathode von *S* war 5 cm. Der fragliche Zeitbetrag ist also

$$\frac{64}{v}\left(\frac{31}{v}\right)+\frac{5}{c}=1{,}27\,(0{,}625)\cdot 10^{-8}\ \text{sec.}$$

Für eine beliebig herausgegriffene Wellenlänge ($\lambda = 20$ m) und die größere Meßstrecke ($d = 64$) ist das Ergebnis in der obenstehenden Fig. 8 dargestellt; in der positiven y-Richtung sind positive Stromstärke (—) und beschleunigende Potentiale (–·–) aufgetragen.

Dann sind die senkrecht schraffierten Flächenteile, die mit dem positiven Bereich der Feldkurve gleichzeitig liegen, proportional der Röntgenstrahlintensität, die an der Elektrode *S* ankommt, während dort ein die Elektronen beschleunigendes Feld herrscht. Diese Flächenteile sollten also, wenn man von einer Abklingungs- oder Verweilzeit ganz absieht, den Elektrometerausschlägen proportional sein. (Dabei setzen wir voraus, daß der konstante Betrag an schnellen Photoelektronen, der durch die Schwingung praktisch gar nicht beeinflußt wird, vorher abgezogen worden ist.) In die Figur ist nun noch eine weitere Feldkurve eingezeichnet (——), die gegenüber der ersten um 180° phasenverschoben ist. Bei diesem Feldverlauf müssen sich Elektrometerausschläge ergeben, die den wagrecht schraffierten Flächenteilen proportional sind.

Experimentell wurde nun dieses Verhältnis der beiden Flächenteile für eine Reihe von Wellenlängen ermittelt; dazu war nur nötig, bei Konstanthaltung aller Versuchsbedingungen jedesmal zwei Elektrometerausschläge zu messen, und dazwischen zwei Kondensatorzuleitungsdrähte zu vertauschen. Das Ergebnis ist für die beiden Antikathodenabstände (64 bzw. 31) als Kurve I in die folgenden Fig. 8 und 9 eingetragen.



Figg. 9 u. 10.

Das berechnete Verhältnis der Flächenteile wird durch Kurve II dargestellt; dieser Kurve gegenüber ist die experimentelle Kurve beträchtlich nach längeren Wellen zu verschoben. Schlüsse aus dieser Verschiebung auf eine etwaige Verweilzeit wären aber verfrüht; es erweist sich nämlich als fehlerhaft, anzunehmen, daß während der ganzen Dauer des

Beschleunigungsfeldes — bis zum Herabsinken des Feldes auf 0 — die an S ausgelösten Elektronen auch wirklich durch das Netz hindurch zum Elektrometer befördert werden. Sie können nur dann das Netz überhaupt erreichen, wenn sie im Augenblick, wo das Feld durch 0 geht und seine Richtung umkehrt, bereits mindestens die Hälfte des Weges zum Netz zurückgelegt haben. Dieser Zeitpunkt läßt sich berechnen. Ist nämlich e/m die spezifische Ladung des Elektrons, E_0 die Feldstärke zwischen S und dem Netz, und ω die Frequenz, dann wird die Bewegungsgleichung des Elektrons im elektrischen Schwingungsfelde:

$$\ddot{x} = \frac{e}{m} \cdot E_0 \cdot \sin \omega t .$$

Daraus ergibt sich, wenn wir festsetzen, daß das Elektron zur Zeit t_1 an S ausgelöst werden soll, d. h. $\dot{x} = 0$ für $t = t_1$:

$$\dot{x} = - \frac{e}{m} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot E_0 (\cos \omega t - \cos \omega t_1)$$

$$x = \int_{t_1}^{T/2} \dot{x} \, d t = \left[- \frac{e}{m} E_0 \frac{1}{\omega^2} \cdot \sin \omega t + \frac{e}{m} \cdot \frac{1}{\omega} E_0 \cdot t \cos \omega t_1 \right]_{t = t_1}^{t = T/2}$$

$$= \frac{e}{m} \cdot E_0 \left(\frac{1}{\omega^2} \cdot \sin \omega t_1 - \frac{1}{\omega} \cdot t_1 \cdot \cos \omega t_1 + \pi \cdot \cos \omega t_1 \right) .$$

Diese Gleichung gibt uns an, welchen Wege ein zur Zeit t_1 an S ausgelöstes Elektron bis zum Ende der Beschleunigungsphase zurücklegt. Wir haben also aus der Gleichung den Wert t_1 zu bestimmen, für den x gleich dem halben Abstand S-Netz wird. Dazu ist es notwendig, E_0, die Amplitude der Schwingung, zu ermitteln. Zu diesem Zweck wurde zwischen Netz und S ein homogener, fein ausgeblendeter Hilfskathodenstrahl hindurchgeschickt, dessen Ablenkung während der Messungen auf einem Leuchtschirm festgestellt werden konnte. Der Vergleich mit der Ablenkung durch Gleichspannung lieferte dann sofort die gesuchte Scheitelspannung der Schwingung. Auf diese Weise wurden für die benutzten Wellenlängen die folgenden Werte für E_0 ermittelt:

$\lambda =$ 8,5	10,5	13	16—25 m	
$E_0 =$ 1,1	1,0	1,0	0,9	el. m. E. pro cm.

Daraus ließen sich mit Hilfe unserer Gleichung für z auf graphischem Wege die Werte für $\frac{360 \cdot t_1}{T}$ bestimmen:

$\lambda =$	8,5	10,5	13	16	20	22	25
$\frac{360 \cdot t_1}{T} =$	127°	132°	137°	143°	147°	150°	152°.

In Fig. 8 dürfen demnach die schraffierten Flächenteile im sinkenden Feldbereich nicht bis 180° reichen, sondern nur bis zu dem in der obigen Tabelle für $\lambda = 20$ enthaltenen Winkel 147°. Rechnet man auf dieser Grundlage die Flächenverhältnisse aus, so ergibt sich in Figg. 9 u. 10 die Kurve III.

Diese neuen Kurven liegen nun zwar der experimentellen Kurve I schon wesentlich näher; es bleibt aber immer noch eine deutliche Verschiebung der gemessenen Kurve nach längeren Wellen. Diese Verschiebung, die auf eine meßbare Verweilzeit bei der Anregung von Röntgenstrahlen hindeutet, wurde in einer sehr großen Zahl von Versuchen sowohl mit Kupfer-Antikathode (reine Bremsstrahlung) als auch mit Eisen-Antikathode (charakteristische Strahlung + Bremsstrahlung) immer wieder gefunden. Auch die Veränderung des Materials der Sekundärelektrode S (Blei, Kupfer, Eisen) hatte keinen wesentlichen Einfluß auf das Resultat. Die Rechnung zeigte, daß der experimentelle Befund sich gut darstellen ließ auf Grund der Annahme einer Abklingung (bzw. Verteilung der Verweilzeiten) nach einer e-Funktion, wobei der reziproke Wert der Abklingungskonstanten etwa gleich $2 \cdot 10^{-9}$ Sek. zu setzen war (der entsprechende Wert bei der Balmerserie ist etwa $2 \cdot 10^{-8}$.)

Es entstand nun zunächst die Frage, ob die gemessene Zeit etwa von dem Prozeß der Auslösung langsamer Sekundärelektronen durch primär freigemachte schnelle Photoelektronen beansprucht würde, da ja offenbar ein großer Teil der gemessenen langsamen Elektronen seinen Ursprung in diesem Prozeß haben muß. Zur experimentellen Untersuchung dieser Frage konnte dasselbe Meßverfahren angewendet werden; nur mußte für eine saubere Trennung zwischen primären und sekundären Elektronen gesorgt werden. Diese Trennung ist möglich auf Grund der Verschiedenheit der Geschwindigkeiten. Die Versuchsanordnung zeigt die folgende Fig. 11.

Die primären Kathodenstrahlen traten durch eine enge Blende *B* und trafen auf die Antikathode *A*. Die von der Oberfläche von *A* ausgehenden Sekundärkathodenstrahlen konnten durch das Netz *N* hindurch beschleunigt werden und liefen dann durch ein System von Kondensatoren und Blenden in den Auffänger *F* hinein. Daß auf diese Weise nur die langsamen Sekundärstrahlen zur Messung kamen, zeigt die folgende Kurve (Fig. 12).

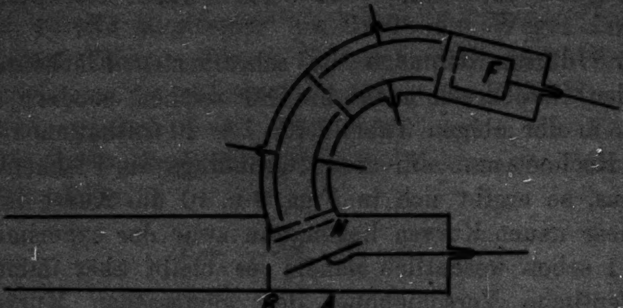


Fig. 11.

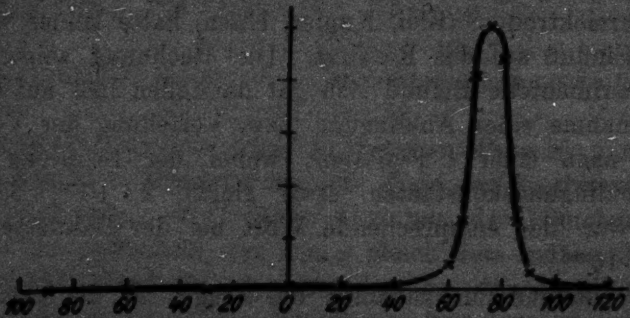


Fig. 12.

Die Kurve gibt die Abhängigkeit des Elektrometerausschlags von der zwischen *A* und *N* liegenden Potentialdifferenz in Volt; sie zeigt gleichzeitig, daß die Sekundärstrahlen im wesentlichen innerhalb eines kleinen Geschwindigkeitsbereichs von etwa 15 Volt liegen.

Das Ergebnis der Messungen mit Schwingungen war eine scheinbare Verzögerung von derselben Größenordnung wie bei den Versuchen mit Röntgenstrahlen. Nun ließ sich hier, wo genügend große Intensitäten zur Verfügen standen, das Ergebnis relativ leicht durch eine Änderung der Meßmethode kontrollieren. Statt die Sekundärelektronen abwechselnd zu beschleunigen und zu verzögern, kann man sie auch mit der Schwingung ablenken; dazu war nur notwendig, noch einen kleinen Kondensator in die Versuchsanordnung hineinzubauen, wie es in der folgenden Fig. 13 angedeutet ist.

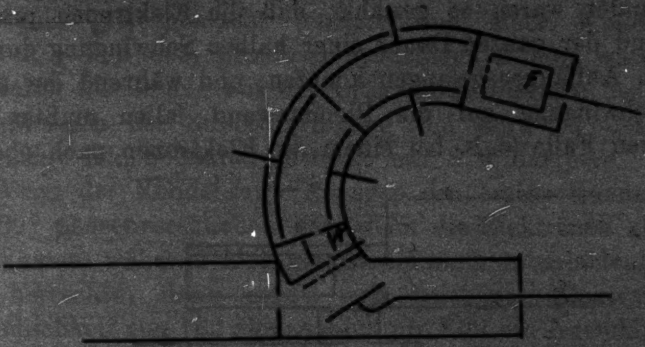


Fig. 18.

Zwischen *A* und *N* wurde ein konstantes, die Sekundärelektronen beschleunigendes Potential gelegt. Die Schwingung lag an dem kleinen Kondensator und beförderte die Elektronen, wenn sie in einem kontinuierlichen Strom die Blende passierten, abwechselnd durch die nächste Blende und damit durch alle übrigen in den Auffängen *F* hinein, oder seitwärts auf die Blendenwand, wodurch sie aus dem Strahlverlauf auschieden.

Mit dieser Anordnung verschwand nun die Verzögerung völlig; es ergab sich, daß $2 \cdot 10^{-8}$ Sek. nach der Ankunft der primären Kathodenstrahlen keine Spur von Sekundärelektronen mehr vorhanden war.

Daraufhin wurden die Versuche an Röntgenstrahlen wieder aufgenommen. Durch konstante Beschleunigung der durch Röntgenstrahlen ausgelösten langsamen Elektronen gelang es schließlich, auch hier mit der Ablenkungsmethode einwandfreie Ergebnisse zu erhalten.

Die Anordnung zur Messung der abgelenkten langsamen Sekundärelektronen ist in folgender Fig. 14 dargestellt.

Die pendelnden Kathodenstrahlen fielen wie früher au die Antikathode *A* (bei den jetzt zu beschreibenden Versuchen

Eisen). Die von den Röntgenstrahlen ausgelösten Elektronen wurden durch ein konstantes Potential von 500 Volt zwischen S und N beschleunigt und traten durch die Blenden B_1 in das pendelnde Feld des Ablenkungskondensators ein. Sobald das Schwingungsfeld die Elektronen in der Figur nach unten ablenkte, konnten sie durch die breite Blende B_2 in den Auffänger treten. Die Dimensionen der Blenden und ihre Lage zueinander waren so gewählt, daß die Elektronen praktisch während der ganzen Dauer einer halben Schwingung durch B_2 in den Auffänger gelangen konnten, und während der andern Halbschwingung auf die Blendenwand fallen mußten. Im letzteren Falle (d. h. bei einem die Elektronen nach oben ablenkenden Feld oder beim Feld 0) blieb freilich stets noch ein restlicher Elektrometerausschlag, der von diffundierten Elektronen herrührte und nicht ganz unterdrückt werden konnte; dagegen war eine Störung durch schnelle Photoelektronen nicht zu befürchten, da die schnellen Photoelektronen im Felde der Schwingung nicht so weit abgelenkt wurden, daß sie durch die Blende B in den Auffänger hätten gelangen können.

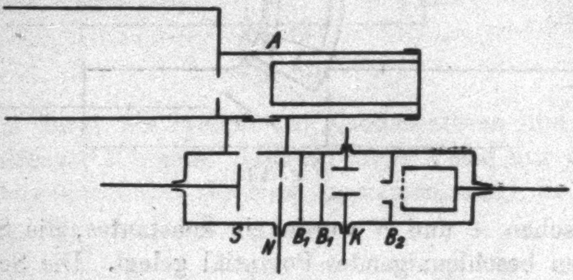


Fig. 14.

An die Entladungsröhre wurde eine Spannung von 7750 Volt gelegt; dieser Spannung entspricht eine Elektronengeschwindigkeit von $v = 5{,}237 \cdot 10^{-9}$ cm/sec. Der Abstand des die primären Kathodenstrahlen ablenkenden Kondensators von der Antikathode war 42 cm; um diesen Weg zu durchlaufen, brauchten die primären Kathodenstrahlen eine Zeit

$$t_1 = \frac{42}{v_1} = 0{,}802 \cdot 10^{-8} \text{ sec.}$$

Der Abstand S bis zur Mitte von K war 2,7 cm; die Länge der Kondensatorplatten war 0,6 cm, ihr Abstand 0,5 cm. Um bis *K* zu gelangen, brauchten die von *S* ausgehenden 500 Voltelektronen eine Zeit $t_2 = \frac{2,7}{v_2} = 0,202 \cdot 10^{-8}$ sec. Die Gesamtzeit der Elektronenbewegung war demnach

$$t_1 + t_2 = 1,01 \sim 1 \cdot 10^{-8} \text{ sec.}$$

Dem doppelten Betrag dieser Gesamtzeit wurde die Schwingungsdauer gleichgemacht (entsprechend einer Wellenlänge von 6 m). Von dem primären pendelnden Bündel wurde der Teil durch die Blende auf die Antikathode dirigiert, der einem Winkelbereich der Sinusschwingung von etwa 20° bis 160° entsprach. Die Primärstromstärke war 8 Milliampère.

Wenn der Kondensator *K* gegen den ersten Kondensator um 180° phasenverschoben war, wenn die Elektronen also bei *K* anlangten, während hier gerade ein nach unten ablenkendes Feld herrschte, dann ergab sich bei einer Elektrometerempfindlichkeit von 160 Skalenteilen pro Volt ein Ausschlag von 10 Skalenteilen in 8,5 Sek. Wurde das Feld im Kondensator *K* umgedreht, so daß also jetzt die passierenden Elektronen gerade nach oben — von der Blende *B* weg — abgelenkt wurden, so ergab sich bei einer Elektrometerempfindlichkeit von 800 Skalenteilen pro Volt ein Ausschlag von 10 Skalenteilen in 132 ± 8 Sek. (d. h. $^1/_{78}$ des ersten Ausschlags!); das war aber auf etwa 6 Proz. genau der Ausschlag, der erhalten wurde, wenn nur die diffundierten Elektronen in den Auffänger gelangen konnten. Eine Vergrößerung des Ausschlags um 6 Proz. hätte sich sicher bemerkbar gemacht; wir können also schließen, daß die Röntgenstrahlintensität von der ersten zur zweiten Meßperiode auf weniger als den $\frac{78 \cdot 100}{6} = 1300$. Teil ihres ursprünglichen Betrages abgeklungen sein muß. Daraus läßt sich eine obere Grenze für die Abklingungszeit der Röntgenstrahlen berechnen.

Der auf die Antikathode fallende Elektronenstrom ist nach S. 287: $i = c'(\sin \omega t - \sin \omega \tau)$, wobei $\sin \omega \tau = b/a$ und $c' = c \cdot a$ gesetzt ist. Diesem Strom ist die Röntgenstrahlintensität proportional; die ausgelöste Elektronenmenge und damit der Elektrometerausschlag muß demnach proportional dem Integral dieser Intensität über die erste Meßperiode sein. (Die Vergrößerung des Wertes des Integrals durch Abklingungswirkung läßt sich berechnen; sie erweist sich aber als so klein, daß sie für die weitere Rechnung ohne Bedeutung ist.) Wir haben also:

$$\int_{t=\tau}^{t=\frac{\pi}{\omega}-\tau} i\,dt = c'\left\{\frac{2}{\omega}\cdot\cos\omega\tau - \left(\frac{\pi}{\omega} - 2\tau\right)\cdot\sin\omega\tau\right\}\,.$$

Diesem Ausdruck ist also der Elektrometerausschlag proportional, wenn das elektrische Feld im zweiten Kondensator gegen dasjenige im ersten um 180° gedreht ist. Für den Fall, daß beide Kondensatoren in Phase schwingen, ist die Abklingungswirkung während der folgenden halben Schwingungsdauer zu berechnen.

Wir nehmen an, die Abklingung der Röntgenstrahlen erfolge wie die der Lichtstrahlen nach dem Gesetz

$$j = j_0 \cdot e^{-\alpha t},$$

wobei α die „Abklingungskonstante“ heißt. Nun war

$$j_0 = C\cdot(\sin\omega t - \sin\omega\tau);$$

wir erhalten also als Gesamtintensität am Anfang der zweiten halben Schwingungsdauer (der Proportionalitätsfaktor C ist im folgenden weggelassen, da er sich zum Schluß bei der Quotientenbildung heraushebt):

$$\left|\begin{aligned}
J_0 &= e^{-\alpha\tau}\cdot\int_{t=\tau}^{t=\frac{\pi}{\omega}-\tau}(\sin\omega t - \sin\omega\tau)\cdot e^{-\alpha\left(\frac{\pi}{\omega}-\tau-t\right)}\,dt = e^{-\alpha\frac{\pi}{\omega}}\\
&\cdot\left\{\frac{e^{\alpha\left(\frac{\pi}{\omega}-\tau\right)}\cdot\left(\sin(\pi-\omega\tau) - \frac{\omega}{\alpha}\cos(\pi-\omega\tau)\right) - e^{\alpha\tau}\cdot\left(\sin\omega\tau - \frac{\omega}{\alpha}\cdot\cos\omega\tau\right)}{\alpha+\frac{\omega^2}{\alpha}}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{\sin\omega\tau}{\alpha}\left(e^{\alpha\left(\frac{\pi}{\omega}\right)} - e^{\alpha\tau}\right)\right\}.
\end{aligned}\right.$$

Dieser Betrag klingt während der zweiten halben Schwingungsdauer ab; seine Gesamtwirkung ist also:

$$\left\{\begin{aligned}&\int\limits_{t=0}^{t=\frac{\pi}{\omega}} J_0 \cdot e^{-at}\alpha t = \frac{J_0}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha\cdot\frac{\pi}{\omega}}\right)\\ &= \frac{e^{-\alpha\cdot\frac{\pi}{\omega}} - e^{-\alpha\cdot\frac{2\pi}{\omega}}}{\alpha}\cdot\left\{e^{\alpha\left(\frac{\pi}{\omega}-\tau\right)}\cdot\left[\frac{\sin(\pi-\omega\tau)-\frac{\omega}{\alpha}\cdot\cos(\pi-\omega\tau)}{\alpha+\frac{\omega^2}{\omega}}-\frac{\sin\omega\tau}{\alpha}\right]\right.\\ &\qquad\left.- e^{\alpha\tau}\left[\frac{\sin\omega\tau-\frac{\omega}{\alpha}\cos\omega\tau}{\alpha+\frac{\omega^2}{\alpha}}-\frac{\sin\omega\tau}{\alpha}\right]\right\}.\end{aligned}\right.$$

Wie leicht einzusehen ist, muß dieser Ausdruck noch mit α^2 multipliziert werden, um mit dem für die erste halbe Schwingungsdauer erhaltenen Ausdruck verglichen werden zu können. Der Quotient der beiden Ausdrücke muß dann gleich dem Quotienten der erhaltenen Elektrometerausschläge sein.

Für unsere Versuchsbedingungen war $\omega = \pi \cdot 10^8$ und $\omega\tau = \pi/9$ zu setzen; daraus ergeben sich die folgenden Werte für den Quotienten der beiden Ausdrücke für einige Werte von α:

$\alpha \cdot 10^{-8}$ . . .	16	20	25	30
$J_{\mathrm{I}}/J_{\mathrm{II}}$	160	450	1200	3000

Die Messung hatte ergeben, daß $\frac{J_{\mathrm{I}}}{J_{\mathrm{II}}} > 1300$ ist. Das entspricht einem Wert von $\alpha = 25 \cdot 10^8$. Eine etwaige Abklingungszeit der benutzten Röntgenstrahlung, die aus Bremsstrahlung von einer ungefähren Wellenlänge von 2 Å.-E. und der Eigenstrahlung von Eisen bestand, muß also kleiner als $\frac{1}{\alpha} = 4 \cdot 10^{-10}$ Sek. sein. Macht man anderseits die Annahme, daß *nur* die charakteristische Strahlung, die schätzungsweise etwas weniger als 10 Proz. der Gesamtstrahlung ausmachen dürfte, eine Abklingung besitzt, die Bremsstrahlung dagegen nicht, so kommt man zu einem oberen Grenzwert der Abklingungszeit von $\frac{1}{\alpha} = 7 \cdot 10^{-10}$ (entsprechend einem Quotienten $\frac{J_{\mathrm{I}}}{J_{\mathrm{II}}} \sim 120$).

Es ist nun die Frage aufzuwerfen: wodurch ist die mit der ersten Methode gemessene Zeit vorgetäuscht worden, bzw. welcher Vorgang hat die gemessene Zeit von etwa $2 \cdot 10^{-9}$ Sek. für sich beansprucht?

Daß ein Einfluß von positiven Ionen der Gasreste bemerkbar sein könnte, dürfte bei dem gemessenen Druck ($< 10^{-4}$ mm Hg) deswegen ausgeschlossen sein, weil die mittlere freie Weglänge der Ionisierung bei diesem Druck nahezu 1000mal so groß ist als der in Frage kommende Elektrodenabstand.

Als Ursache auszuschließen ist ferner die vereinfachende Annahme, daß die Photoelektronenkurve (S. 289) bei der Abszisse 0 einen Sprung zeigt, statt des beobachteten Anstiegs. Die Wirkung dieser Vereinfachung liegt nämlich gerade in der entgegengesetzten Richtung: würde man den Anstieg berücksichtigen, dann würde der Abstand zwischen beobachteten und berechneten Kurvenpunkten noch etwas größer werden.

Weiterhin war zu untersuchen, ob eine Art von sukzessiver Sekundärstrahlungsbildung, ähnlich den Vorgängen bei der Glimmentladung im schnellen Wechselfeld¹), die gemessene Zeit vorgetäuscht haben könnte, und zwar in der folgenden Weise: Die vom verzögernden Feld nicht gebremsten schnellen Elektronen befreien an dem gegenüberliegenden Netz langsame Sekundärelektronen, die auf die Platte zueilen und nun dort neuerdings Elektronen auslösen. Diejenigen Sekundärelektronen, die erst ausgelöst werden (an der Platte S), wenn das Schwingungsfeld inzwischen seine Richtung umgekehrt hat, können dann von diesem umgekehrten Feld erfaßt und in den Auffänger hineinbefördert werden. Um den Einfluß dieses Vorgangs auf das Meßresultat quantitativ einigermaßen übersehen zu können, muß man zunächst die hier in Frage kommende Oberflächensekundärstrahlung annähernd ermitteln. Zu diesem Zwecke wurde bei 5000 bzw. 7500 Volt Beschleunigungsspannung mit der Anordnung in Fig. 11 der auf die Anode fließende Strom als Funktion des an dem gegenüberliegenden Netz herrschenden Potentials mit einem Galvanometer gemessen. Das Netz konnte nicht von primären Kathodenstrahlen getroffen werden, da ein wohldefiniertes, eng begrenztes Strahlenbündel durch die Blende auf die Anode fiel. Anderseits können wir auch die Ablenkung dieses primären Strahlenbündels im elektrischen Hilfsfeld zwischen Anode und Netz vernachlässigen, da sie klein bleibt

---

1) F. Kirchner, Ann. d. Phys. 77. S. 287. 1925.

gegenüber den Abmessungen der Anode. Liegt dann am Netz ein positives Potential, so wird der Strom zur Anode um den zum Netz und durch das Netz gehenden Sekundärstrahlungsbetrag vermindert. Ein negatives Potential verhindert, daß Sekundärstrahlung zum Netz gelangt; der gesamte Primärstrom kann dadurch gemessen werden, daß an die Anode selbst ein positives Potential von etwa 50 Volt gelegt wird (die kleine Geschwindigkeitsänderung, die die Primärkathodenstrahlen dadurch erleiden, kann unbedenklich in Kauf genommen werden). Das Ergebnis der Messungen zeigen die folgenden Kurven (Fig. 15); als Ordinate ist der mit dem Galvanometer gemessene Strom, als Abszisse das an dem Netz liegende Potential eingetragen.

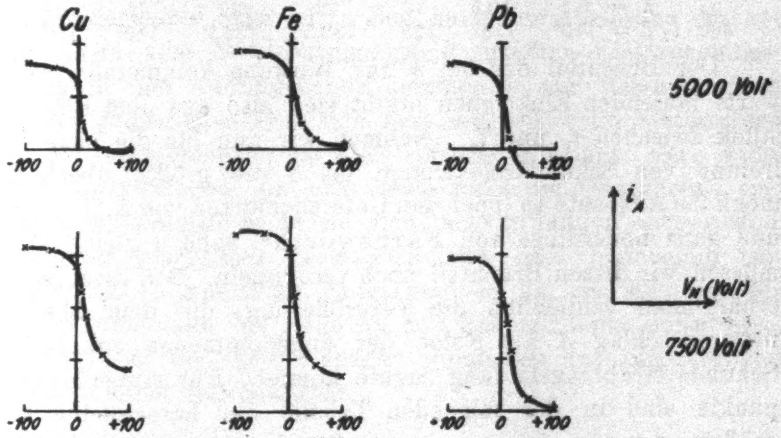


Fig. 15.

Das Verhältnis der zum Netz gelangenden Sekundärstrahlung zur Primärstrahlung ist nach den Kurven für 5000 Volt bei Eisen und Kupfer fast genau gleich 1, für Blei 1,2 und für 7500 Volt bei Eisen und Kupfer gleich 0,8 und für Blei 1,0.

Nun war der vom Draht bedeckte und damit auch sekundärstrahlende Teil des gesamten Netzquerschnitts gleich der Hälfte der Netzfläche; der vom Netz aufgefangene Teil der schnellen Photoelektronen ist also gleich dem hindurchgegangenen Betrag. Die aufgefangenen Photoelektronen lösen dann am Netz (wenn wir eine mittlere Ausbeute von 1,0 annehmen) ebenso viele langsame Elektronen aus, die nun im

Schwingungsfeld rückwärts beschleunigt werden. Ihre Zahl ist gleich $n \cdot A$, wenn A die Größe des wagrecht schraffierten Flächenstückes in Fig. 8 und n das Verhältnis der beiden Flächenstücke bedeutet. Welcher Bruchteil von diesen rückwärts beschleunigten Elektronen kommt nun erst bei S an, wenn inzwischen das elektrische Feld der Schwingung seine Richtung umgekehrt hat? Offenbar alle Elektronen, die bei N zwischen den beiden Zeitpunkten t_1 und t_2 ausgelöst werden; wobei t_1 den Wert haben muß, für den x in der Gleichung S. 292 gleich dem Abstand SN wird, und t_2 den (schon ermittelten) Wert, für den x gleich $SN/2$ wird. Für $x = SN$ ergeben sich für die einzelnen Wellenlängen die folgenden Werte:

$\lambda =$	8,5	10,5	13	16	20	22	25
$360 \cdot t/T =$	110°	118°	125°	132,5°	139,5°	142°	146°

Der Bruchteil der bei S zur Wirkung kommenden rückwärts laufenden Elektronen ergibt sich also aus dem Flächenstück zwischen t_1 und t_2. Nehmen wir nun für die neue Befreiung von Sekundärelektronen bei S die größte überhaupt mögliche Ausbeute an (nach den Untersuchungen von A. Gehrts[1]) und ganz neuerdings von Farnsworth[2]) nahezu gleich 2), so müssen wir diesen Bruchteil noch verdoppeln. Auf diese Weise erhält man schließlich die Vergrößerung, die dem Elektrometerausschlag A als Folge der angenommenen sukzessiven Sekundärstrahlungsbildung zugute kommt. Für einige Kurvenpunkte sind in der folgenden Tabelle die berechneten Vergrößerungen von A zusammengestellt; darunter stehen die Vergrößerungen, die notwendig wären, um die beiden fraglichen Kurvenpunkte in Figg. 9 und 10 zur Deckung zu bringen.

Fig. 9:	$\lambda =$ 13	16	10,5 m		Fig. 10:	$\lambda =$ 16	20	22 m
Ber.:	0,5	1,3	0,1 Å		Ber.:	0,06	0,12	0,18 Å
	6	17	2,5 Å			2	1,1	1,5 Å

Der Vergleich der beiden Zahlenreihen zeigt, daß die angenommene Sekundärstrahlungsbildung wohl einigen Einfluß auf das Meßresultat haben kann; dieser Einfluß ergibt aber im Durchschnitt nur 10 Proz. des Betrages, der zur Beseitigung der Diskrepanz zwischen Beobachtung und Rechnung nötig wäre.

---

1) A. Gehrts, Ann. d. Phys. **36**. S. 1003. 1911.

2) H. E. Farnsworth, Phys. Rev. **25**. S. 41. 1925.

Schließlich kann man noch an die Annahme denken, daß die gemessene Zeit gewissermaßen eine „Verweilzeit“ freier Elektronen an der Metalloberfläche bedeutet, und zwar in der folgenden Weise: Röntgenstrahlen treffen auf die Platte *S* und lösen hier Elektronen aus, während gerade ein verzögerndes Potential an *S* liegt. Unter dem Einfluß dieses verzögernden Potentials verschwinden die ausgelösten Elektronen wieder in der Platte; dieses Verschwinden in das Metall hinein geschieht aber nicht momentan, sondern mit einer gewissen mittleren „Verweilzeit“. Der Sinn dieser Verweilzeit wäre also nur der, daß ein kleiner Teil der Elektronen, die während eines verzögernden Feldes bei *S* ausgelöst werden, noch von einem Beschleunigungsfeld erfaßt werden kann, wenn dieses Beschleunigungsfeld sehr kurze Zeit nach der Auslösung erzeugt wird. Die vom Beschleunigungsfeld erfaßten Elektronen gelangen in den Auffänger und kommen so zur Messung. Daß bei der gemessenen Zeit sich kein nennenswerter Unterschied für die verschiedenen Metalle bemerkbar macht, wäre dabei nicht überraschend, da sich auch sonst die Oberflächen verschiedener Metalle, wenn sie nicht sehr gründlich entgast sind, gegenüber langsamen Elektronen fast ganz gleichartig verhalten. Eine gründliche Entgasung, zu der ein Erhitzen der Elektrodenmetalle bis nahe an den Schmelzpunkt nötig wäre, ist aber bei den beschriebenen Versuchen aus apparatuellen Gründen nicht durchführbar.

Zusammenfassung.

Die Wiechertsche Methode der direkten Messung der Kathodenstrahlgeschwindigkeit wird zu einem exakten Meßverfahren entwickelt.

Mit dieser Methode wird gezeigt, daß die Abklingungszeit von Röntgenstrahlung im Wellenlängengebiet von etwa 2 Å.-E., die die *K*-Strahlung von Eisen enthielt, zusammen mit der etwa zur Auslösung eines Photoelektrons erforderlichen Zeit kleiner als $\frac{1}{\alpha} = 4 \cdot 10^{-10}$ Sek. sein muß. (Wenn man annimmt, daß von der Gesamtstrahlung der Eisenantikathode bei 7750 Volt nahezu 10 Proz. auf die *K*-Strahlung des Eisens kommt, und daß für die Bremsstrahlung $\frac{1}{\alpha} = 0$ ist, dann ergibt sich für die K-Strahlung $\frac{1}{\alpha} < 7 \cdot 10^{-10}$ Sek.)

Für die Zeitdauer der Auslösung von Sekundärelektronen durch primäre Kathodenstrahlen ergibt sich eine obere Grenze von derselben Größenordnung, die beide durch die Grenzen der Meßgenauigkeit bedingt sind.

Die Ausbeute an Photoelektronen ist bei Röntgenstrahlen unabhängig von der Unterteilung der Belichtungszeit bis auf eine Belichtungsdauer von $1 \cdot 10^{-9}$ Sek.

An einer Metalloberfläche ausgelöste Photoelektronen scheinen unter dem Einfluß eines rücktreibenden elektrischen Feldes nicht momentan wieder im Metall zu verschwinden, sondern nach einer Art Verweilzeit von der Größenordnung 10^{-9} Sek.

Hrn. Geheimrat W. **Wien** sage ich herzlichen Dank für die Anregung zu dieser Arbeit und für sein dauerndes förderndes Interesse.

Für die Durchführung der Untersuchung wurden verschiedene Meßinstrumente und eine Stahldiffusionspumpe verwendet, die uns vom Kaiser-Wilhelm-Institut für Physik überlassen wurden, ferner kleine, hintereinander geschaltete Hochspannungsmaschinen mit Schnellaufmotoren, die von der **Helmholtz**-Gesellschaft beschafft wurden, wofür den beiden Instituten auch an dieser Stelle der beste Dank ausgesprochen wird.

München, Phys. Inst. d. Univ., Oktober 1925.

(Eingegangen am 8. Oktober 1925.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Alle Abbildungen in natürlicher Größe.

Fig. 2.

Fig. 3.

Durchgang durch Al.

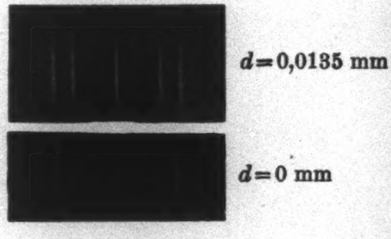

$d = 0{,}0135$ mm
$d = 0$ mm

Fig. 4.

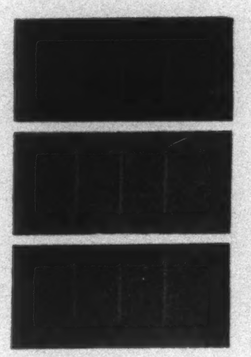
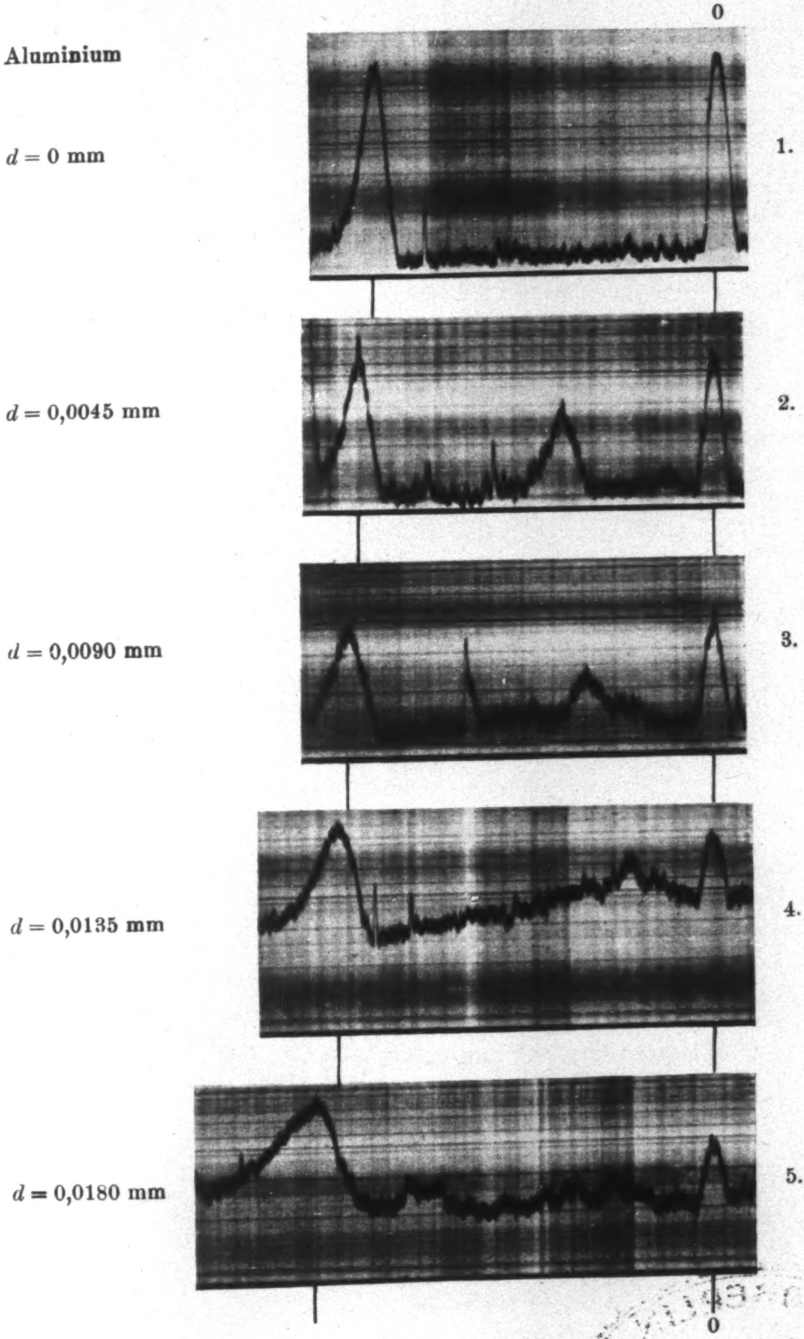


Fig. 5.

A. Becker.

OBERLIN
COLLEGE
LIBRARY


0
Aluminium
$d = 0$ mm
1.
$d = 0{,}0045$ mm
2.
$d = 0{,}0090$ mm
3.
$d = 0{,}0135$ mm
4.
$d = 0{,}0180$ mm
5.
0

A. Becker.

Inhalt

Seite

1. **Max Trautz** und **Walter Weizel**. Bestimmung der inneren Reibung des Schwefeldioxyds und seiner Gemische mit Wasserstoff 305
2. **G. J. Elias, Balth. van der Pol jr.** und **B. D. H. Tellegen**. Das elektrostatische Feld einer Triode 370
3. **G. Hagen**. Versuche über den Comptoneffekt. (Hierzu Taf. IV.) 407
4. **F. Kirchner**. Bemerkung zur vorstehenden Arbeit des Hrn. G. Hagen 421
5. **Werner Braunbek**. Bemerkung zur Arbeit des Hrn. Joh. **Dejmek**: „Wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungen zur Verzögerungszeit bei Funkenentladungen 423

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: München, Kolberger Straße 16.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft können die Annalen zu einem Vorzugspreis beziehen.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

1925. № 20.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 78.

1. *Bestimmung der inneren Reibung des Schwefeldioxyds und seiner Gemische mit Wasserstoff;*

von Max Trautz und Walter Weizel.

Inhaltsverzeichnis. Einleitung. — § 1. Strömungsvorgänge in kapillaren Röhren. — § 2. Versuchsanordnungen zur Ausführung der Transpiration. — § 3. Berechnung der Messungen. — § 4. Beschreibung der Apparate. — § 5. Vorbereitungen des Apparats zu den Versuchen. — § 6. Vorversuche. — § 7. Fehlermöglichkeiten und an den Messungen anzubringende Korrektionen. — § 8. Ausführung der Versuche. Tabellen. — § 9. Kritik und Zusammenfassung der Versuche. — § 10. Ergebnisse Anlagen. Kurven. Zeichnungen. Literaturangaben.

Einleitung.

Die innere Reibung der Gase ist schon häufig der Gegenstand von Untersuchungen gewesen. Die Reibungskoeffizienten der Gase verdienen, abgesehen von ihrer Wichtigkeit für Messungen anderer Größen (elektrisches Elementarquantum) Interesse wegen ihrer Bedeutung für die kinetische Gastheorie. Während sich die tatsächlich beobachtete Abhängigkeit des Drucks und Volumens hinreichend verdünnter und erhitzter Gase von der Temperatur (Gay-Lussac Mariottesches Gesetz) aus den einfachsten Annahmen über die Form und den Bewegungszustand der Moleküle ergibt, führen die gleichen Annahmen zu einer Gesetzmäßigkeit für den *Temperaturkoeffizienten der inneren Reibung*, die von der Erfahrung nicht bestätigt wird. Diese von Maxwell aufgestellte Formel wurde durch andere, teils rein empirische Formeln, teils solche, die aus komplizierteren Molekularvorstellungen hergeleitet waren, ersetzt. Während also aus den allereinfachsten Annahmen über Form und Bewegungszustand der Moleküle eine gute erste Näherung für die Zustandsgleichung abgeleitet werden kann, gelingt dies für die innere Reibung nicht mehr.

Die innere Reibung wird von den individuellen Eigenschaften der Gase viel mehr beeinflußt, als die in der Zustandsgleichung vorkommenden Größen, und deshalb darf man wohl von der inneren Reibung auch einen näheren Aufschluß über die Gasmolekeln erwarten.

Gerade das Hereinrechnen der individuellen Eigenschaften der Gasmolekeln aber verursacht der theoretischen Behandlung des Problems Schwierigkeiten; deshalb haben auch die Versuche, die Masse und den Durchmesser der Molekeln in Ansatz zu bringen, trotz einiger Erfolge immer etwas unbefriedigendes behalten. Daß die besonderen Vorgänge beim Stoß selbst ohne Einfluß auf die innere Reibung sein sollten, kann man sich nicht gut vorstellen, und daß diese bei komplizierter gebauten Molekeln andere sind als bei einem elastischen Kugelstoß, ist außer Zweifel. Die Berechnung als solcher dürfte eine unzulässige Vereinfachung sein, die zu unrichtigen Ansätzen für die Übertragung der Bewegungsgröße führt. Das Problem des Stoßvorgangs rührt an die Frage der Persistenz, das ist die Frage nach dem Anteil der Bewegungsgröße einer Molekel, der nach einem Stoß in ursprünglicher Richtung erhalten bleibt. Eine Erweiterung der Persistenzauffassung wäre von diesem Gesichtspunkt aus möglich. Eine gewisse Beziehung der inneren Reibung zum Mechanismus chemischer Gasreaktionen ist ebenfalls unverkennbar. Die Übertragung der Bewegungsgröße zwischen den Gasmolekeln stellt sich als eine ausgeartete Gasreaktion dar, und die Persistenz ist ein Ausbeuteverlust an ungeordneter Wärmebewegung. Dieser Zusammenhänge halber wurde hier das Gebiet der Gasreibung in Angriff genommen.

Da nächst der Dichte die kritischen Daten der Gase die am besten untersuchten individuellen Eigenschaften sind, haben wir nach einer Beziehung gesucht zwischen den Abweichungen von der Zustandsgleichung für ideale Gase und der inneren Reibung. (Ein Zusammenhang zwischen der Sutherlandschen Konstanten und der kritischen Temperatur wurde schon immer vermutet.) Aus diesem Grund schien das Schwefeldioxyd besonders zu Versuchen geeignet, da es schon bei Atmosphärendruck und bei Zimmertemperatur sehr starke Abweichungen vom idealen Zustand zeigt.

Ein besonderes Interesse gewinnen die Reibungskoeffizienten von Gasgemischen durch Versuche, aus physikalischen Eigenschaften homogener Systeme mehrerer Bestandteile Rückschlüsse auf deren chemischen Zustand zu ziehen.[1] Wenn man so weit nicht gehen will, wird man doch erwarten, daß Abweichungen vom Maxwellschen Verteilungsgesetz und Bildung von Molekelschwärmen ihren Ausdruck im Reibungsmolenbruchdiagramm finden werden. Das mehrfach beobachtete Auftreten eines Maximums im Molenbruchdiagramm der inneren Reibung ist daher sehr bemerkenswert.

Die Schwierigkeiten einer genauen Bestimmung der inneren Reibung der Gase sind erheblich, was schon aus der schlechten Übereinstimmung der von verschiedenen Forschern und nach verschiedenen Methoden gemessenen Werte hervorgeht.

Zu den Messungen ist fast stets eine der folgenden vier Methoden benutzt worden.

1. *Methode der schwingenden Flächen.* Ein Körper, dessen Oberfläche eine abgeschlossene analytische Fläche darstellt, wird an einem elastischen Faden in dem betreffenden Gas aufgehängt und in Schwingungen versetzt; aus seiner Dämpfung kann die innere Reibung des Gases berechnet werden. Der große Vorteil dieser Anordnung liegt darin, daß der ganze Versuch bei einem bestimmten und konstanten Druck vor sich geht. Nach dieser Methode ist auch die Druckunabhängigkeit der inneren Reibung geprüft worden. Ihre hauptsächlichsten Nachteile liegen in der Unmöglichkeit einer exakten mathematischen Erfassung der Strömungsvorgänge, wenn die Begrenzungsflächen der Schwingungskörper keine geschlossenen analytischen Flächen sind und in dem Eingehen eines Logarithmus in die Endformel, wodurch Ablesungsfehler der Amplituden gewaltig vergrößert werden.

2. *Methode der stationären Ablenkung.* Diese Methode ist gewissermaßen aus der ersten hervorgegangen (vgl. Arbeiten von Zemplén, Tomlinson, Gilchrist u. a.). Die Hauptschwierigkeit scheint in der genauen Zentrierung der benutzten Zylinder und Kugeln zu liegen. Die nach dieser Methode bestimmten Werte weichen unter sich und von anders gemessenen häufig ab (Landolt-Börnstein).

---

[1] F. Dolezalek, Zeitschr. f. phys. Chem. 65. S. 727. 1908.

3. *Methode der Fallgeschwindigkeit kleiner Körper.* Aus der Fallgeschwindigkeit eines Körpers nach unendlich langem Fall läßt sich bei Kenntnis seiner Oberfläche mit Hilfe einer Formel von Stokes der Reibungskoeffizient des umgebenden Mediums berechnen.

4. *Die Transpirationsmethode.* Die Durchströmung kapillarer Röhren ist die häufigste Art der Bestimmung der inneren Reibung und auch die vorliegenden Messungen sind auf diese Weise vorgenommen. Deshalb soll die Transpirationsmethode eingehender beleuchtet werden.

§ 1. Strömungsvorgänge in kapillaren Röhren.

Die Strömung eines Gases ist ein Problem der Mechanik deformierbarer Körper. Die Grundlage für alle Berechnungen auf diesem Gebiet sind die hydrodynamischen Grundgleichungen, die nur eine Anwendung der Newtonschen Gleichungen auf deformierbare Körper sind. Im vorliegenden Fall können wegen der geringen Dichte der Gase die Einflüsse äußerer Kräfte, hier der Schwere, vernachlässigt werden; bei genügend langdauernder Strömung ist diese auch stationär und wenn sie langsam genug ist, laminar, d. h. es treten keine Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zur Richtung der Strömung auf. Als Strömungsrichtung sei die X-Achse gewählt. Die Strömung finde in einem zylindrischen Rohr von beliebigem Querschnitt und unendlicher Länge statt. Die hydrodynamischen Gleichungen nehmen die Form an:

$$\sigma \cdot u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{u}{\sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

(σ = spez. Gewicht, u = Lineargeschwindigkeit).

Kann die kinetische Energie des Gasstroms gegen die Reibungsarbeit vernachlässigt werden, so reduziert sich die Gleichung auf:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right);$$

wie in Anlagen zu § 1 nachgewiesen wird, gilt eine der Poiseuilleschen ganz analoge Gleichung unter folgenden Voraussetzungen:

1. Unabhängigkeit des Reibungskoeffizienten vom Druck.
2. Die Dichte der Gase sei proportional dem Druck (Gasgesetz).

3. Zeitliche Veränderungen mögen so langsam vor sich gehen, daß der Strömungsvorgang für jedes Zeitelement als stationär angesehen werden darf.

4. Die kinetische Energie des Stromes ist zu vernachlässigen.

Für jedes Rohrelement gilt dann:

$$\frac{dV}{dt} = K \cdot \frac{\alpha^4}{\eta} \cdot \frac{dp}{dl} = \frac{\nu R T_0}{p} \quad (\nu = \text{Molgeschwindigkeit}).$$

Durch Trennung der Variabeln erhält man die Formel

$$\nu R T_0 \frac{1}{\varkappa} \int \frac{dl}{\alpha^4} = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{p^2 - p_0^2}{2} .$$

Wenn die Form des Querschnitts sich mit x ändert, so muß $1/\varkappa$ mit unter das Integral genommen werden. Die drosselnde Wirkung von Rohrverengungen ist dagegen schon in der Formel berücksichtigt.

Da $\int \frac{1}{\varkappa} \frac{dl}{\alpha^4}$ für das gleiche Rohr konstant ist, kann es durch $\frac{\pi}{8} \frac{L}{\varrho^4}$ ersetzt werden, wobei ϱ der Radius und L die Länge des idealen kreiszylindrischen Rohrs ist, das den gleichen Reibungswiderstand besitzt wie das Versuchsrohr.

Obwohl obige Formel entsprechend ihrer Ableitung nur für ein aus einem unendlich langen Rohr geschnittenes Stück gilt, ist sie auch auf Rohre endlicher Länge angewendet worden, wenn nur die Länge gegenüber dem Durchmesser sehr groß war. Wir werden in § 6 auf diesen Punkt nochmals eingehen.

§ 2. **Versuchsanordnungen zur Ausführung der Transspiration.**

Zur Ausführung der Durchströmungsversuche sind eine große Anzahl von Apparaten konstruiert worden, deren Haupttypen hier erwähnt werden sollen.

Den ersten Typ stellt der Apparat von Breitenbach[1]) dar. Mit einigen Abänderungen hat Schultze[2]) einen Apparat konstruiert, mit dem in den Jahren 1901—1916 in Halle eine Reihe von Arbeiten ausgeführt worden ist. Der Druck zu

---

1) Breitenbach, Diss. Erlangen 1898 und Wied. Ann. 67. S. 803 ff. 1898.

2) H. Schultze, Diss. Halle 1901 u. Ann. d. Phys. 5. S. 140ff. 1901.

beiden Seiten einer Glaskapillaren wird durch Handregulierung mit einer Quecksilberniveaubirne konstant gehalten, wobei die herrschenden Drucke an zwei Quecksilberwassermanometern verfolgt werden. Für die Berechnung der Versuche ist die Konstanz der Drucke ein Vorteil, und für Absolutmessungen ist sie fast unerläßliches Erfordernis. Dagegen scheint die Druckregulierung nicht nur umständlich zu sein, sondern es liegt nahe, in ihr Ursachen für die manchmal recht schlechte Übereinstimmung der gemessenen Werte untereinander zu sehen. Temperaturungleichheiten in den verwendeten hohen Quecksilbersäulen können leicht das Ergebnis um einige Promille fälschen. Die geringe Reproduzierbarkeit der Versuche mit dem Schultzeschen Apparat und die Beobachtung, daß die Versuche bei Verzicht auf die Konstanz der Drucke sehr gut wiederholbar waren, hat uns abgehalten diesen Apparattyp zu verwenden.

Rankine benutzt eine U-Röhre mit einem etwa 3 mm weiten und einem kapillaren Schenkel. In ersterem sinkt ein Quecksilbertropfen ab und drückt die unter ihm befindliche Gasmenge durch die Kapillare, nach deren Passieren sie entweder in die Atmosphäre austritt oder wieder in den weiten Schenkel über das Hg zurückgelangt. Wegen seiner Gestalt kann der Rankinesche Apparat leicht in verschiedene Temperaturbäder eingetaucht werden. Dem steht aber ein sehr gewichtiger Nachteil gegenüber. Die Versuchsdauer bei dem Apparat ist immer nur kurz (1—2 Minuten bei den Versuchen von Pedersen) und dementsprechend die Genauigkeit der Messungen gering. Mit dem Apparat haben gearbeitet Rankine (vgl. Abriß der Literatur), Pedersen[1]) nach ganz ähnlichem Prinzip; Philipps.[2])

Die hier vorliegenden Messungen sind mit einem Apparat ausgeführt, dessen Konstruktionsprinzip außerordentlich einfach ist. Auf Konstanz der Drucke wurde verzichtet, der Druck am Ende des Kapillarrohres wird durch Ausströmenlassen der Gase in die Atmosphäre konstant und gleich dem Barometerdruck. Zu Absolutmessungen ist die Anordnung wenig geeignet, für Relativmessungen aber wegen der Einfachheit der experimentellen Ausführung gut brauchbar.

---

[1]) Fr. M. Pedersen, Phys. Rev. **25**. S. 225. 1907.

[2]) P. Philipps, Pr. Roy. Soc. A. **87**. S. 48. 1912.

Drei Kugeln *A*, *B* und *C* sind in der in Fig. 1 dargestellten Weise verbunden. Das Versuchsgas wird in Kugel *C* gebracht und wird durch den Druck des in *A* und *B* stehenden Hg durch das Reibungsrohr *R* getrieben. Der Versuch beginnt, wenn das Quecksilber die Marke m_1, und endet, wenn es die Marke m_2 passiert. Nach diesem Prinzip konstruierte Apparate sind schon vielfach verwendet worden.

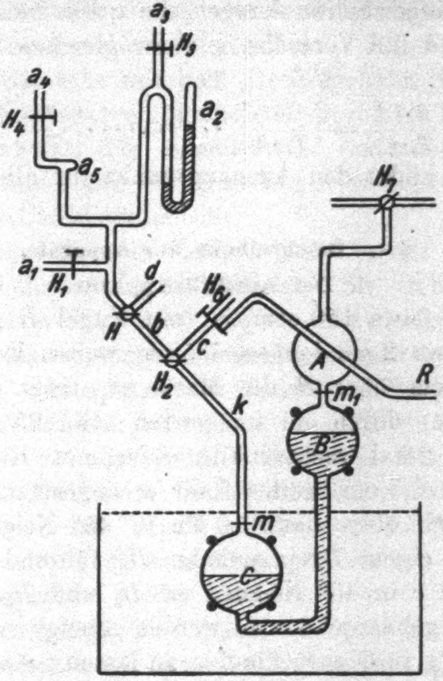


Fig. 1. Ausflußapparat.

§. 3. Berechnung der Messungen.

Die in § 1 entwickelte Formel ergibt durch Integration über die Zeit:

$$\int_{p_a}^{p_e} \frac{p\,d v}{p^2 - p_0^2} = \frac{\pi}{8}\,\frac{T}{T_0}\,\frac{\varrho^4 \cdot t}{\eta \cdot L}$$

(p = Druck im Ausflußapparat, p_0 = Barometerdruck, T = absolute Temperatur im Ausflußapparat, T_0 = Temperatur der

Kapillaren, p_a = Druck beim Passieren der Marke m_1, p_e = Druck beim Passieren der Marke m_2 (nicht Überdruck) t = Dauer des Versuches zwischen beiden Zeitpunkten.)

Das Integral links hat bei allen Versuchen den gleichen Wert (von geringen Schwankungen, die später behandelt werden, abgesehen) und für Versuche mit der gleichen Kapillaren gilt die Beziehung:

$$\left[\frac{T\cdot t}{T_0\cdot\eta}\right]_1 = \left[\frac{T\cdot t}{T_0\cdot\eta}\right]_2 \cdots\cdots\cdots\cdots \left[\frac{T\cdot t}{T_0\cdot\eta}\right]_n;$$

diese Formel bildet den Ausgangspunkt für alle weiteren Berechnungen.

§ 4. Beschreibung der Apparate.

I. Der Ausfluß-Apparat.

Kugel A (etwa 150 ccm) ist mit Kugel B (etwa 200 ccm) durch ein etwa 2 cm langes, 0,5 cm weites Rohr verbunden, das etwa 1 cm über B die Marke m_1 trägt. B ist mit C (etwa 250 ccm) durch ein im ganzen etwa 25 cm langes und 1 cm weites 2mal rechtwinklig gebogenes Rohr verbunden. An C ist ein 0,5 cm weites Rohr k angesetzt, zuerst 10 cm senkrecht nach oben, dann 10 cm in 45° Neigung gegen die Vertikale zu einem Dreiwegehahn H_2 führend. Von diesem führen b und c in 45° Neigung zu H_6 und H_8. k, b und c (letztere fast genau je 3 ccm) werden geneigt, um in die Höhe gestiegenes Hg in C zurücklaufen zu lassen. An H_1 sind Rohrstücke a mit verschiedenen Verzweigungen und d (Verbindung mit dem Gasometer, der die Versuchsgase enthält) angesetzt.

a gabelt sich in a_1, a_2, a_3, a_4 und a_5 mit entsprechenden Hähnen. a_1 führt zur Wasserstrahlpumpe, a_3 zu eine Gaede-Quecksilberluftpumpe, um den Apparat auf unter 1 mm zu Trocknungszwecken und zur Entfernung von Gasresten vorhergegangener Versuche zu evakuieren, a_2 ist ein abgekürztes Manometer. a_4 gestattet Luft als Vergleichsgas aus der Atmosphäre zu entnehmen.

Die Luft wird nacheinander durch ein Glaswollefilter, eine Waschflasche mit Schwefelsäure, ein zweites Glaswollefilter, ein Chlorkalziumrohr, ein Natronkalkrohr, ein zweites Chlorkalziumrohr (später ein System von Schwefelsäureröhren) und nochmals ein Glaswollefilter geleitet. H_5 und das Rohr a_5 diente bei Vorversuchen zum Einleiten der Versuchsgase und wurde später abgeschmolzen. Um wegen der mühevollen Herstellung der reinen Gase und der Gemische größere nutzlose Volumina zu vermeiden, wurde H_8 eingesetzt und zur Einführung der Gase benutzt.

Alle Rohrleitungen sind durch Glasfedern mit einigen Zentimetern Verschiebbarkeit gesichert. Kugel A ist durch ein federndes Glasrohr mit dem Dreiwegehahn H_7 verbunden, der A mit der Wasserstrahlpumpe oder durch ein Chlorkalzium-Natronkalkrohr mit der Atmosphäre verbindet. Zwischen Wasserstrahlpumpe und Apparat liegen eine Leerflasche und ein Natronkalk-Chlorkalziumrohr.

B und C sind an zwei Stativen auf vier mit Gummi überzogenen Schmiedeeisenringen befestigt. Sie stehen auf Korkscheibchen in einer Glaswanne, die von drei Korkscheibchen auf einem in die Mauer eingelassenen Steintisch getragen wird. Die Scheibchen sind schon sechs Monate vor Beginn der eigentlichen Versuche unterlegt worden, so daß ein weiteres Zusammendrücken unwahrscheinlich ist. Die Glaswanne dient als Thermostat. Durch drei Zuführungsröhren strömt ein kräftiger Wasserstrom aus der Wasserleitung durch etwa 20 in der Wanne verteilte enge Ausströmungsöffnungen ein und durch zwei große Saugheber wieder ab.

Der Wasserspiegel wird 5 mm über der Marke m_3 durch zwei Überlaufheber nach Anschütz konstant gehalten. Die Temperatur wird an einem $^1/_{10}{}^0$ Thermometer (mit Normalthermometer im Wasserbad verglichen) abgelesen. Die Konstanz der Temperatur an verschiedenen Orten des Thermostaten und während der Dauer eines Versuchs wird an einem Beckmannthermometer kontrolliert. An einem weiteren Thermometer wird die Zimmertemperatur beobachtet, um bei starken plötzlichen Veränderungen den betreffenden Versuch verwerfen zu können. (S. § 7, 1e.) Da Kugel B aus dem Thermostatwasser herausragt, wird sie dauernd aus einer Rohrleitung mit Leitungswasser übergossen. H_6 führt das Gas nach verschiedenen Reibungskapillaren.

Wirkungsweise. Man verbindet A mit der Atmosphäre und bei Verschluß von H_4 und H_6, mit Hilfe von H_2 und H_8, C mit der Wasserstrahlluftpumpe, saugt leicht an, bis das Quecksilber eben den Hahn H_2 erreicht, schließt durch H_2 C ab und evakuiert das ganze Rohrsystem zwischen den Hähnen H_1, H_3, H_4, H_5, dem Gasometerhahn und H_6 mit der Gaedepumpe. Man stellt dann H_8 um, daß das Versuchsgas in b und c eintreten kann, aber die Verbindung mit a geschlossen bleibt, läßt eine kleine Menge Versuchsgas in C eintreten, dreht den Gasometerhahn ab, saugt das Quecksilber wieder bis H_2, um Reste früherer Versuchsgase völlig zu entfernen. Nun evakuiert man abermals das Rohrsystem, um b und c von Fremdgasresten zu befreien. Bei 1 mm Druck genügt zweimaliges Evakuieren, da die Rohrvolumina nur klein sind.

Ist b und c mit reinem Gas gefüllt, so beginnt der Versuch. H_1 und H_3 werden geschlossen, C wird durch H_2 und H_8 mit dem Gasometer A, durch H_7 mit der Wasserstrahlpumpe verbunden, bis das Quecksilber in die Kugel A hochgestiegen ist. Bei Überdruck im Gasometer verbindet man A mit der Atmosphäre und drückt das Hg in die Höhe. Ist C gefüllt, so verbindet man C mit b, wobei H_6 geschlossen ist, dann A mit der Atmosphäre, so daß Quecksilber soweit absinkt, bis der Druck des Gases in C der darüberstehenden Hg-Säule das Gleichgewicht hält. Öffnet man H_6, so strömt das Gas durch die Kapillare. Man hält mit der Stoppuhr das Passieren des oberen Meniskus an der Marke m_1 zu Beginn und des unteren Meniskus an der Marke m_2 am Ende des Versuches fest. Zur Ablesung werden zwei Uhren benutzt, um Stoppfehler zu verringern.

Nach Beendigung des Versuchs schließt man H_6 und füllt C wieder. Damit ist der Apparat zu einem Versuch mit dem gleichen Gas bereit.

Auf Dichtigkeit wurde der Apparat durch Stehenlassen unter Vakuum geprüft, wobei der Druck in zwei Wochen kaum anstieg. Die Prüfung wurde von Zeit zu Zeit durch Stehenlassen unter Vakuum über Nacht vor allem jedesmal nach Fetten der Hähne wiederholt.

II. Die Reibungskapillaren.

Zu allen Versuchen wurden Glaskapillaren verwendet. Aus einer Anzahl Kapillaren wurden etliche mit ziemlich gleichmäßigem Lumen ausgewählt. Ein Hg-Faden wurde in der

Kapillare verschoben und seine Länge (etwa 2 cm) mit einem Kathetometer beobachtet.

Von einer eigentlichen Kalibrierung, wie sie Schultze in den Ann. der Phys. 5. S. 140ff. 1901 beschrieben hat, wurde Abstand genommen, da keine Absolutmessung beabsichtigt war. Zu Vorversuchen dienten auch Kapillaren ohne vorherige Untersuchung.

Zu den Messungen wurden aus einer untersuchten Kapillaren zwei Stücke von 43 cm Länge herausgeschnitten, an den Enden aufgeblasen und durch ein weiteres U-förmiges Verbindungsrohr so aneinander gesetzt, daß der Gasstrom sie nacheinander passierte und die Kapillaren nebeneinander lagen. Dies war nötig, um sie in den Thermostat schieben zu können. Die Wirkung eines Rohrendes ist definierter als die einer Biegestelle und war außerdem durch zahlreiche Vorversuche genau bekannt. Abgesehen davon hätte ja die Kapillare bei der Biegung außerdem noch zwei Rohrenden gehabt.

Durch Vorversuch war festgestellt, daß lange Vorwärmeröhren überflüssig sind. Zur Vorwärmung diente ein 25 cm langes, 2,5 mm weites Rohr, das ganz im Thermostat lag und ein 50 cm langes, 5 cm weites Rohr über der Heizwicklung in Asbest verpackt.

III. Das Kontrollrohr.

Um das richtige Funktionieren des Ausflußapparats kontrollieren zu können, wurde parallel zur Versuchskapillaren eine zweite Kapillare (100 cm lang) im Innern eines 160 cm langen Liebigschen Kühlers gelegt, den Leitungswasser durchströmte. (Temp.-Abl. mit verschiebbarem $^1/_{10}{}^0$ Thermometer.) Die Kontrollmessungen wurden mit Luft bei etwa 10° C ausgeführt.

IV. Thermostat für die Kapillare.

Ein Glasrohr, 1 cm weit und 100 cm lang, wurde in einem Glasmantel von 6 cm Weite und 100 cm Länge nach Art eines Liebigschen Kühlers, jedoch verblasen, eingesetzt. Der Glasmantel trägt ein Ansatzrohr mit Trichter und Hahn zum Einfüllen und Ablassen von Hg, das den Zwischenraum zwischen Mantel und innerem Rohr füllt. Eine dünne Lage Asbestpapier umgibt das Mantelrohr, darauf eine Kupferfolie und nochmals Asbestpapier, um lokale Überhitzung und Zerspringen des

Glasmantels zu verhüten. Das Ganze wurde mit Rheotangitter umgeben und in Asbestwolle gebettet. Das Gitter ward (mit Regulierwiderstand) zum Anheizen an 220 Volt, zum Konstanthalten der Temperatur an 80 Volt Spannung gelegt. Bei 100° waren hierfür 1 Weber (= 1 Amp.) nötig, woraus die gute Wärmeisolation ersichtlich ist.

Aluminiumfolie umgab die jeweils gereinigte Kapillare, die mit dem engeren Vorwärmerohr in das innere Rohr des Thermostaten geschoben ward. An den Enden wurden die Zwischenräume mit Asbestwolle ausgestopft. Das weitere Vorwärmerohr (nur zur ungefähren Temperaturangleichung) lag über dem Rheotangitter in der Asbestwolle verpackt. Die Thermostattemperatur wurde vor Beginn der Versuche durch Verschieben eines Zehntelgradthermometers bei verschiedenen Temperaturen im Thermostat auf ihre Gleichmäßigkeit untersucht und festgestellt, daß sie bis 250° C noch bis 6 cm vom Rande auf weniger als $^1/_{10}{}^0$ konstant ist. Zur Messung der Temperaturen wurden drei für diesen Zweck eigens hergestellte, geeichte bzw. mit Normalthermometern verglichene Zehntelgradthermometer benutzt.

Die Fadenkorrektion wurde stets berücksichtigt.

V. Apparat zur Herstellung der Gasgemische.

Gasgemische genau bekannter Zusammensetzung werden in einem Apparat hergestellt, dessen wesentlichste Teile zwei mit Hg ausgewogene Hahnpipetten V_1 und V_2 (648,2 bzw. 642,0 ccm) sind. Sie dienen zur Abmessung der Gase. Darunter ist ein 3teiliges Manometer mit viertem Ansatzrohr für Schlauch- und Niveaubirne angesetzt, oben ein kompliziertes Kreuzstück, welches zur Einführung verschiedener Gase dient (vgl. Fig. 2).

Wirkungsweise. Beide Pipetten werden durch Heben der Birne bis über die oberen Hähne mit Hg gefüllt. Das Kreuzstück wird mehrmals evakuiert und mit dem einzufüllenden Gas gespült. Dann tritt zuerst das im gewünschten Gemisch vorwiegende Gas ein. Dazu läßt man das Hg aus der einen Pipette ganz, aus der andern soweit ab, daß die gewünschte Menge Gas in den Apparat tritt und drückt mit der Birne das ganze Gas in die eine Pipette, so daß in ihr erhöhter Druck herrscht. Analog verfährt man mit der andern Pipette.

Um die Molzahlen der eingeschlossenen Gase zu bestimmen, muß Druck, Volumen und Temperatur bestimmt werden.

Letztere wird durch ein Blechgehäuse mit Glasfenstern konstant gehalten. Auf einen Wasserthermostat wurde verzichtet, da nur örtliche, nicht aber zeitliche Temperaturkonstanz nötig ist, und diese durch das hohe Temperaturleitvermögen bei gleichzeitig niedrigem Wärmeleitvermögen der Gase besser als durch Wasser gewährleistet wird. Zur Ablesung der Temperatur dienen zwei $^{1}/_{10}{}^{0}$ Thermometer.

Volumen und Druck der Gase bestimmt man aus dem Stand der Quecksilberkuppen in den drei mit Hg ausgewogenen Manometerrohren, deren mittleres gegen die Atmosphäre offen steht.

Um die Gase zu mischen, evakuiert man das Kreuzstück und drückt dann das schwerere Gas in das leichtere, indem man die Pipette mit Hg füllt. Man erzielt hierbei schon eine verhältnismäßig gute Durchmischung, die noch verbessert wird, indem man das Gas noch dreimal von einer Pipette in die andere drückt und dann in das Quecksilbergasometer nach dem Auspumpen der Rohrleitungen überführt.

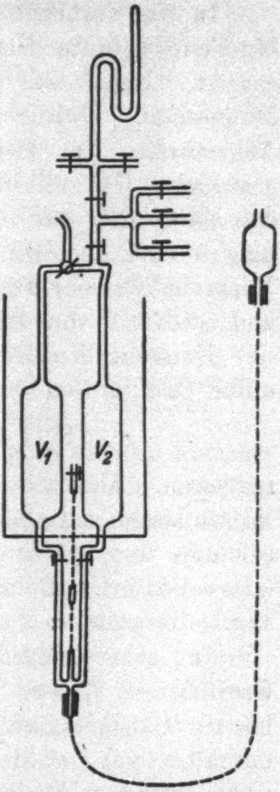


Fig. 2. **Mischungsapparat.**

Da im Apparat beträchtliche Überdrucke herrschen, wurde er vor Benutzung auf einen Gasüberdruck von 4 Atmosphären geprüft. Die Hähne wurden durch besonders starke Messingfedern gesichert.

VI. Gasentwicklungsapparate und Gasometer.

Reindarstellung der Gase.

Zu den Versuchen diente Wasserstoff und Schwefeldioxyd.

Der Wasserstoff wurde einer von Griesheim bezogenen Wasserstofflasche entnommen. Präzisionsanalysen des Wasserstoffs in der hiesigen Abteilung[1]) ergaben als Beimengungen in für uns wesentlichen Mengen nur Sauerstoff, Stickstoff und vielleicht etwas Edelgase. Um erstere zu entfernen, wurde der Wasserstoff auf folgende Weise gereinigt.

In ein Verbrennungsrohr von 1 m Länge wurden 5 mit Mg-Feile gefüllte Eisenrohrstücke von je 12 cm Länge eingesetzt. Eisen war nötig zum Schutz des Glases gegen Magnesium. Zwischen die Rohre kamen einige Zentimeter Asbestwolle, um zwischen Eisen- und Glasrohr hindurchgeströmtes Gas mit der Hauptgasmenge zu mischen und es erst dann über das nächste Magnesiumrohr zu leiten. Außen umgab eine Asbestschicht mit Chromnickeldrahtwicklung das Verbrennungsrohr zur Heizung auf Rotglut, bei der Sauerstoff und Stickstoff von dem Mg verzehrt werden.

Entsteht Wasserdampf, so kann er mit Magnesiumnitrid unter Bildung von Ammoniak nach den Gleichungen:

$$3H_2O + Mg_3N_2 \rightleftharpoons 3MgO + 2NH_3$$

reagieren. Deshalb lag hinter dem Verbrennungsrohr eine Waschflasche mit Schwefelsäure und ein System von Chlorcalcium- und später Schwefelsäuretrockenröhren. Darauf ein Glaswollefilter. Reines Schwefeldioxyd wurde auf folgende Weise dargestellt:

In eine konzentrierte Lösung von Natriumsulfit in destilliertem Wasser wurde bei 40° SO_2 aus einer Stahlbombe bis zur Sättigung eingeleitet. Da in diesem SO_2 etwas CO_2 enthalten war, wurde die Lösung, die stark sauer sein muß, unter weiterem Einleiten von SO_2 gekühlt, mit dem gleichen Volumen Alkohol versetzt, wobei $NaHSO_3$ ausfällt. Dieses wurde scharf abgesaugt, mehrmals mit gekühltem 60proz. Alkohol, schließlich zweimal mit 96proz. Alkohol gewaschen, abgesaugt und auf Filtrierpapier getrocknet. Das scheinbar trockene Pulver wurde unter vermindertem Druck durch einen trockenen Luftstrom völlig getrocknet; auf etwa entstehendes Sulfat brauchte keine Rücksicht genommen zu werden. Über das trockene Bisulfit, das in diesem Zustand kaum CO_2 aufnimmt, wurde nochmals ein Strom des getrockneten Flaschen-

---

1) **Erich Leonhard**, Diss. Heidelberg 1925.

SO_2 geleitet, um allenfalls beginnenden Zerfall in neutrales Sulfit bei der Trocknung rückgängig zu machen. Das Bisulfit wurde in ausgekochtem, destilliertem Wasser gelöst und in den Entwicklungsapparat (Fig. 3) gebracht.

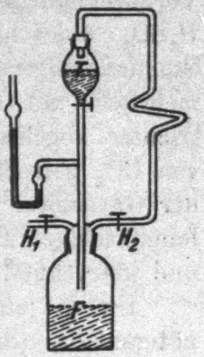


Fig. 3. Gasentwicklungsapparat.

Die Flasche *F* nimmt die Bisulfitlösung auf. In den Tropftrichter *T* wird (unter Erwärmen zur Vertreibung der Luft evakuierte) konzentrierte Schwefelsäure eingefüllt. Das Trichterrohr darf nicht in die Flüssigkeit eintauchen, da sonst die konzentrierte Säure nach unten sinkt und am Boden sich saures Salz absetzt und die regelmäßige Gasentwicklung sehr stört. Als Hahnfett mußte Vaseline verwendet werden. Der Apparat wurde nach Einfüllung von Lösung und Säure ausgepumpt (sowohl Flasche wie Säuretrichter vgl. Fig. 3). Dann schloß man die Hähne H_1 und H_2 und ließ Säure zutropfen. Einige Tropfen genügen, um die Flasche mit SO_2 von Atmosphärendruck zu füllen. Um den Apparat luftfrei zu erhalten, wurde das Auspumpen mehrere Male wiederholt.

Das reine SO_2 passierte erst eine Waschflasche mit Schwefelsäure, dann Chlorcalciumröhren (später Schwefelsäureröhren). Das Chlorcalcium war zuerst auf Alkaleszenz geprüft worden, wobei sich nur wenig Karbonat ergab. Die Röhren wurden einige Stunden mit strömendem und einige Wochen mit ruhendem SO_2 behandelt.

§ 5. Vorbereitungen des Apparates zu den Versuchen.

Vor dem Zusammenblasen wurden die Apparatteile gereinigt, zuerst mit Chromsäuremischung auf einige Stunden gefüllt, dann mit Leitungswasser, mit verdünnter Salzsäure, zuletzt gründlich mit destilliertem Wasser gespült und mit staubfreier trockener Luft getrocknet.

Hähne am Apparat wurden zur Reinigung nur mit Leinwandlappen oder trockenen Wattebäuschen, immer ohne Toluol oder sonstige organische Lösungsmittel, ausgerieben. Zum Fetten diente außer den gewöhnlichen Hahnfetten des Handels reine gelbe Vaseline. Notwendig war dies bei Gasentwicklungsapparaten, wo Schwefelsäure mit Hahnfett in Berührung kam. Auch SO_2 greift auf die Dauer gewöhnliches Hahnfett an.

Das Hg für den Ausflußapparat wurde zuerst von groben Verunreinigungen abfiltriert, in kleinen Portionen mit konz. H_2SO_4 überschichtet und durch einen Luftstrom mehrere Stunden umgerührt, mit Wasser, verdünnter Salpetersäure und mehrfach mit destilliertem Wasser geschüttelt, im Scheidetrichter abgelassen und im Trockenschrank unter Durchleiten von CO_2 getrocknet. Das Hg zur Füllung des Thermostaten, der Gasometer und des Mischungsapparates wurde durch ein feinmaschiges Tuch koliert, mit HNO_3 und Wasser geschüttelt und getrocknet.

Um die aus der Reibungskapillaren ausströmenden Gase nötigenfalls (Schwefeldioxyd) absorbieren zu können und Feuchtigkeit aus der Atmosphäre von der Kapillare abzuhalten, wurde ein Chlorcalciumrohr, ein Rohr mit Kaliumhydroxyd in Stangen und ein zweites Chlorcalciumrohr hinter die Kapillare gelegt. Durch Differentialversuch wurde festgestellt, daß die Rohre keine Drosselwirkung ausüben.

§ 6. Vorversuche.

Durch die ganze Literatur über die Transspiration der Gase zieht sich der Gedanke, daß die aus der Theorie deformierbarer Körper abgeleiteten Formeln eine Korrektion erfahren müßten für Störungen der Strömung, die von den „Rändern“ (den beiden Enden des Rohres) herrühren. Dabei schreiben verschiedene Autoren den Rändern verschiedene Wirkungen zu. Meist werden turbulente Erscheinungen (Wirbelbildung) in den Vordergrund gestellt. Irgendwelche Veröffentlichungen über experimentelle Untersuchungen auf diesem Gebiet haben wir nicht gefunden. Nur findet sich seit O. E. Meyer (auch in den in Halle gemachten Arbeiten) die Bemerkung, die entwickelte Formel sei nur gültig, wenn $\frac{L}{2\varrho} > 3000$, wofür keine Erklärung gegeben wird. Dabei fällt auf, daß die längst bekannte Hagenbachsche Korrektion für die kinetische Energie der Strömung noch nicht angebracht worden ist[1]); auf diesen Mangel hat W. J. Fisher in einer

---

[1]) Ed. Hagenbach, Pogg. Ann. 109. S. 385. 1860.

Arbeit über die innere Reibung der Gase hingewiesen.[1] Ob er selbst in späteren Arbeiten diese Korrektion angebracht hat, ist uns unbekannt, da uns seine späteren Arbeiten nicht zugänglich waren.

Sicher ist, daß überall dort, wo der Querschnitt der Kapillaren sich ändert, eine Korrektion für die kinetische Energie angebracht werden müßte, da sich dort die lineare Geschwindigkeit des Gasstroms ändert, und im Fall der Verringerung an ihrer Statt ungeordnete Wärmebewegung auftritt. Unverkennbar ist die innere Beziehung der Hagenbach-Korrektion und Turbulenz, da man sich den Übergang der linearen Bewegung in die Wärmebewegung als Wirbelbildung vorstellen muß.

Um die Einwirkung der Rohrenden (im folgenden als „Randwirkung“ bezeichnet) zu untersuchen, haben wir Vorversuche angestellt. Es wurde ein Versuch mit einer bestimmten Kapillaren gemacht, diese zerschnitten und die beiden neuen Rohrenden mit Picein in ein kurzes Stück eines weiteren Glasrohrs eingekittet. Da durch das Zerschneiden des Rohrs außer der Verdoppelung der Randwirkungen keine Veränderung der Versuchsanordnung vor sich geht, läßt sich aus einem solchen Versuchspaar die Größe der Randwirkung entnehmen. Wenn die verwendeten Rohre sehr kurz sind, beeinflußt die neue Randwirkung die Lineargeschwindigkeit so sehr, daß ihre Verringerung bei der Vergleichung der Versuche noch eigens beachtet werden muß.

Als Thermostat für die Kapillaren diente das Kontrollrohr. Die Radien der Kapillaren sind durch Auswägen mit Hg bestimmt worden. Die Versuche wurden mit Luft, Wasserstoff und Kohlendioxyd an zwei Kapillaren von verschiedenem Radius vorgenommen.

In den Tabellen bedeutet T bzw. T_0 die Temperatur in Ausflußapparaten und Kapillaren, t die Zeit in Sek., t_0 die auf 11° reduzierte Zeit. Die Mittelwerte sind von den reduzierten Zeiten genommen.

---

[1] W. J. **Fisher**, Phys. Rev. **28**. S. 73. 1909.

Luft als Versuchsgas.

T	T_0	t	t_0	Mittel
(1. Rohrlänge 121 cm unzerschnitten. Radius 0,15 mm.				
11,0	11,0	600,7	600,7	verworfen
10,9	11,0	599,3	599,45	599,6
10,9	11,0	599,9	600,0	
11,0	11,0	599,4	599,45	
2. wie 1. mit zerschnittenem Rohr.				
10,85	11,0	599,8	600,0	599,8
10,9	11 0	599,6	599,75	
10,9	11,0	599,4	599,65	
3. Rohrlänge 83,4 cm unzerschnitten.				
10,9	11,0	421,7	421,4	421,2
10,9	11,0	421,6	421,3	
10,9	11,1	421,7	421,2	
11,1	11,2	420,9	420,9	
4. mit zerschnittenem Rohr.				
11,3	11,25	422,2	421,9	421,8
11,2	11,1	422,1	421,9	
11,3	11,3	422,1	421,7	
5. Rohrlänge 57,0 cm unzerschnitten.				
10,9	10,9	289,4	289,5	289,7
10,9	10,85	289,5	289,7	
10,9	10,8	289 5	289,8	
6. wie 5. mit zerschnittenem Rohr.				
10,9	10,8	290,2	290,5	290,6
10,9	10,8	290,3	290,6	
10,95	10,85	290,4	290,6	
7. Rohrlänge 35,3 cm unzerschnitten.				
10,4	10,55	177,9	178,0	178,0
10,45	10,6	177,9	178,0	
10,5	10,65	177,9	178,0	
8. wie 7. mit zerschnittenem Rohr.				
10,9	11,05	179,2	179,1	179,2
10,9	11,0	179,4	179,3	
10,95	11,1	179,4	179,2	
9. Rohrlänge 25,2 cm unzerschnitten.				
11,2	11,5	129,1	128,9	128,9
11,2	11,3	129,0	128,9	
11,25	11,3	129,1	128,0	
10. wie 9. mit zerschnittenem Rohr.				
10,95	11,05	130,7	130,6	130,6
10,9	11,1	130,8	130,7	
10,9	11,15	130,7	130,5	

T	T_0	t	t_0	Mittel
11. Rohrlänge 17,0 cm unzerschnitten.				
10,95	11,25	90 0	89,8	89,8
11,0	11,2	89,9	89,8	
11,0	11,2	90,0	89,9	
12. wie 11. mit zerschnittenem Rohr.				
10,85	10,9	92,6	92,6	92,5
10,8	10,85	92,4	92,4	
10,8	10,85	92,6	92,6	
13. Rohrlänge 8,8 cm unzerschnitten.				
10,55	—	52,0	52,0	52,0
10,6	—	52,0	52,0	
10,6	—	52,1	52,1	
14. wie 13. mit zerschnittenem Rohr.				
10,45	—	56,1	56,1	56,1
10,4	—	55,9	56,0	
10,4	—	56,1	56,1	

Wegen der kurzen Durchströmungszeiten war eine zweite Temperaturablesung bei den Versuchen 13. und 14. überflüssig.

Um den Einfluß des Rohrradius zu untersuchen, wurden Versuche mit einer engeren Kapillaren ausgeführt.

Rohrradius 0,122 mm.

T	T_0	t	t_0	Mittel
15. Rohrlänge 19,1 cm unzerschnitten.				
10,0	10,1	212,4	212,9	212,8
10,05	10,1	212,2	212,7	
10,05	10,0	212,2	212,8	
16. wie 15. mit 1 mal zerschnittenem Rohr.				
10,0	10,0	214,8	215,3	215,2
10,0	10,1	214,6	215,1	
17. wie 15. aber mit 2 mal zerschnittenem Rohr.				
10,05	10,0	216.5	217,1	217,1
10,1	10,1	216,5	217,1	
18. Rohrlänge 12,4 cm unzerschnitten.				
10,1	10,0	140,6	141,0	140,9
10,15	10,05	140,4	140,9	
10,15	10,1	140,5	140,9	
19. wie 18. mit zerschnittenem Rohr.				
9,9	9,9	143,9	144,4	144,5
9,9	9,9	144,0	144,5	
9,95	9,8	144,0	144,5	

Um den Einfluß der Dichte des Gases zu untersuchen, wurden Versuche mit Wasserstoff und Kohlendioxyd angestellt.

Versuche mit Wasserstoff.

T	T_0	t	t_0	Mittel
20. Rohrlänge 83,4 cm unzerschnitten. Rohrradius 0,15 mm.				
10,9	10,9	208,6	208,6	208,7
11,0	11,0	208,7	208,7	
11,0	11,0	208,7	208,7	
21. wie 20. mit zerschnittenem Rohr.				
11,25	11,2	209,5	209,4	209,3
11,3	11,25	209,5	209,4	
11,25	11,25	209,3	209,2	
22. Rohrlänge 57,0 cm unzerschnitten.				
10,9	10,7	144,2	144,4	144,35
10,9	10 8	144,2	144,3	
23. wie 22. mit zerschnittenem Rohr.				
10,95	11,0	144,5	144,6	144,6

Die Menge des Gases reichte für eine größere Zahl von Versuchen nicht aus.

T	T_0	t	t_0	Mittel
24. Rohrlänge 35,3 cm unzerschnitten.				
10,6	10,8	88,0	88,0	88,1
10,7	10 8	88,2	88,2	
10,7	10,9	88,0	88,0	
25. wie 24. mit zerschnittenem Rohr.				
10,85	11.05	88,4	88,4	88,3
10,9	11,0	88,4	88,3	
10,95	11,1	88,3	88,2	
26. Rohrlänge 25,2 cm unzerschnitten.				
11,2	11,2	63,1	63,1	63,2
11 2	11,2	63,2	63,2	
11,2	11,25	63,2	63,2	
27. wie 26. mit zerschnittenem Rohr.				
11,0	11,15	63,6	63,5	63,5
11,0	11,1	63,5	63,5	
28. Rohrlänge 17,0 cm unzerschnitten.				
10,95	11,05	42,9	42,9	42,9
11,0	11,1	43,0	43,0	
11,0	11,1	42,9	42,9	
29. wie 28. mit zerschnittenem Rohr.				
10,95	11,1	43,4	43,4	43,4
10,95	11,0	43,4	43,4	
10,95	11,0	43,4	43,4	

T	T_0	t	t_0	Mittel
30. Rohrlänge 11,2 cm unzerschnitten.				
10,15	10,3	27,5	27,6	27,7
10,2	10,3	27,6	27,7	
10,2	10,3	27,6	27,7	
31. wie 30. mit zerschnittenem Rohr.				
10,2	10,3	28,2	28,3	28,3
10,2	10,4	28,2	28,3	
10,3	10,3	28,3	28,3	

Versuche mit Kohlendioxyd.

T	T_0	t	t_0	Mittel
32. Rohrlänge 25,4 cm unzerschnitten. Rohrradius 0,15 mm.				
10,0	10,0	104,8	105,1	105,0
9,9	10,0	104,6	104,9	
9,9	10,0	104,8	105,1	
33. wie 32. mit zerschnittenem Rohr.				
9,8	10,05	108,3	108,5	108,3
9,85	10 0	108,0	108,2	
9,9	10,1	108,1	108,2	
34. Rohrlänge 17,2 cm unzerschnitten.				
9,9	10,1	74,1	74,3	74,2
10,0	10,25	73,9	74,1	
10,0	10,3	74,1	74,3	
35. wie 34. mit zerschnittenem Rohr.				
9,95	10,6	78,5	78,4	78,6
9,95	10,2	78,5	78,6	
10,0	10,1	78,5	78,7	
36. Rohrlänge 11,2 cm unzerschnitten.				
10,0	10,1	52,7	52,9	52,8
10,0	10,2	52,7	52,8	
10,05	10,2	52,6	52,8	
37. wie 36. mit zerschnittenem Rohr.				
10,0	10,1	58,0	58,2	58,3
10,0	10,1	58,2	58,4	

Um die Ergebnisse der Versuche besser überblicken zu können, sind die Mittelwerte in den folgenden Tabellen zusammengestellt. Die Randwirkungen sind der Durchströmungszeit bzw. der Rohrlänge verkehrt proportional. Bei den Versuchen mit Luft springt diese Beziehung in die Augen, bei Wasserstoff weniger deutlich, da die Größe der Randwirkungen hier überhaupt sehr gering ist. Die Versuche 20 und 21 wurden verworfen. Bei Versuchen mit sehr kurzer Durchströmungszeit und sehr großen Randwirkungen (CO_2) muß berücksichtigt werden, daß auch am unzerschnittenen Rohr die Randwirkung schon einmal auftritt. Da durch die neue Randwirkung die Geschwindigkeit des Gasstroms verringert wird, werden beim zerschnittenen Rohr beide Randwirkungen, und dadurch auch die Durchflußzeit geringer als man erwarten sollte. Berechnet man aber für den letzten CO_2-Versuch die Größe der Randwirkung aus dem ersten, so findet man 6,1 sec für das zerschnittene Rohr, dagegen 6,8 sec für das unzerschnittene; man findet aus dem Versuch mit zerschnittenem Rohr als auf die Reibung allein entfallende Zeit $58{,}3 - 2 \cdot 6{,}1 = 46{,}1$ und im unzerschnittenen Rohr $52{,}8 - 6{,}8 = 46{,}0$ sec. Eine vortreffliche Übereinstimmung.

Ferner ergibt sich aus den Versuchen die direkte Proportionalität der Randwirkungen zur Dichte der Gase. Die indirekte Proportionalität zu einer Potenz des Rohrradius ist ebenfalls zu erkennen. Durch Vergleich der entsprechenden Ausdrücke unter probeweisem Ansatz der 3., 4. und 5. Potenzen wurde die 4. Potenz als mit den Versuchen am besten in Einklang befindliche erkannt.

Es ergibt sich also:

1. die Größe der Randwirkung ist indirekt proportional der Durchflußzeit.

2. direkt proportional der Gasdichte.

3. indirekt proportional der 4. Potenz des Rohrradius. *Daß diese Abhängigkeit genau der Hagenbachschen Korrektion entspricht*, wird noch gezeigt werden. Wichtiger als die eigentlich selbstverständliche Beobachtung, daß die Hagenbachsche Korrektion auch bei Gasen anzubringen sei, ist die Feststellung, daß *außer ihr* auch bei ganz kurzen Kapillaren, die der O. E. Meyerschen Bedingung nicht genügen, *keinerlei sonstige Randwirkungen* vorhanden sind. Damit ist die Möglichkeit gegeben, auch kürzere Kapillaren für Messungen zu verwenden.

Die Benennungen sind im folgenden weggelassen.

Luft. Rohrradius 0,15 mm.

Rohrlänge	Zeit unzerschn.	Zeit zerschn.	Diff.	Produkt Zeit × Diff.
121,2	599,6	599,8	0,2	120
83,4	421,2	421,8	0,6	253
57,0	289,7	290,6	0,9	261
35,3	178,0	179,2	1,2	215
25,2	128,9	130,6	1,7	222
17,0	89,8	92,5	2,7	250
8,8	52,0	56,1	4,1	230
			Mittel des Produkts:	235

Luft. Rohrradius 0,122 mm.

Rohrlänge	Zeit unzerschn.	Zeit zerschn.	Differenz	Produkt Zeit × Diff.
19,1	212,8	215,2	2,4	516 [1]
19,1	215,2	217,1	1,9	433
12,4	140,9	144,5	3,6	518
			Mittel des Produkts:	517

Der mittlere Wert, bei dem das Rohr zweimal zerschnitten war, wurde nicht benutzt.

Kohlendioxyd. Rohrradius 0,15 mm.

Rohrlänge	Zeit unzerschn.	Zeit zerschn.	Differenz	Produkt Zeit × Diff.
25,4	105,0	108,3	3,3	357
17,2	74,2	78,6	4,4	341
11,2	52,8	58,3	5,5	321
			Mittel des Produkts:	330

Dieser Mittelwert dürfte aus dem früher genannten Grund zu niedrig sein, besser ist der Wert 357.

Wasserstoff. Rohrradius 0,15 mm.

Rohrlänge	Zeit unzerschn.	Zeit zerschn.	Differenz	Produkt Zeit × Diff.
83,4	208,7	209,3	0,6	130
57,0	144,35	144,6	0,25	36
35,3	88,1	88,3	0,2	18
25,2	63,2	63,5	0,3	19
17,0	42,9	43,4	0,5	21
11,2	27,7	28,3	0,6	17
			Mittel des Produkts:	18

Der erste Wert wurde verworfen.

---

[1] Hier wurde das Rohr noch ein zweites Mal zerschnitten.

Gasart	Luft	Wasserstoff	Kohlendioxyd
Dichte $\cdot 10^3$	1,28	0,09	1,89
Produkt	235	18	330
Quotient $\cdot 10^{-3}$	184	200	174

Verwendet man anstatt des Wertes 330 bei Kohlendioxyd den richtigeren Wert 357, so erhält man für den Quotienten den Wert 189, der mit dem Luft- und dem Wasserstoffwert gut übereinstimmt.

Für die Luftversuche mit dem engeren Rohr wird der Quotient 404.

Die Quotienten von den Luftversuchen mit den 3., 4. und 5. Potenzen der betreffenden Rohrradien multipliziert, ergibt folgende Tabelle (ohne Zehnerpotenzen):

Radius	$\frac{t \cdot \tau \varrho^3}{\delta}$	$\frac{t \cdot \tau \varrho^4}{\delta}$	$\frac{t \cdot \tau \varrho^5}{\delta}$
0,15	621	931	1398
0,122	734	895	1092

Die Übereinstimmung ist bei der 4. Potenz bei weitem am besten. Eine bessere Übereinstimmung kann nicht erwartet werden, da die Randwirkungen als sehr kleine, hart an der Fehhlergrenze liegende Differenzen von großen Zahlen bestimmt werden.

Berechnung der Hagenbachschen Korrektion aus den Versuchsbedingungen.

Der Druck möge am einen Ende einer Kapillaren vom Radius ϱ und der Länge L während des ganzen Versuches p am anderen Ende p_0 sein. Durch das Rohr ströme ein Volumen V gemessen beim Drucke p hindurch. Um dem Gas beim Eintritt in die Kapillare die Geschwindigkeit (linear) $\mathfrak{v}$ zu erteilen, sei ein Überdruck p' erforderlich.

Dann ist:

$$p' V = \sum \frac{m \mathfrak{v}^2}{2} = \frac{2 \pi \cdot t \delta}{2} \int_0^{\varrho} r \mathfrak{v}^3 \, dr$$

$$\mathfrak{v} = \frac{1}{4 \eta} \cdot \frac{d p}{d l} \cdot (\varrho^2 - r^2) .$$

Führt man die Rechnung durch, wie von Hagenbach angegeben (s. Literaturabriß), doch unter Vernachlässigung aller kleinen Größen 2. Ordnung, so erhält man:

$$\tau = \frac{2\pi V^2}{\pi^2(p^2 - p_0^2)} \cdot \frac{\delta}{t\varrho^4}\,.$$

Während der Durchströmung des Rohrs steigt die lineare Geschwindigkeit an. Deshalb tritt zu dem Druckabfall dp im Rohrelement dl noch ein Zusatzdruckabfall dp'.

Dann ist:

$$\frac{dp'}{dl}\, V = \pi \cdot t \,\frac{\partial}{\partial l}\, \delta \int_0^\varrho r\, \mathfrak{v}^3\, dr\,.$$

δ, p, v bedeuten Dichte, Druck und Temperatur an einer beliebigen, aber bestimmten Stelle.

Durch Ausführung der Rechnung ergibt sich:

$$\tau' = \frac{4pv^2}{\pi(p + p_0)p_0} \cdot \frac{\delta}{\varrho^4 t}\,.$$

Addiert man beide τ, so erhält man:

$$\tau + \tau' = \frac{\delta_0}{t \cdot \varrho^4} \cdot \frac{2v^2p^2}{\pi^2 \cdot p_0} \left[\frac{1}{p^2 - p_0^2} + \frac{2}{p(p + p_0)}\right].$$

Wie man sieht, hängt τ gerade in der beobachteten Weise von Dichte, Durchflußzeit und Rohrradius ab.

Aber auch der Zahlwert der Korrektion für die kinetische Energie ist berechenbar.

Um diesen mit den Versuchen zu vergleichen, setzen wir im Mittel $p = 940$ mm Hg, $p_0 = 760$ mm Hg, $v = 110$ ccm und berechnen die Größe:

$$\frac{\tau t \cdot \varrho^4}{\delta_0}\,,$$ was 0,01080 ergibt.

Wird das Rohr in der Mitte zerschnitten, so kommt das zweite τ nur etwa zur Hälfte in Rechnung und der Faktor wird: 0,00908. Rechnet man die Dichte auf 10° um, so erhält man 0,00877, was mit den Versuchen in vorzüglicher Übereinstimmung ist.

Für Messungen, bei denen das Rohr in der Mitte zerschnitten ist, wird für beide Randstörungen zusammen der Faktor gleich 0,02 gesetzt werden. Man sieht, daß auch die

Stelle, an der das Rohr zerschnitten wurde, einen kleinen Einfluß auf die Größe der Randwirkungen hat, wodurch sich vielleicht noch einige Unstimmigkeiten erklären lassen würden.

Vorwärmung der Gase.

Bei den in Halle angestellten Versuchen wurden die Gase, bevor sie in die Kapillare eintraten, durch ein langes weites Vorwärmerohr, im gleichen Temperaturbad wie die Kapillare selbst geleitet, um sie auf die Kapillarentemperatur zu bringen. Da sich ein großes Vorwärmerohr in dem von uns benutzten Thermostaten nicht gut unterbringen ließ, wurden zuerst Vorversuche angestellt, ob eine so lange Vorwärmung erforderlich ist. Dies ist nicht der Fall.

An ein 30 cm langes und 5 mm weites Glasrohr war ein 10 cm langes und 5 mm weites Rohr angesetzt. In letzteres wurde ein sehr dünnes $^1/_{10}{}^0$ Thermometer geschoben, mit Hilfe zweier Asbestringe so befestigt, daß die Quecksilberkugel nirgends an die Wand des Glasrohrs anstieß, aber auch von den Asbestringen nicht berührt wurde. Dieses Rohr mit Thermometer wurde in den auf 81,4° erwärmten Thermostat geschoben und aus einem Kohlensäure-Kippapparat jeweils $^1/_4$—$^1/_2$ Stunde lang Gas hindurchgeleitet.

Die Tabelle zeigt die Ergebnisse der Versuche:

ccm/sec	1	2	3	5
Temperaturrückgang	0,0	0,2	0,7	2,5°

Das Thermometer zeigte schon nach 3 Minuten konstante Temperatur an, wenn es in den Thermostat kam und sich vorher auf Zimmertemperatur befunden hatte. Daß ein Sinken der Temperatur durch Nachhinken des Thermometers verdeckt wird, ist ausgeschlossen. Bei großen Strömungsgeschwindigkeiten steigen die Temperaturabnahmen rasch parabelartig an; da aber die Geschwindigkeiten bei den Meßversuchen noch unter 1 ccm/sec liegen, können wegen ungenügender Vorwärmung keine Fehler entstehen. Um so weniger, als sich noch ungenügend vorgewärmtes Gas in den ersten Zentimetern der Kapillaren auf die richtige Temperatur erwärmen würde.

Die Versuche wurden bei einer Thermostattemperatur von 180° mit ähnlichem Ergebnis wiederholt.

Andere Reibungswiderstände.

Durch einen weiteren Vorversuch wurde festgestellt, daß außer in der Kapillaren keine meßbaren Reibungswiderstände an der Apparatur vorhanden waren.

Die Durchflußzeiten zweier Kapillaren mit Luft als Versuchsgas wurden bestimmt, und dann die Kapillaren mit Picein in ein weiteres Verbindungsstück eingekittet. Aus den Durchflußzeiten der zusammengesetzten Kapillaren und der einzelnen kann man unter Berücksichtigung der Randwirkungen erkennen, ob noch andere Reibungswiderstände vorhanden sind.

Dieser Versuch wurde in Verbindung mit den Versuchen 2 und 3 zur Bestimmung der Randwirkungen ausgeführt, indem auch für das nach dem Versuch 2 ausgeschaltete Rohrstück von 37,8 cm Länge die Durchflußzeit bestimmt wurde. Es ergab sich als Mittelwert von drei Bestimmungen auf 11° reduziert: 180,1 Sekunden.

Länge	83,4 cm	37,8 cm	(83,4 + 37,8) cm
Zeit (sec)	421,2	180,1	599,8
Hagb. Korr.	– 0,6	– 1,2	– 0,4
Zeit korr.	420,6	178,9	509,4
Summe	599,5	—	599,4

Aus der guten Übereinstimmung läßt sich entnehmen, daß der Apparat reibungsfrei arbeitet, wie schon aus den Abmessungen berechnet worden war.

Volumenbestimmungen.

Vor den Versuchen selbst waren noch Volumenbestimmungen an den Apparaten vorzunehmen. Da der wirksame Überdruck während eines Versuchs sich ändert, wurde die Abhängigkeit des in *C* enthaltenen Gasvolumens vom herrschenden Überdruck manometrisch mit Luft nach dem Gasgesetz bestimmt.

Dazu wurde am Rohransatz a_3 ein T-Stück angesetzt und daran eine Gasbürette von 100 ccm Inhalt mit Quecksilberniveaubirne und Manometer angeblasen.

Es ergab sich die Wertetabelle:

Überdruck	Volumen	Überdruck	Volumen
120	3,4	179	67,5
138	4,3	181	71,0
140	5,3	184	77,6
143	8,1	187	82,8
147	13,2	189	86,8
152	19,0	193	92,9
157	28,1	195	96,0
160	31,7	197	98,5
163	36,6	200	103,7
168	46,1	202	106,4
171	51,0	211	113,0
175	59,9	221	113,6

Durch diese Wertetabelle wird das in C enthaltene Gasvolumen v als eine Funktion des Überdrucks (bzw. des Drucks) $v = f(p)$ bestimmt.

§ 7. Fehlermöglichkeiten und an den Messungen anzubringende Korrektionen.

Die in den §§ 1 und 3 entwickelten Formeln gelten für ideale Gase und einen idealen Apparat. Zuerst sind die aus der Unidealität sich ergebenden Fehlermöglichkeiten festzustellen, die Größe der Fehler abzuschätzen und allenfalls eine an den Messungen anzubringende Korrektion zu suchen, um die Fehler auszugleichen.

Zu besserer Übersicht sollen zuerst diejenigen Fehlermöglichkeiten behandelt werden, die ihre Ursache in Unvollkommenheiten des Reibungsapparates haben. Um den Zusammenhang nicht zu unterbrechen, werden mathematische Entwicklungen in Anlagen am Schluß beigefügt.

1. Fehler des Apparats.

Orts- und Lageveränderungen des Ausflußapparats.

a) Das Volumen der Glaskugeln *A* und *B*, wie auch ihre Form darf sich während aller zu vergleichenden Versuche nicht unelastisch (etwa durch die Quecksilberlast) ändern. Deshalb folgen zu vergleichende Versuche in möglichst kurzen Zeitabständen aufeinander. Täglich wird ein Luftwert bei Zimmertemperatur gemessen, auf den dann alle an diesem Tage gemachten Messungen bezogen werden, wenn er vom Mittelwerte der Luftwerte abweicht, bzw. diese Messungen werden verworfen. Außerdem ist zu den Meßkapillaren das erwähnte Kontrollrohr parallel geschaltet, um Veränderungen am Ausflußapparat zu erkennen.

b) Die elastische Deformation des gleichen Volumens ist während aller Versuche dieselbe, da die Kräfteverteilung bei allen Versuchen die gleiche ist.

c) Elastische Nachwirkungen sollen ausgeschlossen sein, da sie sich bei der verschiedenen Dauer der Versuche bei Relativmessungen nicht ganz herausheben.

d) Die Apparateteile, die das Quecksilber enthalten, dürfen während aller zu vergleichenden Versuche ihre Lage zur Vertikalen nicht ändern, weder durch langsames Ausweichen der Unterlagen, noch durch plötzliche Erschütterungen. Bei Vorversuchen wurden die Durchflußzeiten verändert, wenn ein schwerer Gegenstand in die Nähe des Apparates auf den Holztisch gestellt wurde. Es wäre möglich, daß Verschiedenheiten zwischen den Versuchsresultaten bei den in Halle ausgeführten Untersuchungen auf ähnliche Gründe zurückzuführen sind. Die Einwirkung eines Neigungswinkels n auf die wirksame Höhe einer Flüssigkeitssäule beträgt für:

n	1	2	3	4	Grad
	0,15	0,6	1,35	2,4	Promille

Nachdem der Apparat auf dem Steintisch aufgestellt war, konnten keine Veränderungen des Neigungswinkels von mehr als 1° vorkommen, besonders da der Apparat schon 6 Monate steht und der Kork sich völlig zusammengedrückt hat. Auch wurden seitdem mit dem Kontrollrohr keine erheblichen Veränderungen mehr wahrgenommen.

Temperaturfehler.

e) Eine Änderung der Volumina von B und C mit der Temperatur braucht man nicht zu berücksichtigen, da sie nur 0,025 Promille für 1° C beträgt.

f) Wirksamer wäre eine Temperaturausdehnung des Quecksilbers. Das Volumen des Gases wird durch die Ausdehnung bei 1 Celsiusgrad Temperaturerhöhung um etwa 0,2 Promille verkleinert. Dem entgegen wirkt aber die Verminderung des spezifischen Gewichts, die den Druck verringert. Beide Einflüsse kompensieren sich gerade.

g) Von der eben erwähnten Fehlerquelle zu unterscheiden ist der Einfluß ungleichförmiger Temperatur im Quecksilber. Soweit es sich in Kugel *C* befindet, wird es die im Thermostat herrschende Temperatur haben, dagegen wird sich die Temperatur in *B* mehr der Zimmertemperatur nähern. Da diese stets höher ist als jene, wird das Volumen des Gases verkleinert. Um die Temperaturen in *B* und *C* auszugleichen, wurde *D* dauernd mit Leitungswasser überströmt. Eine Temperaturerniedrigung wegen der Wasserverdampfung unter die Temperatur des Wassers kann wenige Grade nicht überschreiten und ist daher belanglos. Die Temperaturdifferenzen im Quecksilber sind sicher kleiner als 2,5°, so daß bestimmt keine Fehler größer als 0,5 Promille entstehen. Auch diese gleichen sich bei Relativmessungen teilweise aus.

h) Ein Unterschied der mittleren Temperatur des Gases in *C* von der des Thermostaten von 1° C würde einen Fehler von etwa 3,5 Promille ausmachen. Das Gas hat vor der Einfüllung Zimmertemperatur, die 10 bis 15° höher ist als die des Thermostaten. Es scheint jedoch, daß wegen der engen Einströmungsöffnung, des turbulenten Hereinstürzens des Gases in die Kugel, ferner durch das hohe Temperaturleitvermögen der Gase, dieses in wenigen Minuten die Temperatur des Thermostaten annimmt. Versuche, verschiedene Durchströmungszeiten zu erhalten, wenn das Gas sich vor dem Versuch kürzere oder längere Zeit in Kugel *C* befunden hatte, fielen negativ aus. Zwischen dem Einströmen des Gases und dem Beginn des Versuchs verstrichen bei den Messungen 4—5 Minuten, was für den Temperaturausgleich ausreichend erscheint.

i) Für die Menge des in *C* enthaltenen Gases zu Beginn des Versuchs ist allein seine mittlere Temperatur in diesem Moment maßgebend. Sie wird im Thermostaten mit einem Zehntelgradthermometer abgelesen. Da $^1/_{10}{}^0$ Ablesefehler in der Messung einen Fehler von höchstens 0,35 Promille ausmacht, sind keine Irrtümer zu befürchten.

k) Fehler durch Änderung der Thermostattemperatur während eines Versuchs vgl. Anlagen § 7, 1 k. Danach übt eine Temperaturschwankung während des Versuchs selbst im ungünstigsten Fall keinen Einfluß, wenn sie 0,05° nicht übersteigt, und der Versuch kann noch als brauchbar angesehen werden, wenn die Schwankung unter $^1/_{10}{}^0$ bleibt.

l) Zwischen Marke m_2 und dem Beginn der Kapillaren liegen Rohrstücke, die während der ganzen Versuchsdauer mit Gas gefüllt sind. (Volumen 13,6 ccm.) Da zu Beginn eines Versuchs der Druck in diesem Volumen höher ist, als am Ende, strömt auch aus diesem Volumen Gas aus ferner übt eine Veränderung der Temperatur während des Versuchs einen doppelten Einfluß aus: 1. bleibt bei erhöhter Temperatur am Ende des Versuchs weniger Gas in den Rohrstücken zurück, 2. verursachen Temperaturschwankungen Abschwankungen vom normalen Druckverlauf. (Anlagen § 7, 1 l.)

m) Da die Gase in die Atmosphäre ausströmen, ist der Gegendruck p_0 der Atmosphärendruck und kann bei der Integration über den ganzen Versuch als konstant angesehen werden. Bei Vergleichung verschiedener Versuche bei verschiedenem Barometerstand wird eine Korrektion angebracht (Anlagen § 7, 1 m), die pro Millimeter 0,017% beträgt und bei Drucken über 760 mm addiert wird.

n) Eigentlich müßte die Kapillarentemperatur während der Versuchsdauer konstant gehalten werden. Denn einerseits ist der Reibungskoeffizient selbst von der Temperatur abhängig, andererseits geht die Temperatur der Kapillaren in die zur Berechnung von η verwendete Formel ein. Ändert sich die Temperatur nur wenig, so kann man das Temperaturmittel $\int T_0' dt/t$ in Rechnung setzen und zwar ohne auf den Druckabfall während des Versuchs achten zu müssen, weil die Zeitelemente dt durch $\frac{T_0'}{T_0} dt$ ersetzt werden, wie sich leicht ausrechnen läßt. Für dieses Mittel gilt der berechnete Reibungskoeffizient.

o) Örtliche Temperaturmittelung längs der Kapillaren ist wegen Konstanz der Temperatur überflüssig (siehe Beschreibung des Thermostaten).

p) Die Ausdehnung des Glases wird durch Zufügung des Faktors $[1 + 3\alpha(T_0 - T)]$ zu ϱ^4/L berücksichtigt (3α = kubischer Ausdehnungskoeffizient des Glases = 0,000025). Die Korrektion beträgt für 10° 0,25 Promille.

q) Vorversuche ergaben, daß außerhalb der Kapillaren keine wesentlichen Reibungswiderstände vorhanden sind.

r) Das Quecksilber sinkt mit innerer Reibung durch ein Rohr von etwa 30 cm Länge und 5 mm Radius ab. Die Vergrößerung der Versuchszeit durch die innere Reibung des Hg beträgt weniger, als sich unter Ansatz des kleinsten wirksamen Überdruckes (135 mm Hg) ergeben würde. Für den Fehler ϑ erhält man eine obere Schranke in Sekunden aus der Formel:

$$\vartheta < \frac{8\, V \cdot \eta_{\mathrm{Hg}} \cdot L}{\pi\, \varrho^4\, p_{\mathrm{min}}} < 0{,}021 \text{ sec.}$$

Dieser Einfluß kann also vernachlässigt werden.

s) Ferner ist die Hagenbach-Korrektion für das Quecksilber in Betracht zu ziehen. Ein Teil seiner potentiellen Energie geht schon in Kugel C in Wärme über. Sei dieser Teil $p'V$, so ist $p'V = {}^1/_2\, \mathrm{m}\, \mathfrak{v}^2$, wenn $\mathfrak{v}$ die mittlere lineare Geschwindigkeit ist. Für die ungefähre Abschätzung kann $\mathfrak{v}$ über den Querschnitt konstant gesetzt werden.

$$\mathfrak{v} = \frac{V}{\pi \cdot 0{,}25\, t},$$

wobei t die Versuchsdauer bedeutet.

$$p'V = \frac{13{,}6 \cdot V^3}{2 \cdot 0{,}25^2\, \pi^2\, t^2};$$

die gesamte potentielle Energie ist aber pV, der relative Fehler also:

$$\frac{p'V}{pV} = \frac{p'}{p} = \frac{2{,}44}{t^2}.$$

Dieser Fehler kann stets unberücksichtigt bleiben, denn der absolute Fehler beträgt schon für einen Versuch von nur 40 Sekunden nur 0,061 Sekunden.

t) Undichtigkeiten des Apparates wurden vermieden. Daß darauf hinreichend geprüft wurde, ist schon erwähnt.

u) In der Kapillaren sich absetzende Fremdstoffe (kondensierter Wasserdampf, anhaftende Gasadsorptionshäute u. a.) können das Lumen der Kapillaren verringern. Die Ausströmungsöffnung trug zwar Schutzvorrichtungen gegen eindringenden Wasserdampf. Trotzdem wurden Abweichungen beobachtet, die nur durch Adsorptionshautbildung erklärt werden können. Es zeigte sich nämlich, daß die Versuchsdauer des ersten und manchmal auch des zweiten Versuchs mit einem neuen Gas etwas zu groß ausfiel. Ähnliches hat schon Schultze[1]) beobachtet. Die ersten Versuche wurden deshalb verworfen und sind in den Tabellen nicht angeführt.

Ein Teil der hier erwähnten Fehlermöglichkeiten ist auch bei anderen Versuchsanordnungen vorhanden, wenn sie auch dort nicht diskutiert werden. Peinliche Erörterung der Fehlerquellen erscheint aber wünschenswert, angesichts der großen Verschiedenheit der bereits gemessenen Reibungskoeffizienten.

Jedenfalls ist vorliegende Versuchsanordnung zu benutzen einfacher, durchsichtiger und liegt näher. Auch sind die vorliegenden Messungen besser reproduzierbar als z. B. die mit dem Schultzeschen Apparat gemessenen. Endlich ist die Mathematik in ihrer Entwicklung soweit vorangeschritten, daß mathematische Schwierigkeiten einer Versuchsanordnung von ihrer Anwendung nicht abschrecken können, wenn sie eine experimentelle Vereinfachung verspricht. Insbesondere erscheint uns die Vermeidung der Druckregulierung von Hand (wobei immer zwei Personen am Versuch beteiligt sind) nicht zu teuer erkauft durch die Notwendigkeit, einige Integrale graphisch auszuwerten.

2. Fehlermöglichkeiten, die der Transspirationsmethode anhaften.

a) Indem die Gase die Kapillare durchströmen, gehen sie von dem höheren Druck p zum tieferen Druck p_0 über. Bei der zur Berechnung des Vorgangs von O. E. Meyer aufgestellten Formel wird die Ausdehnung des Gases stillschweigend als isotherm vorausgesetzt. Die Rechnung führt zu einem Faktor $\frac{p^2 - p_0^2}{2p}$. Unserer Kenntnis nach hat der schon erwähnte W. J. Fisher[2]) im Jahre 1909 den Versuch unternommen zu entscheiden, ob die Ausdehnung wirklich iso-

---

1) H. Schultze, Ann. d. Phys. 6. S. 312ff. 1901.

2) W. J. Fisher, Phys. Rev. 29. S. 147. 325. 1909.

therm oder anders sei. Nimmt man adiabatische Ausdehnung an, so erhält man nach Fisher den Faktor

$$\frac{k}{k+1}\cdot\frac{p^{1+1/k}-p_0^{\,1+1/k}}{p^{1/k}},$$

wobei $k = c_p/c_v$ ist (für einatomige Gase 1,66, für zweiatomige 1,4 für mehratomige noch kleiner). Für hochmolekulare Gase würde also eine Angleichung an die gewöhnliche Formel stattfinden. Die richtige Formel liegt nach Fisher dazwischen, da ein Teil der Ausdehnungswärme durch Wärmeleitung ersetzt wird. Experimentell findet er bei höheren Temperaturen Abweichungen von der Sutherlandschen Formel, die er der nicht isothermen Ausdehnung der Gase zuschreibt. Besonders soll diese Vermutung dadurch gestützt werden, daß die Abweichungen bei hochmolekularen Gasen geringer sind. Um zur Klärung dieser Frage beizutragen, soll die Größe der für die Ausdehnung benötigten Energiebeträge festgestellt werden, und in welchem Verhältnis sie zur Reibungsarbeit stehen, die den Wärmebedarf für die Ausdehnung wenigstens teilweise decken wird. Bei unserm Apparat deckt (siehe weiter unten) bei Zimmertemperatur die Reibungswärme die zur isothermen Ausdehnung benötigte Wärmemenge gerade, bei sehr tiefen Temperaturen überwiegt dagegen die Reibungswärme die Ausdehnungsarbeit und umgekehrt reicht bei hohen Temperaturen sie nicht aus, um die Ausdehnungsarbeit zu decken. Soweit erscheint also eine Verfälschung der Resultate im Sinne Fishers nicht unmöglich und es wäre denkbar, daß die Abweichungen von der Sutherlandschen Formel auch bei tiefen Temperaturen, die bei fast allen untersuchten Gasen gefunden worden sind, auf diese Weise eine Erklärung finden. Dem stehen allerdings wieder Versuche von Völker bei tiefen Temperaturen mit Kapillaren verschiedener Weite gegenüber. Bei engeren Rohren müßte der Wärmeausgleich ein besserer sein und demgemäß müßten die engeren Kapillaren bei tiefen Temperaturen kleinere Werte für die Reibungskoeffizienten ergeben, wenn die Fishersche Vermutung zuträfe. Völker hat aber mit beiden Kapillaren die gleichen Werte gefunden. Wir sind der Ansicht, daß die *Abweichungen* von der *Suther-*

landschen Formel reell und die Ausdehnung ausreichend isotherm ist.

Die Rechnung, die zu dem obengenannten Ergebnis führt, ist folgende:

Im Zeitelement dt strömen $\nu\,dt$ Mole Gas durch das Rohr und gelangen vom Druck p zum Druck p_0. Die geleistete Arbeit bei isothermer Ausdehnung ist, wenn T_0 die Temperatur der Kapillaren ist:

$$\nu\,dt\,R\,T_0 \ln\frac{p}{p_0}\,.$$

Die Reibungsarbeit ist: $(p-p_0)\,dv$, wenn die Druckdifferenz $p-p_0$ im Zeitelement dt über das Volumen dv wirkt. Zur Abschätzung darf die Gültigkeit des Gasgesetzes angenommen werden. Also:

Ausdehnungsarbeit: $\nu\,dt\,\mathrm{R}\,T_0 \ln\frac{p}{p_0}\,.$

Reibungsarbeit: $\nu\,dt\,\mathrm{R}\,T\,\frac{p-p_0}{p}\,.$

Das Verhältnis beider wird:

$$\frac{T_0}{T}\,\frac{\ln\left(1+\frac{p-p_0}{p_0}\right)}{\frac{p-p_0}{p}} = \frac{T_0}{T}\,F\,. \text{ —}$$

Der Faktor

$$F = \frac{\ln\left(1+\frac{p-p_0}{p_0}\right)}{\frac{p-p_0}{p}}$$

nimmt für folgende Werte von $\frac{p-p_0}{p}$ die in der Tabelle verzeichneten Beträge an:

$\frac{p-p_0}{p}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
F	1,04	1,09	1,14	1,17	1,22

Dieser Faktor bewegt sich also in der Nähe von 1. Das Verhältnis beider Energien ist ungefähr T_0/T. Die Ausdehnung würde der adiabatischen näher kommen, wenn die Temperatur der Kapillaren viel höher ist als die des Ausflußapparates. Das Umgekehrte gilt cum grano salis, wenn T_0 tief unter der Temperatur des Ausflußapparates liegt.

Den Unterschied der Reibungskoeffizienten, wenn statt der isothermen eine adiabatische Ausdehnung stattfände, kann man abschätzen. Dazu muß das Verhältnis:

$$\frac{(p^2 - p_0^2)(1 + 1/k)\,p^{1/k}}{2p(p^{1+1/k} - p_0^{1+1/k})}$$

bestimmt werden.

Sei $k = 1{,}4$, $p = 950$ mm Hg, $p_0 = 760$ mm Hg. Man erhält dann:

$$1{,}04$$

Der Unterschied zwischen dem nach der adiabatischen und der isothermen Formel berechneten Reibungskoeffizienten beträgt 40 Promille.

Werden die Versuche zwischen 0 und 100° ausgeführt, so werden noch über 70% der Ausdehnungsarbeit durch die Reibungsarbeit gedeckt. Man erhält den Faktor

$$\frac{p^{1+1/k'} - p_0^{1+1/k'}}{p^{1/k'}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{k'}},$$

wobei: $k' = k - 0{,}7\,(k - 1)$, wie man aus der Thermodynamik berechnen kann, ist. Für unsere Versuchsanordnung wird $k' = 1{,}1$ und obiges Verhältnis 1,01.

Nun läßt sich noch berechnen, welches Temperaturgefälle sich zwischen dem äußeren und inneren Radius der Glaskapillaren ausbilden kann, wenn der Überschuß der Ausdehnungsarbeit über die Reibungsarbeit durch Wärmeleitung gedeckt werden soll und das Durchströmen des Gases stationär ist. Bei nicht stationärem Strömen kann das Temperaturgefälle nur kleiner sein, da der Wärmevorrat des Glases noch nicht aufgezehrt ist.

Ist dW/dt die in der Richtung des Radius vorhandene Geschwindigkeit des Wärmestroms, $dT/d\varrho$ das Temperaturgefälle und K das Wärmeleitvermögen, so gilt:

$$\frac{dW}{dt} = K \cdot 2\varrho\pi \cdot L \cdot \frac{dT}{d\varrho},$$

durch Integration:

$$\frac{W}{t} \ln \frac{\varrho_1}{\varrho_2} = K(T_1 - T_2)\,2\pi L.$$

Die ungefähre Größe der zugeleiteten Wärmemenge ermittelt man, wenn man die Reibungsarbeit gleich der potentiellen Energie des Quecksilbers setzt. Sicher wird der Wert zu groß, wenn man für das ganze Hg den höchsten Überdruck (225 mm) in Rechnung setzt und das Volumen gleich dem Volumen des eingeschlossenen Gases (113 ccm). Bei Versuchen kommt davon nur 1% in Rechnung. Daraus berechnete sich die Erniedrigung der Temperatur im Innern der Kapillaren zu 0,00027°.

Nach alledem können wir **Fishers** Bedenken für unbegründet halten.

b) Randwirkungen siehe Vorversuche.

3. Fehler, die in den Versuchsgasen ihre Ursache haben.

a) Bei allen bisherigen Versuchen ist die Voraussetzung gemacht worden, daß die verwendeten Gase streng dem Gasgesetz $pv = RT$ folgen. Das ist aber bei vielen Gasen nicht in ausreichendem Maß der Fall. Um eine bessere Annäherung an die Wirklichkeit zu erzielen, berechnen wir eine Korrektion mit Hilfe der **van der Waals**schen Zustandsgleichung. Diese stellt zwar das Verhalten der Gase nur roh dar, wenn a und b konstant sind. Doch gibt sie bei mäßigen Drucken und in kleinen Bereichen von p und T eine brauchbare Interpolation, wenn a und b immer für den betreffenden Bereich im p-T-Diagramm eigens bestimmt werden. Innerhalb dieses Bereiches können a und b als konstant angesehen werden. Die Größe der a und b haben wir nach Angaben von **van Laar** in seinem neu erschienenen Werk[1]) berechnet. Die Übereinstimmung der **van Laar**schen Beziehungen mit der Wirklichkeit ist nach noch nicht veröffentlichten Untersuchungen im hiesigen Institut recht gut, wenn schon nicht vollkommen.

$$\left(p + \frac{a n^2}{v^2}\right)\left(\frac{v}{n} - b\right) = RT.$$

Im Attraktionsglied kann in erster Näherung $n = \frac{pv}{RT}$ gesetzt werden; dadurch erhält man:

---

1) J. J. **van Laar**, Die Zustandsgleichung von Gasen und Flüssigkeiten; bei L. Voss 1924.

$$p\left(1+\frac{a\,p}{R^2T^2}\right)\left(\frac{v}{n}-b\right)=RT$$

oder nach v aufgelöst.

$$v=n\left(\frac{RT}{p}+b-\frac{a}{RT}\right),$$

wenn man alle kleinen Größen 2. Ordnung wegläßt.

Führt man die Rechnung durch, was in Anlagen § 7, 3a geschehen ist, so ergibt sich als Endformel:

$$\frac{\pi\,\varrho^4}{8\,\eta\,L}\cdot t=\frac{2\,T_0}{T}\int\frac{f+p\,f'}{p^2-p_0^2}\,d\,p+\frac{\pi\,\varrho^4}{8\,\eta\,L}\,t_0\cdot K_{\mathrm{rel}}$$

$$K_{\mathrm{rel}}=-\frac{1}{R\,T}\left(b-\frac{a}{R\,T}\right)\frac{C}{760}+\frac{2}{3\,R\,T_0}\left(b_0-\frac{a}{R\,T_0}\right)\frac{D}{760}.$$

T bedeutet die Temperatur des Ausflußapparates, T_0 der Kapillaren, a, b, a_0 und b_0 die van der Waalsschen Konstanten bei den Temperaturen T und T_0, C und D sind Konstante, die man durch graphische Integration zu $C = 980$ mm Hg und $D = 1240$ mm Hg bestimmt (vgl. Anlage).

b) Verunreinigungen der Gase bzw. Irrtümer in der Zusammensetzung geben natürlich entsprechende Fehler. Dabei ist die Wirkung einer Verunreinigung von Wasserstoff mit Gasen hoher kritischer Temperatur sehr bedeutend, dagegen machen Irrtümer in der Zusammensetzung lange nicht so viel aus. Auf diese Eigentümlichkeit kommen wir später noch einmal zurück.

Zusammenfassung.

An den Messungen ist eine Reihe von Korrektionen anzubringen. Zunächst ist an den Thermometern die Fadenkorrektion zu beachten. Ferner werden Korrektionen in Promille des Wertes angebracht für *die Ausdehnung der Kapillaren, die Schwankungen des Barometerstandes, die Gasabweichungen und die Hagenbachsche Korrektion.*

§ 8. Versuche.

Die Ergebnisse der Versuche sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt. Aus Tabelle 1 ergibt sich die Zusammensetzung der Gemische. Unter A ist $b - a/RT$ zu verstehen. n ist die aus dem einfachen Gasgesetz berechnete

Molzahl Gas, n_0 die unter Berücksichtigung der Abweichungen. Die angegebenen Proz. sind Molprozente. In Tabelle 2 und 3 sind die Durchströmungsversuche dargestellt. (T = Temp. des Ausflußapparates, T_0 der Kapillaren unter Berücksichtigung der Fadenkorrektion). In der Regel wurden drei Versuche unter gleichen Bedingungen angestellt. Um ihre Übereinstimmung zu untersuchen, wurden die Versuchszeiten auf geeignete Temperaturen des Ausflußapparats (9,00° und 11,00°) umgerechnet (t_0). Von diesen Zeiten wurde das Mittel genommen. Die Mittelwerte sind in Tabelle 2 und 3 zusammengestellt, wo die nötigen Korrektionen angebracht sind und die Reibungskoeffizienten berechnet werden. Diese werden dann auf 17, 45, 70, 92, 124, 159 und 199° (durch lineare Interpolation bei kleinen Abständen von den Temperaturen der Messungen, sonst mit der Sutherlandschen Formel) umgerechnet (Tabelle 4). Die Temperaturkoeffizienten der inneren Reibung aus mäßigen Intervallen berechnet, sind in Tabelle 5 angeführt. Tabelle 6 und 6a enthält die beobachten und berechneten (nach der Sutherlandschen Formel) Reibungskoeffizienten der Luft und des Schwefeldioxyds in dem Temperaturgebiet zwischen Zimmertemperatur und 199°. Der Tabelle 4 wurden isotherme Reibungskoeffizient-Molenbruchdiagramme bei den genannten Temperaturen entnommen und in Kurven eingetragen, die den Anlagen beigeheftet sind.

Tabelle 1.

Zusammensetzung der Gemische.

1. 649,8 ccm Wasserst. 283 mm Hg 18,7°
649,1 „ Schwefeld. 1265 „ „ 18,7°
$-A = 0{,}019600$ $n_0 = n \cdot 1{,}03053$
$n_{SO_2} = 0{,}046483$ Mole
$n_{H_2} = 0{,}010102$ „
$= 0{,}056585$ Mole

Zusammensetzung:
82,15% SO_2
17,85% H_2

2. 651,0 ccm Wasserst. 759,3 mm Hg 16°
644,4 „ Schwefeld. 772,3 „ „ 15,5°
$-A = 0{,}021140$ $n_0 = n \cdot 1{,}02026$
$n_{SO_2} = 0{,}02820$ Mole
$n_{H_2} = 0{,}02736$ „
$= 0{,}05561$ Mole

Zusammensetzung:
50,75% SO_2
49,25% H_2

3. 651,7 ccm Wasserst. 784,5 mm Hg 19,1°
643,9 „ Schwefeld. 726,4 „ „ 18,8°
$-A = 0{,}01960$ $n_0 = n \cdot 1{,}01747$
$n_{SO_2} = 0{,}026136$ Mole
$n_{H_2} = 0\ 028058$ „
$= 0{,}054194$ Mole
Zusammensetzung:
48,23 % SO_2
51,77 % H_2

4. 650,3 ccm Wasserst. 457,1 mm Hg 18,7°
646,8 „ Schwefeld. 1045,2 „ „ 18,6°
$-A = 0{,}01960$ $n_0 = n \cdot 1{,}02520$
$n_{SO_2} = 0{,}038089$ Mole
$n_{H_2} = 0{,}016330$ „
$= 0{,}054419$ Mole
Zusammensetzung:
69,99 % SO_2
30,01 % H_2

5. 650,5 ccm Wasserst. 643,5 mm Hg 18,7°
644,7 „ Schwefeld. 1022,2 „ „ 18,5°
$-A = 0{,}019600$ $n_0 = n \cdot 1{,}0262$
$n_{SO_2} = 0{,}03718$ Mole
$n_{H} = 0\ 02300$ „
$= 0{,}06018$ Mole
Zusammensetzung:
61,75 % SO_2
38,25 % H_2

6. 650,7 ccm Wasserst. 323,4 mm Hg 17,4°
646,1 „ Schwefeld. 1276 „ „ 17,3°
$-A = 0{,}020500$ $n_0 = n \cdot 1{,}0323$
$n_{SO_2} = 0{,}04698$ Mole
$n_{H_2} = 0{,}01161$ „
$= 0{,}05869$ Mole
Zusammensetzung:
79,78 % SO_2
19,72 % H_2

7. 657,4 ccm Wasserst. 1334,8 mm Hg 15,4°
644,0 „ Schwefeld. 678,1 „ „ 15°
$-A = 0{,}02114$ $n_0 = n \cdot 1{,}0179$
$n_{SO_2} = 0{,}02053$ Mole
$n_{H_2} = 0{,}04876$ „
$= 0{,}06929$ Mole
Zusammensetzung:
29,63 % SO_2
70,37 % H_2

8. 658,2 ccm Wasserst. 1519,4 mm Hg 18,4°
638,4 „ Schwefeld. 463,7 „ „ 18,1°
$-A = 0{,}01960$ $n_0 = n \cdot 1{,}0112$
$n_{SO_2} = 0{,}016485$ Mole
$n_{H_2} = 0{,}055009$ „
$= 0{,}071494$ Mole
Zusammensetzung:
23,06 % SO_2
76,94 % H_2

9. 655,8 ccm Wasserst. 1404,5 mm Hg 18°
644,1 „ Schwefeld. 419,3 „ „ 18,0°
$-A = 0{,}01960$ $n_0 = n \cdot 1{,}01010$
$n_{SO_2} = 0{,}015024$ Mole
$n_{H_2} = 0{,}050705$ „
$= 0{,}065729$ Mole
Zusammensetzung:
22,85 % SO_2
77,14 % H_2

10. 656,0 ccm Wasserst. 1263,6 mm Hg 19,6°
648,1 „ Schwefeld. 254,1 „ „ 19,2°
$-\varDelta = 0{,}01960$ $n_0 = n \cdot 1{,}00614$
$n_{SO_2} = 0{,}009017$ Mole Zusammensetzung:
$n_{H_2} = 0{,}045398$ „ 16,57 % SO_2
$= 0{,}054415$ Mole 83,43 % H_2

11. 654,6 ccm Wasserst. 880,1 mm Hg 16,8°
646,5 „ Schwefeld. 745,6 „ „ 17,1°
$-\varDelta = 0{,}02050$ $n_0 = n \cdot 1{,}0202$
$n_{SO_2} = 0{,}02720$ Mole Zusammensetzung:
$n_{H_2} = 0{,}03005$ „ 47,99 % SO_2
$= 0{,}05725$ Mole 53,02 % H_2

12. 654,1 ccm Wasserst. 814,1 mm Hg 18,35°
650,8 „ Schwefeld. 1648,8 „ „ 18,6°
$-\varDelta = 0{,}01960$ $n_0 = n \cdot 1{,}0424$
$n_{SO_2} = 0{,}06115$ Mole Zusammensetzung:
$n_{H_2} = 0{,}02930$ „ 67,61 % SO_2
$= 0{,}09045$ Mole 32,40 % H_2

13. 656,5 ccm Wasserst. 1554 mm Hg 19,8°
645,3 „ Schwefeld. 752,7 „ „ 20,0°
$-\varDelta = 0{,}01900$ $n_0 = n \cdot 1{,}0188$
$n_{SO_2} = 0{,}02707$ Mole Zusammensetzung:
$n_{H_2} = 0{,}05584$ „ 32,65 % SO_2
$= 0{,}08291$ Mole 67,35 % H_2

14. 656,5 ccm Wasserst. 1566,6 mm Hg 20,4°
643,2 „ Schwefeld. 319,5 „ „ 20,6°
$-\varDelta = 0{,}01900$ $n_0 = n \cdot 1{,}0080$
$n_{SO_2} = 0{,}01131$ Mole Zusammensetzung:
$n_{H_2} = 0{,}05618$ „ 16,76 % SO_2
$= 0{,}06749$ Mole 83,24 % H_2

15. 657,6 ccm Wasserst. 1612,6 mm Hg 21,8°
644,3 „ Schwefeld. 291,5 „ „ 22,1°
$-\varDelta = 0{,}01900$ $n_0 = n \cdot 1{,}00674$
$n_{SO_2} = 0{,}05767$ Mole Zusammensetzung:
$n_{H_2} = 0{,}01027$ „ 15,12 % SO_2
$= 0{,}06794$ Mole 84,88 % H_2

16. 653,0 ccm Wasserst. 820,8 mm Hg 22,0°
645,6 „ Schwefeld. 785,3 „ „ 22,1°
$-\varDelta = 0{,}01890$ $n_0 = n \cdot 1{,}0181$
$n_{SO_2} = 0{,}02803$ Mole Zusammensetzung:
$n_{H_2} = 0{,}02911$ „ 49,05 % SO_2
$= 0{,}05714$ Mole 50,95 % H_2

Tabelle 2.

Zusammenfassung der Mittelwerte.

I. Versuchsreihe mit Luft.

T	T_0	$t_,$	p_0	Korrektionen in Promille				t_0 red.	$\eta \cdot 10^7$
				Hagenb.	Glas	Gasabw.	Barom.		
9,00	17,7	424,3	757	−2,6	—	—	−0,5	423,0	1824
	18,7	427,1	760	−2,6	—	—	—	426,0	1831
	18,7	427,7	757	−2,6	—	—	−0,5	426,4	1833
	21,5	434,0	757	−2,5	—	—	−0,5	432,7	1842
	39,7	482,3	757	−2,0	+0,5	—	−0,5	481,3	1929
	61,2	541,9	757	−1,6	+1,0	—	−0,5	541,5	2031
	80,4	597,4	757	−1,3	+1,5	—	−0,5	597,2	2118
	100,5	657,8	757	−1,1	+2,0	—	−0,5	658,1	2209
II. Versuchsreihe mit Luft.									
9,00	16,0	424,3	758	−2,6	—	—	−1,2	422,3	1814
	16,0	423,0	764	−2,6	—	—	+0,7	422,8	1815
	19,0	432,0	764	−2,5	—	—	+0,7	431,2	1832
	67,2	564,0	754	−1,5	+1,2	—	−1,0	563,3	2055
	80,4	602,4	754	−1,3	+1,5	—	−1,0	602,0	2116
	94,0	644,4	764	−1,1	+1,8	—	+0,7	645,3	2183
	94,0	644,3	758	−1,1	+1,8	—	−0,3	644,6	2180
	99,0	658,4	764	−1,1	+2,0	—	+0,7	659,5	2201
III. Versuchsreihe mit Luft.									
11,0	14,0	416,7	749	−2,7	—	—	−1,9	414,8	1806
	17,0	423,8	747	−2,6	—	—	−2,2	421,8	1818
	99,0	657,4	749	−1,1	+2,0	—	−1,9	656,7	2206
	124,5	735,1	747	−0,9	+2,60	—	−2,2	734,8	2315
	157,5	841,3	749	−0,7	+3,40	—	−1,9	842,0	2444
	200,0	987,3	756	−0,5	+4,50	—	−0,7	990,6	2607

Tabelle 2 (Fortsetzung).

Schwefeldioxyd aus der Stahlflasche.

T	T_0	t_0	p_0	Korrektionen in Promille				t_0 red.	$\eta \cdot 10^7$
				Hagenb.	Glas	Gasabw.	Barom.		
9,00	16,0	301,9	764	−11,6	—	− 6,7	+0,7	296,7	1275
	19,0	307,0	764	−11,2	—	− 7,6	+0,7	301,4	1282
	47,9	374,4	764	− 7,5	+0,7	−12,9	+0,7	367,4	1422
	99,0	504,1	764	− 4,1	+2,0	−18,4	+0,7	494,2	1651
				Reines Schwefeldioxyd.					
11,0	14,0	291,2	749	−12,5	—	− 6,0	−1,9	285,4	1248
9,00	16,0	297,9	757	−12,0	—	− 6,7	−0,5	292,2	1256
9,00	19,0	302,9	764	−11,8	—	− 7,6	+0,7	297,5	1265
11,0	46,5	363,8	749	− 8,0	+0,6	−12,6	−1,9	355,8	1391
9,00	55,0	385,3	764	− 7,1	+0,7	−15,0	+0,7	377,8	1421
9,00	17,7	302,0	747	−11,6	—	− 7,1	−2,2	295,7	1263
9,00	80,4	449,7	756	− 5,2	+1,6	−16,9	−0,7	440,2	1547
9,00	95,0	488,5	756	− 4,0	+1,9	−18,3	−0,7	478,0	1613
9,00	97,0	492,4	764	− 3,9	+2,0	−18,8	+0,7	482,7	1621
11,0	123,8	564,8	756	− 3,3	+2,5	−21,6	−0,7	551,8	1738
11,0	159,5	672,4	756	− 2,3	+3,5	−23,0	−0,7	657,3	1899
11,0	199,0	799,4	756	− 1,7	+4,5	−24,1	−0,7	782,0	2071
				Wasserstoff.					
11,0	13,5	202,4	749	− 1,2	—	—	−1,9	201,8	880
9,00	16,7	207,0	757	− 1,1	—	—	−0,5	206,9	887
9,00	69,1	274,8	746	− 0,6	+1,3	—	−2,4	273,8	994
9,00	91,8	304,2	745	− 0,5	+1,8	—	−2,5	303,8	1036
11,0	100,0	317,3	749	− 0,5	+2,0	—	−1,7	313,3	1050
11,0	125,0	351,5	747	− 0,4	+2,6	—	−2,2	351,5	1104
11,0	158,0	402,0	747	− 0,3	+3,5	—	−2,2	402,5	1167
11,0	159,0	403,2	756	− 0,3	+3,5	—	−0,7	404,2	1169
11,0	200,0	467,2	756	− 0,2	+4,5	—	−0,7	468,9	1239

Tabelle 3.

Versuche mit Gemischen von Schwefeldioxyd und Wasserstoff.

% H	T	T_0	t_0	p_0	Korrektionen in Promille				t_0 red.	$\eta \cdot 10^7$
					Hagenb.	Glas	Gasabw.	Barom.		
17,85	9,00	17,2	306,7	757	−9,2	—	− 4,0	−0,5	302,5	1295
49,25	9,00	15,1	313,6	752	−5,1	—	− 1,7	−1,4	311,0	1341
49,25	9,00	51,7	395,6	752	−3,3	+0,7	− 2,7	−1,4	393,3	1508
51,77	9,00	65,0	428.9	752	−2,8	+1,1	− 3,1	−1,4	426,3	1566
51,77	9,00	92,6	498 6	752	−2,0	+1,7	− 4,1	−1,4	495,8	1685
30,01	9,00	65,4	423,1	748	−4,0	+1,1	− 6,4	−2,0	418,5	1536
30,01	9,00	90,2	485,5	748	−3,0	+1,7	− 7,5	−2,0	479,7	1640
38,25	9,00	70,0	489,8	745	−3,7	+1,3	− 5,1	−2,5	484,9	1575
38,25	9,00	95,0	504,7	745	−2,8	+1,8	− 5,8	−2,5	500,0	1688
19,72	9,00	70,0	430,9	745	−5,1	+1,3	− 9,2	−2,5	424,1	1535
19,72	9,00	92,0	488,2	745	−3,9	+1,7	−10,5	−2,5	480,7	1685
19,72	9,00	93,4	491,0	745	−3,9	+1,7	−10,5	−2,5	483,6	1688
70,37	9,00	19,0	326,9	746	−2,7	—	− 0,2	−2,4	325,2	1383
70,37	9,00	45,0	384,2	746	−2,1	+0,5	− 0,8	−2,4	382,4	1494
70,37	9,00	70,8	443,3	746	−1,6	+1,3	− 0,9	−2,4	441,7	1599
76,9	9,00	69,6	428,8	740,5	−1,4	+1,3	—	−3,3	427.2	1549
76,9	9,00	92,7	484,2	740,5	−1,0	+1,7	—	−3,3	483,5	1648
76,9	9,00	99,7	498,0	740,5	—1,0	+2,0	—	−3,3	497,6	1662
77,14	9,00	15,1	311,1	749	−2,2	—	—	−1,9	309,7	1384
77,14	9,00	17,2	315,4	749	−2,2	—	—	−1,9	314,2	1344
77,14	9,00	43,0	368,7	749	−1,6	+0,5	—	−1,9	367,6	1449
83,43	9,00	54,5	383,0	750	−1,3	+0,8	—	−1,7	382,1	1449
83,48	9,00	72,5	421,6	750	−0,9	+1,3	—	−1,7	421,1	1513

Tabelle 3 (Fortsetzung).

Gemische von Schwefeldioxyd und Wasserstoff (Fortsetzung).

% H	T	T_0	t_0	p_0	Korrektionen in Promille				t_0 red.	$\eta \cdot 10^7$
					Hagenb.	Glas	Gasabw.	Barom.		
53,02	11,0	123,0	576,2	756	−2,0	+2,5	− 4,5	−0,7	573,5	1810
53,02	11,0	159,0	680,0	756	−1,4	+3,5	− 5,0	−0,7	677,6	1960
32,40	11,0	121,5	568,9	755	−2,3	+2,5	− 9,0	−0,8	563,4	1785
32,40	11,0	159,0	679,2	755	−1,6	+3,5	− 9,8	−0,8	671,3	1942
32,40	11,0	199,0	806,4	755	−1,1	+4,5	−10,4	−0,8	800,1	2118
67,35	11,0	124,0	572,9	750	−0,8	+2,6	− 1,2	−1,7	572,3	1801
67,35	11,0	158,0	667,9	750	−0,6	+3,5	− 1,2	−1,7	667,9	1937
67,35	11,0	199,0	790,9	753	−0,4	+4,5	− 1,2	−1,2	792,2	2098
83,24	11,0	19,7	309,1	746,5	−2,2	—	—	−2,3	307,7	1314
83,24	11,0	47,5	365,1	746,5	−1,7	+0,5	—	−2,3	363,8	1419
83,24	11,0	125,0	537,5	750	−0,7	+2,5	—	−1,7	537,5	1688
83,24	11,0	158,2	620,2	750	−0,5	+3,5	—	−1,7	621,0	1800
84,88	11,0	158,5	608,7	746,5	−0,5	+3,5	—	−2,3	604,1	1746
84,88	11,0	197,5	730,0	746,5	−0,4	+4,5	—	−2,3	731,3	1947
50,95	11,0	201,0	810,4	746,5	−1,0	+4,5	− 5,5	−2,3	806,9	2127

Der vorletzte Wert 1947 ist falsch und zu hoch und wurde verworfen. Es hatte sich ein Chlorcalciumrohr verstopft.

Tabelle 4.

Isothermendiagramme.

17°		45°		70°	
% H	$\eta \cdot 10^7$	% H	$\eta \cdot 10^7$	% H	$\eta \cdot 10^7$
0,00	1259	0,00	1386	0,00	1498
17,85	1293	19,72	1425!	19,72	1535
49,25	1350	49,25	1475	30,01	1557
70,37	1370	70,37	1494	38,25	1574
77,14	1344	77,14	1458	51,77	1587
83,24	1304	83,24	1410	70.37	1596
100,00	888	100,00	945	76,94	1551
				83,43	1505
				83,24	1500!
				100,00	994

92°		124°		159°		199°	
% H	$\eta \cdot 10^7$	% H	$\eta \cdot 10^7$	% H	$\eta \cdot 10^7$	% H	$\eta \cdot 10^7$
0,00	1599	0,00	1739	0,00	1897	0,00	2071
19,72	1633	32,40	1797	32,40	1942	32,40	2118
30,01	1648	53,02	1814	53,02	1960	50,95	2121
38,25	1675	67,35	1801	67,35	1942	67,35	2098
51,77	1682	83,64	1685	83,24	1803	84,88	1958
76,94	1640	100,00	1102	84,88	1748	100,00	1237
83,43	1577!			100,00	1169		
83,24	1573!						
100,00	1037						

Die mit ! versehenen Zahlen sind interpoliert aus Messungen bei Temperaturen, die sich um mehr als 5° von den angegebenen unterscheiden.

Tabelle 5.

Temperaturkoeffizienten (ungefähre).

% H	17—45° 28°	45—70° 25°	70—92° 22°	92—124° 32°	124—159° 35°	159—199° 40°
0,0	4,55	4,55	4,60	4,37	4,50	4,34
18	4,62	4,40	4,50	—	—	—
32	—	—	4,14	4,40	4,15	4,30
50	4,47	4,36	4,33	—	—	—
70	—	4,08	—	—	4,00!	3,90!
77	3,90	3,90	4,05	—	—	—
83	3,80	3,80	3,50!	3,50	3,37	—
100	2,03	2,16	1,95	2,3	1,92	1,95

Durch den Strich in der Mitte der Tabelle wird die Lage des Maximums bezeichnet. Die mit Ausrufungszeichen versehenen Zahlen beziehen sich auf ein Gemisch von 67 Proz. Wasserstoff. Bei 70 Proz. dürften die Zahlen etwas kleiner werden.

Temperaturabhängigkeit
der inneren Reibung von Luft und Schwefeldioxyd.

Tabelle 6.
Luft.

T_0	$\eta \cdot 10^7$	
	beob.	ber.
16,0	1815	1815
19,0	1832	1830
21,5	1842	1842
39,7	1929	1930
61,2	2031	2030
67,2	2055	2057
80,4	2117	2117
94,0	2181	2178
99,0	2201	2200
124,5	2315	2309
157,5	2444	2445
200,0	2607	2612

Tabelle 6a.
Schwefeldioxyd.

T_0	$\eta \cdot 10^7$	
	beob.	ber.
14,0	1221	1248
17,7	1239	1263
46,5	1376	1391
80,4	1535	1547
97,0	1611	1621
128,8	1738	1738
159,0	1894	1897
199,0	2071	2071

Die unterstrichenen Werte wurden zur Berechnung der übrigen benutzt. Die Übereinstimmung ist bei Luft gut, bei Schwefeldioxyd nicht in genügendem Maße vorhanden.

§ 9. Kritik und Zusammenfassung der Versuche.

Die *Genauigkeit* der *Messungen* ist am größten bei den Versuchen mit Luft. Dort werden die Fehler 0,15 Proz. des Werts kaum überschreiten. Bei den Versuchen mit SO_2 dürfte die Fehlergrenze bei 0,2 Proz. liegen. Die Versuche mit Wasserstoff sind zwar in den gleichen Grenzen reproduzierbar, jedoch durchgängig etwa 0,8 Proz. höher als die von Kleint[1]) gemessenen, und etwas größer als die von Völker[2]). Sie stimmen gut überein mit den Werten von Breitenbach[3]) und sind niedriger als die Werte von Thomsen[4]), Puluj[5]) und Graham[6]). Letzteres fällt nicht auf, da nach der Methode der schwingenden Scheiben fast immer größere Zahlen gefunden werden als nach der Transpirationsmethode. Den Grund für

---

1) F. Kleint, Diss. Halle 1904.
2) B. Voelker, Diss. Halle 1910.
3) Breitenbach, Diss. Erlangen 1898.
4) E. Thomsen, Ann. d. Phys. 30. S. 815. 1911.
5) Puluj, vgl. Literaturabriß.
6) Graham, vgl. Literaturabriß.

die Abweichungen unserer Zahlen suchen wir in der nicht genügenden Reinheit des Wasserstoffs, der vielleicht Edelgase enthielt. Diese Vermutung wird durch die Tatsache unterstützt, daß unsere Werte gleichblieben, nachdem die Temperatur im Magnesiumsverbrennungsrohr von 500—600° auf etwa 700° erhöht worden war. Stammte der Fehler von unverbranntem Sauerstoff oder Stickstoff, so hätte man wenigstens ein teilweises Zurückgehen erwarten können. Für den Zweck der vorliegenden Arbeit ist die Genauigkeit der Wasserstoffwerte nicht sehr von Belang, deshalb haben wir uns mit der Reproduzierbarkeit begnügt.

Die Fehlergrenze bei den Gemischen muß weiter angesetzt werden. Reproduzierbar sind die Messungen innerhalb 0,3 Proz., auch wurden bei einzelnen Gemischen die Werte recht gut nach längerer Zeit wiederholt. Wir halten Fehler von 0,2 Proz. nach beiden Seiten für wahrscheinlich und glauben solche von 0,4 Proz. bei Gemischen von weniger als 30 Proz. Schwefeldioxyd nicht ausschließen zu können. Hinzu kommt noch ein systematischer Fehler, der durch die Fehlerhaftigkeit der Wasserstoffwerte verursacht ist, der bei Gemischen von 80 Proz. Wasserstoff etwa 0,5 Proz. ausmachen kann, bei 50 Proz. Wasserstoff 0,3 Proz. und bei geringerem Wasserstoffgehalt entsprechend weniger. Unsere Werte sind um die angegebenen Werte mutmaßlich zu hoch. Legt man statt der Wasserstoffwerte von Kleint die von Völker als die richtigen zugrunde, so sind diese Fehler sehr klein und in bezug auf die Breitenbachschen Werte sind unsere Zahlen richtig.

Eine Korrektion wäre an den Messungen noch für die Gleitung anzubringen. Da deren Einwirkung bei Relativmessungen teilweise kompensiert wird, ferner der Rohrradius der Kapillaren ziemlich groß (0,15 mm) ist, berechnen sich die Fehler im ungünstigsten Fall bei Wasserstoff zu 0,3 Proz., wenn der Gleitungskoeffizient gleich der mittleren freien Weglänge gesetzt wird.

Da die beiden genannten Korrektionen nur bei Gemischen mit mehr als 70 Proz. Wasserstoff erheblich außerhalb der Fehlergrenze liegen, gerade die Genauigkeit dieser Werte aber nur von geringerem Interesse ist, wurde eine Korrektion an den Zahlen nicht mehr vorgenommen. Eine Umrechnung ist auf Grund unserer Angaben möglich.

Wie aus Tab. 6a hervorgeht, lassen sich die Messungen an der Luft durch die Sutherlandsche Formel befriedigend darstellen. Die Unterschiede zwischen beobachteten und berechneten Reibungskoeffizienten überschreiten im Intervall von 14—199° die Fehlergrenzen kaum. Zur Berechnung wurde die Konstante C mit einem Mittelwert bisheriger Messungen verschiedener Beobachter angesetzt. Kleine Unterschiede der Konstanten sind nicht sehr bedeutsam, da der Temperaturkoeffizient der inneren Reibung nicht sehr empfindlich gegen ihre Veränderungen ist.

Die Temperaturabhängigkeit des Reibungskoeffizienten für Schwefeldioxyd wird in recht guter Annäherung durch eine gerade Linie dargestellt. Da die Abweichung der Reibungskoeffizienten von der Sutherlandschen Formel bei tiefen (Absolut-) Temperaturen mehrfach beobachtet worden war, und es sich dabei fast immer um Temperaturgebiete handelt, in denen die Abweichungen vom idealen Gaszustand merklich zu werden beginnen, lag die Vermutung nahe, daß das Schwefeldioxyd auch schon bei Zimmertemperatur ein abweichendes Verhalten zeigen würde. Daß die Abweichungen auf „tiefe“ Temperaturen beschränkt sind, ist wenig wahrscheinlich, sondern die Gase dürften sich in dieser Hinsicht in korrespondierenden Zuständen vergleichbar verhalten. Da Kopsch[1]) zeigte, daß auch in den Abweichungsgebieten die Formel imstande ist, die Beobachtungen darzustellen, jedoch mit einem anderen Zahlwert der Konstanten, so muß die Konstante aus einem Temperaturgebiet berechnet werden, das hoch genug über dem Gebiet der mutmaßlichen Abweichungen liegt. Wir haben die Konstante C aus unseren Messungen bei 124° und 199° zu 471 bestimmt. Wie die Tab. 6b zeigt, kann aber die Temperaturabhängigkeit der inneren Reibung des Schwefeldioxyds mit der Sutherlandschen Formel und der berechneten Konstanten nicht genügend dargestellt werden, und zwar bewegen sich die Abweichungen im gleichen Sinn, wie sie schon früher an anderen Gasen bei tiefen Absoluttemperaturen beobachtet worden sind. Es kann mit einiger Bestimmtheit angenommen werden, daß die Diskrepanz zwischen berechneten und beobachteten Werten noch bedeutender wäre, wenn zur Berechnung von C ein höheres Temperaturgebiet hätte herangezogen werden können. Die Zahl 471 ist immer noch aus einem Gebiet in der Umgebung der kritischen Temperatur berechnet, und die Konstante, die einem dem Wasserstoff bei Zimmertemperatur korrespondierenden Zustand entspricht, ist bestimmt größer. Wesentlich scheint uns das Ergebnis, daß die Abweichungen von der Sutherlandschen Formel nicht eine Eigentümlichkeit „tiefer" (Absolut-) Temperaturen ist, sondern daß sie eine Eigenart eines bestimmten Zustandsgebiets im korrespondierenden Maß ist.

---

[1]) W. Kopsch, Diss. Halle 1909.

Wie schon erwähnt und wie aus den von anderen Forschern bei niedrigen Temperaturen angestellten Versuchen zu entnehmen, müßte die Konstante C durch eine Temperaturfunktion ersetzt werden, wenn die Sutherlandsche Formel über ein großes Temperaturgebiet ihre Gültigkeit behalten soll. Ihr Wert muß bei Annäherung in das kritische Gebiet sinken. Wie an anderer Stelle schon gesagt, hat Fisher Abweichungen von der S-Formel auch bei hohen Temperaturen beobachtet. Seine Erklärung dafür erscheint uns aber nicht sehr wahrscheinlich (vgl. S. 337ff.).

Vielmehr erscheint es uns, daß auch bei hohen Temperaturen die S-Formel versagt. Aus Fishers Messungen an Luft bei 501,2° und 220,2° berechnen wir die Konstante C zu etwa 77. C müßte also für Luft zwischen den tiefen und hohen Temperaturen durch ein Maximum laufen, wo dann $dC/dT = 0$ wäre. In diesem Gebiet würde die Formel bei konstantem C eine gute Näherung geben. Das gleiche wäre aber auch für eine andere Interpolationsformel, deren Konstante angepaßt wäre, möglich. Gegen eine solche Auffassung sprechen auch nicht die zahlreichen Bestätigungen der Sutherlandschen Formel, denn

1. ist die Übereinstimmung keineswegs immer ganz befriedigend[1]),

2. wird die Formel mit der Methode der kleinsten Qua-

---

[1]) z. B. bei He; K. Schmitt, Diss. Halle 1909.

drate auf eine kleine Anzahl Messungen in einem nicht sehr ausgedehnten Temperaturgebiet verpaßt,

3. sind die gemessenen Reibungskoeffizienten einer *sehr* genauen Bestimmung nur schwer zugänglich, so daß die Temperaturkurven eine nicht unerhebliche Schwankungsbreite besitzen. Nach alledem halten wir für möglich, daß die Übereinstimmung der Sutherlandschen Formel mit dem Experiment noch nicht beweisend ist für die Richtigkeit der molekularen Vorstellungen, aus denen sie abgeleitet wurde.

Aus den Versuchen mit Gasgemischen wurden isotherme Reibungskoeffizient-Molenbruchdiagramme entnommen. Diese zeigen alle ein ausgeprägtes Maximum. Dadurch ist die Zahl der Beispiele, daß Gemische von Wasserstoff mit andern Gasen ein Maximum zeigen um einen neuen Fall vermehrt. Maxima sind außerdem noch beobachtet worden bei Wasserstoff-Kohlendioxyd, Wasserstoff-Ammoniak, Wasserstoff-Äthylen und bei Helium-Argon. Das von uns am Schwefeldioxyd beobachtete Maximum ist unter allen am ausgeprägtesten. Auffallend ist bei den Kurven bei allen Temperaturen der lineare Anstieg der inneren Reibung mit dem Wasserstoffgehalt bis beinahe zum Maximum, ebenso wie der sehr schroffe Abfall vom Maximum zum Wert des Wasserstoffs. Deutlich zu bemerken ist ferner die Verflachung des Maximums bei höheren Temperaturen, sowie die Abnahme der relativen und auch der absoluten Höhe. Eine Verschiebung sowohl des Maximums wie der Zusammensetzungen der Gemische, die die gleiche innere Reibung besitzen wie das Schwefeldioxyd, mit steigenden Temperaturen nach der SO_2-Seite, ist erkennbar. Wir vermuten, daß es möglich sein wird, durch Erhöhung der Temperatur das Maximum überhaupt zum Verschwinden zu bringen, bzw. bei Gaspaaren die ein solches nicht zeigen, es hervorzurufen durch Erniedrigung der Temperatur in das kritische Gebiet des einen Gases.

Um die Ergebnisse der Messungen am SO_2 mit Beobachtungen an anderen Gasen vergleichen zu können, haben wir die Kurven für H_2-CO_2, H_2-NH_3, H_2-C_2H_4. He-Ar, H_2-O_2 und H_2-N_2 im gleichen Maßstab aufgetragen. Die Daten sind aus Landolt-Börnstein entnommen. Der Kohlendioxydkurve Pulujs entspricht die Schwefeldioxydkurve bei 159°

ungefähr. Auch das Kurvenbild ist sich in großen Zügen ähnlich, wenn man bedenkt, daß der Unterschied der Reibungskoeffizienten von Schwefeldioxyd und Wasserstoff bei 159° viel größer ist als der von Kohlendioxyd und Wasserstoff bei Zimmertemperatur, und demgemäß der Abfall des SO_2 vom Maximum entsprechend schroffer ist. Der Vergleich der Ammoniakkurve mit der korrespondierenden SO_2-Kurve von etwa 45° ergibt ebenfalls auffallende Ähnlichkeit. Die Höhe des Maximums ist in beiden Fällen bedeutend, was wohl auch davon herrührt, daß Ammoniak und Schwefeldioxyd in ihren kritischen Temperaturen nahe beieinander liegen. Daß bei dem geringeren Unterschied zwischen der Reibung von Wasserstoff und Ammoniak der Abfall von Wasserstoff sanfter ist, ist nicht verwunderlich. Bei den Gemischen mit Sauerstoff und Stickstoff ist zwar kein Maximum vorhanden, aber die Abweichungen von der Mischungsregel sind doch groß. Aus diesen Vergleichen geht hervor, daß sich der korrespondierende Zustand zweier Gase auch im Reibungsmolenbruchdiagramm der Gemische mit Wasserstoff wiederspiegelt. Daneben behalten die Gase aber noch einen ausgeprägten individuellen Charakter, was schon daraus hervorgeht, daß sich der Wasserstoff bei korrespondierenden Temperaturen der andern Gase nicht in vergleichbaren Zuständen befindet.

Von Interesse scheint uns die Tatsache, daß der Temperaturkoeffizient der inneren Reibung der Gemische sich sehr an den des Schwefeldioxyds anschließt, bevor das Maximum erreicht ist, dagegen langsam zum Wasserstoffwert absinkt, wenn das Maximum überschritten ist, wie aus Tab. 5 hervorgeht.

Eine theoretische Beleuchtung verdienen die Messungen noch vom Standpunkte der kinetischen Gastheorie. Die Sutherlandsche Formel wird aus der Vorstellung von zwischen den Molekeln wirkenden Kräften hergeleitet. Doch ist diese Vorstellung nicht von Schwierigkeiten frei (Größe der Wirkungssphäre der Attraktionskräfte). Auch die Maxima haben der Theorie Schwierigkeiten bereitet. Formeln zur Darstellung der Beobachtung wurden entwickelt von Maxwell, Puluj, Thiesen, Sutherland u. a.[1]) Eine Verbesserung der

---

[1] Siehe Kuenen, Die Eigenschaften der Gase, S. 108ff.

Theorie wird erzielt durch Hereinrechnung der Persistenz, d. h. durch Berücksichtigung des Anteils der Bewegungsgröße eines Moleküls, der nach dem Zusammenstoß noch in der ursprünglichen Richtung erhalten bleibt. Wird noch die verschiedene Masse der Gasmolekeln beachtet, so gelangt man mühsam, aber ohne besondere Schwierigkeiten zu der komplizierten Formel:

$$\eta = 0{,}35\, n_1\, m_1\, \bar{n}_1\, l_1 f_1 + 0{,}35\, n_2 \cdot m_2\, \bar{n}_2\, l_2 f_2\,,$$

wobei f_1 von der Gestalt:

$$(1)\quad \frac{1}{1 - \frac{n_1 \pi s_1^2}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{C_1}{273}\right) l_1 \cdot 0{,}406 - \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1}} \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2}\, n_2 \pi s_2^2 \left(1 + \frac{C_{12}}{273}\right) l_1\, \vartheta_1}\,,$$

und f_2 ein analoger Ausdruck ist.

ϑ_1 und ϑ_2 sind Größen, durch die die Persistenz berücksichtigt wird.

$$\vartheta_1 = \frac{m_1}{2\,(m_1 + m_2)} + \frac{1}{4}\, \frac{m_1^2}{m_2^{1/2}\,(m_1 + m_2)^{3/2}} \log \frac{\sqrt{m_1 + m_2} + \sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1 + m_2} - \sqrt{m_2}}\ {}^{1)}.$$

Die Formel enthält außer den Konstanten der Einzelgase noch die Größe C_{12}, die aus den Beobachtungen berechnet werden muß, d. h. es steht eine Konstante zur Verpassung zur Verfügung. Die Formel stellt die Beobachtungen wenigstens qualitativ dar.

Damit ist aber die Frage, warum die einen Gaspaare Maxima ergeben, andere dagegen der Mischungsregel ungefähr folgen, nicht gelöst. Da in allen Fällen, in denen Maxima auftreten, Wasserstoff oder Helium die eine Komponente ist, kann man an einen Einfluß der kritischen Temperatur oder der Molekelmasse denken. SO_2, CO_2, C_2H_4 und NH_3 sind alles Gase, die von der Idealität stark abweichen. Auch geht aus unseren Beobachtungen ein Zurückgehen der Maxima mit Erhöhung der Temperatur hervor. Daß starke Abweichungen der einen Komponente jedoch nicht unbedingt notwendig sind, ergibt sich aus den Beobachtungen an Helium-Argon. Vielleicht kommt es entscheidend auf das Verhältnis der kritischen Temperatur beider Gase an. Dies würde auch eine Erklärung

---

1) Näheres siehe **Kuenen**, S. 111.

dafür geben, daß gerade Helium und Wasserstoff so ausgeprägte Maxima ergeben.

Ob große Verschiedenheiten der Molekelmassen von Bedeutung sind, wagen wir noch nicht zu entscheiden. Vom Gesichtspunkt der Persistenz aus wäre dies zu erwarten, doch sprechen die Beobachtungen an Ammoniak dagegen. Vielleicht überlagern sich die Einflüsse der Verschiedenheit der kritischen Temperaturen und der Molekelmassen.

§ 10. Ergebnisse.

1. Es wurde festgestellt, daß bei Gasen die Hagenbachsche Korrektion für die kinetische Energie anzubringen ist. Außerdem ist keine Wirkung der Rohrenden zu bemerken. Auch ganz kurze Rohre sind für Versuche unter Berücksichtigung der kinetischen Energie verwendbar.

2. Es wurde eine Korrektion zur Berücksichtigung der Abweichungen der Gase vom idealen Zustand angegeben.

3. Es wurden die Reibungskoeffizienten der Luft zwischen 14 und 199° kontrolliert, bzw. eine größere Zahl Messungen bei bisher noch nicht untersuchten Temperaturen gemacht. Dabei wurde die Sutherlandsche Formel einigermaßen bestätigt gefunden. Aus Messungen Fishers bei hohen Temperaturen wurde die Sutherlandsche Konstante zu 77 berechnet (115 bei mittleren Temperaturen). Die Sutherlandsche Konstante wurde als eine Temperaturfunktion erkannt, die bei mittleren Temperaturen durch ein Maximum läuft.

4. Der Temperaturkoeffizient der inneren Reibung des Schwefeldioxyds ist zwischen 14 und 199° ziemlich konstant. Das Schwefeldioxyd genügt der Sutherlandschen Formel nicht. Diese versagt offenbar in dem Maße, als Abweichungen vom idealen Gaszustand merklich werden.

5. An Gemischen von Schwefeldioxyd und Wasserstoff wurde ein Maximum beobachtet, welches sich bei Erhöhung der Temperatur verflacht und zu immer schwefeldioxydreicheren Gemischen rückt. Die Vergrößerung der inneren Reibung bei Gemischen durch Zusatz von Wasserstoff ist dem Wasserstoffmolenbruch bis zum Maximum ungefähr proportional. Der Temperaturkoeffizient der inneren Reibung der Gasgemische

schließt sich bis zum Maximum dem des Schwefeldioxyds eng an. Nach dem Maximum auf der Wasserstoffseite sinkt auch der Temperaturkoeffizient langsam zum Wasserstoff ab.

6. Es wurde wahrscheinlich gemacht, daß das Auftreten eines Maximums im Mischungsdiagramm vom Verhältnis der kritischen Temperaturen der beiden Komponenten abhängt. Inwieweit die innere Reibung von Gasen und Gasgemischen als korrespondierende Eigenschaft angesehen werden darf, wurde diskutiert, das Problem konnte aber nicht gelöst werden.

7. Die Arbeit hat zu einer bestimmten Problemstellung für die Fortsetzung der Untersuchungen geführt:

Übt das Verhältnis der kritischen Temperaturen der Komponenten eines Gasgemischs den entscheidenden Einfluß auf die Gestalt der Molenbruchdiagramme aus, oder ist hierfür die korrespondierende Temperatur des unidealeren Gases maßgebend.

Anlagen zu den §§ 1 und 3.

$\gamma = f(y\,z)$ sei eine Schar Zylinderflächen, auf denen die Lineargeschwindigkeit der Strömung nur von x abhänge (Äquigeschwindigkeitsflächen). Die Innenfläche des Rohrs gehört mit zu der Schar. Führt man als Koordinaten den Parameter der Schar und den der zugehörigen orthogonalen Trajektorienschar ein, so lauten die hydrodynamischen Gleichungen einfach:

$$\frac{dp}{dx} = \eta \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2} \cdot \left(\frac{\partial \gamma}{d l'}\right)^2,$$

wobei dl und dl' die Linienelemente auf der Schar γ und Trajektorienschar sind.

Durch Integration erst über die geschlossenen Kurven = konstant, dann über die Schar erhält man:

$$d l \cdot d l' \frac{dp}{dx} = \eta \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial l'} d l \cdot d \gamma$$

$$\eta \cdot \frac{\partial u}{\partial \gamma} \int \frac{\partial \gamma}{\partial l'} dl = \frac{dp}{dx} F.$$

Daraus schließlich:

$$V = t\int_{\gamma}^{\gamma_0} u\,dF$$

$$V = \frac{t}{\eta}\cdot\frac{dp}{dx}\cdot\int^{\gamma_0}\frac{\partial F}{\partial\gamma}\left(\int^{\gamma}\frac{F\,d\gamma}{\int\frac{\partial\gamma}{\partial l}\,dl}\right)d\gamma,$$

und durch partielle Integration:

$$V = -\frac{t}{\eta}\cdot\frac{dp}{dx}\int_{\gamma_R}^{\gamma_0}\frac{F^2\,d\gamma}{\int\frac{\partial\gamma}{\partial l}\,dl} = -\frac{t}{\eta}\cdot\frac{dp}{d\gamma}\varkappa'.$$

Ist α ein Proportionalitätsfaktor für die Dimensionen des Querschnitts, so ist

$$V = -\frac{t}{\eta}\cdot\frac{\alpha^4\,dp}{dx}\varkappa. \qquad \varkappa' = \alpha^4\cdot\varkappa.$$

Anlagen zu § 7.

§ 7 1 k). Die Temperatur im Thermostaten, die mit dem Beckmannthermometer verfolgt wird, wird mit T bezeichnet und bewege sich in der Nähe einer Temperatur T_1, die im Thermostat herrschte in dem Augenblick, wo der obere Quecksilbermeniskus die Marke m_1 passierte. Ist n die Anzahl der Mole Gas, die sich in der Kugel C befinden, und gehorche das Gas dem Gasgesetz (Abweichungen verursachen nur Fehler zweiter Ordnung), so ist:

$$n = \frac{p\,v}{R\,T}\,. \tag{1}$$

Ist die Molzahlgeschwindigkeit dn/dt im Zeitelement dt gleich ν, so ergibt die Integration der Poiseuilleschen Gleichung über die Rohrlänge:

$$\nu = \frac{\pi\,\varrho^4}{8\,\eta\,L}\cdot\frac{p^2 - p_0^2}{2\,R\,T_0}\,. \tag{2}$$

Aus der Zustandsgleichung ergibt sich ebenfalls ν in Abhängigkeit von p, T und v.

$$\nu = \frac{v}{RT}\cdot\frac{dp}{dt} + \frac{p}{RT}\,\frac{dv}{dt} - \frac{p\,v}{RT^2}\,\frac{dT}{dt}\,. \tag{3}$$

Das in der Kugel eingeschlossene Volumen $v = f(p)$ ist eine Funktion, die durch Vorversuche bestimmt wurde.

$$v = \frac{f + pf'}{RT}\frac{dp}{dt} - \frac{pf}{RT^2}\frac{dT}{dt}\,. \tag{4}$$

Und aus der Verbindung von 2 und 4

$$\frac{\pi\varrho^4}{8\eta L}\cdot\frac{p^2 - p_0^2}{2\,2\,T_0} = \frac{f + pf'}{RT}\cdot\frac{dp}{dt} - \frac{pf}{RT^2}\frac{dT}{dt}. \tag{5}$$

Wir setzen nun:

$$T = T_1 + (T - T_1),$$

dann ist:

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\pi\varrho^4}{8\eta L}\cdot\frac{p^2 - p_0^2}{2RT_0} = \frac{f + pf'}{RT_1}\cdot\frac{dp}{dt} &- \frac{(f + pf')(T - T_1)}{RT_1^2}\frac{dp}{dt} \\ &- \frac{pf}{RT_1^2}\frac{dT}{dt} + \varepsilon.\end{aligned}\right. \tag{6}$$

ε ist $\left(\frac{pf}{2T_1^2} - \frac{pf}{RT^2}\right)\frac{dT}{dt}$ und klein von zweiter Ordnung. (T ist auch eine Funktion des Drucks, da die Zeit der einzige Parameter ist.)

$$\frac{\pi\varrho^4}{8\eta L}t = \frac{2T_0}{T}\int\frac{f + pf'}{p^2 - p_0^2}dp - \frac{2T_0}{T_1^2}\int\frac{(f + pf')(T - T_1)dp}{p^2 - p_0^2} - \frac{2T_0}{T_1^2}\int\frac{pf}{p^2 - p_0^2}dT,$$

Ist t_0 die durch Korrektion des Fehlers reduzierte Zeit, so ist

$$\varkappa_{\text{rel}} = \frac{t - t_0}{t_0} = -\frac{\int\frac{f + pf'}{p^2 - p_0^2}(T - T_1)\,dp}{T_1\int\frac{f + pf'}{p^2 - p_0^2}dp} - \frac{\int\frac{pf}{p^2 - p_0^2}dT}{T_1\int\frac{f + pf'}{p^2 - p_0^2}dp},$$

wenn

$$\frac{\pi\varrho^4}{8\eta L}t_0 = \frac{2T_0}{T}\int\frac{f + pf'}{p^2 - p_0^2}dp$$

ist.

Die Integrale sind über die Drucke zu nehmen, wobei die Grenzen die den Marken m_1 und m_2 entsprechenden Drucke sind. Diese Grenzen sind immer gemeint, wenn keine anderen Grenzen besonders angegeben sind.

Der Absolutwert von $\varkappa_{\text{rel}} = |\varkappa_{\text{rel}}|$ ist dann:

$$|\varkappa_{\text{rel}}| \leqq \frac{1}{T_1}\frac{\int\left|\frac{f + pf'}{p^2 - p_0^2}\right||T - T_1|\,dp}{\int\frac{f + pf'}{p^2 - p_0^2}dp} + \frac{1}{T_1}\frac{\int\left|\frac{pf}{p^2 - p_0^2}\right||dT|}{\int\frac{f + pf'}{p^2 - p_0^2}dp}.$$

Da die unter den Integralen stehenden Ausdrücke positiv sind, ist um so mehr

$$|\varkappa_{\mathrm{rel}}| \leqq \frac{|(T - T_1)_{\max}}{T_1} + \frac{1}{T_1} \frac{\left|\frac{p f}{p^2 - p_0^2}\right|_{\max}}{\int \frac{f + p f'}{p^2 - p_0^2} \, d p} 2 \, |T - T_1|_{\max} .$$

Der Index max bedeutet, daß der größte Zahlwert, den die Funktion im Integrationsgebiet annimmt, zu setzen ist.

$$\int |d T| < 2 \, |T - T_1|_{\max} ,$$

wenn nicht mehr als eine Temperaturumkehr stattfindet.

Durch graphische Integration erhalten wir:

$$\int \frac{f + p f'}{p^2 - p_0^2} \, d p = 0{,}3675 \qquad \left|\frac{p f}{p^2 - p_0^2}\right| < 0{,}30 .$$

Folgende Tabelle gibt an, welche Werte $|\varkappa_{\mathrm{rel}}|$ nicht übersteigen kann, wenn die Temperatur um die angegebene Zahl Grade schwankt.

$\|T - T_1\|_{\max}$	1	0,5	0,2	0,1	0,05
$\|\varkappa\|$	0,95 %	0,47 %	0,19 %	0,095 %	0,047 %

Es ist ausreichend, wenn die Temperatur des Ausflußapparates auf 0,05° C konstant ist. Da die Fehler in Wirklichkeit bedeutend geringer sind, als obige Schranke angibt, genügt wohl eine Konstanz auf 0,1°.

§ 7, 1 l). Das Volumen zwischen der Marke m_2 und dem Beginn der Kapillaren sei φ (= 13,6 ccm), dessen mittlere Temperatur T_φ sei. Die Gase seien ideal (da Abweichungen im kleinen Volumen φ nur Fehler zweiter Ordnung ausmachen). Die in Kugel C und φ enthaltene Molzahl Gas ist:

$$n = \frac{p v}{R T} + \frac{p \varphi}{R T_\varphi} . \tag{1}$$

Die Temperatur T_φ soll zunächst konstant gedacht werden. Dann ist:

$$v = \frac{\pi \varrho^4}{8 \eta L} \cdot \frac{p^2 - p_0^2}{2 R T_0} \tag{2}$$

durch Differentiieren von (1)

$$v = \frac{f + p f'}{R T} \frac{d p}{d t} + \frac{\varphi}{R T_\varphi} \cdot \frac{d p}{d t} \tag{3}$$

in Analogie zu früheren Entwicklungen:

$$\frac{\pi \varrho^4}{8\,\eta\, L}\, t = \frac{2\,T_0}{T}\int \frac{f + p f'}{p^2 - p_0^2}\, d p + \frac{2\,T_0\,\varphi}{T_\varphi}\int \frac{d p}{p^2 - p_0^2}$$

$$\varkappa_{\text{rel}} = \frac{\varphi\, T_1}{T_\varphi}\, \frac{\int \frac{d p}{p^2 - p_0^2}}{\int \frac{f + p f}{p^2 - p_0^2}\, d p}\,.$$

Der Wert der Integrale wird graphisch ermittelt

$$\int \frac{d p}{p^2 - p_0^2} = \frac{0{,}459}{2\,p_0} \qquad \int \frac{f + p f'}{p^2 - p_0^2}\, d p = 0{,}3675$$

$$\varkappa_{\text{rel}} = 0{,}00125\, \frac{\varphi\, T_1}{2\, T_\varphi}\,,$$

die anzubringende Korrektion beträgt in Promille rd. $0{,}6 \cdot \varphi$.

Diese Korrektion ist beträchtlich, fällt aber bei Relativmessungen heraus, weshalb sie von der folgenden abgetrennt wurde.

Im allgemeinen wird T_φ Zimmertemperatur sein. Ebenso wie Schwankungen der Temperatur des Ausflußapparates während eines Versuches die Fehler unter k hervorrufen können, verursachen Schwankungen der Zimmertemperatur ähnliche. Zwar ist φ bedeutend kleiner als das Volumen der Kugel C. Da aber die Rohrstücke nicht in einem Thermostat versenkt sind, können die Temperaturschwankungen größere Werte annehmen, so daß eine Abschätzung der möglichen Fehler doch notwendig ist. Die Zimmertemperatur T_φ bewege sich in der Nähe von $T_{\varphi,1}$. Die Temperatur im Ausflußapparat sei dauernd T. Dann ist:

$$n = \frac{p\, v}{R\, T} + \frac{p\, \varphi}{R\, T_\varphi}\,,$$

durch Differentiieren erhält man

$$v = \frac{f + p f'}{R\, T}\, \frac{d p}{d t} + \frac{\varphi}{R\, T_\varphi} \cdot \frac{d p}{d t} - \frac{p\, \varphi}{R\, T_\varphi^2} \cdot \frac{d\, T_\varphi}{d t}$$

nun genau wie vorher:

$$T_\varphi = T_{\varphi,1} + (T_\varphi - T_{\varphi,1})\,,$$

man erhält schließlich:

$$\varkappa_{\text{rel}} = \frac{\varphi\, T}{T_{\varphi,1}^2}\, \frac{\int \frac{T_\varphi - T_{\varphi 1}}{p^2 - p_0^2}\, d p}{\int \frac{f + p f'}{p^2 - p_0^2}\, d p} - \frac{\varphi \cdot T}{T_{\varphi,1}}\, \frac{\int \frac{p\, d\, T_\varphi}{p^2 - p_0^2}}{\int \frac{f + p f'}{p^2 - p_0^2}\, d p}\,.$$

Im Nenner kann das Glied

$$\frac{\varphi}{2\,T_{\varphi,1}}\int\frac{dp}{p^2-p_0^2}$$

neben

$$\int\frac{f+pf'}{p^2-p_0^2}\,dp$$

weggelassen werden, da es nur klein ist.

$$|\varkappa_{\mathrm{rel}}| \leqq \frac{\dfrac{T}{T_{\varphi,1}}\,\dfrac{|T_\varphi - T_{\varphi,1}|_{\max}}{T_{\varphi,1}}\displaystyle\int\frac{dp}{p^2-p_0^2}}{\displaystyle\int\frac{f+pf'}{p^2-p_0^2}\,dp}$$

$$+\frac{\dfrac{2\,T\,|T_\varphi - T_{\varphi,1}|_{\max}}{T_{\varphi,1}^2}\left|\dfrac{p}{p^2-p_0^2}\right|_{\max}}{\displaystyle\int\frac{f+pf'}{p^2-p_0^2}\,dp}.$$

Die Integrale bestimmen sich zu:

$$\int\frac{f+pf'}{p^2-p_0^2}\,dp = 0{,}3675 \qquad \int\frac{dp}{p^2-p_0^2} = \frac{0{,}459}{2\,p_0}.$$

$\left.\dfrac{p}{p^2-p_0^2}\right|_{\max}$ beträgt 0,004. Man erhält die Ungleichung:

$$|\varkappa_{\mathrm{rel}}| \leqq \frac{\varphi\,T}{T_{\varphi,1}^2}\,|T_\varphi - T_{\varphi,1}|_{\max}\left(\frac{\dfrac{0{,}459}{2\,p_0}+0{,}008}{0{,}3675}\right),$$

setzt man $p_0 = 760$ mm und $T \sim T_{\varphi,1}$, so wird:

$$|\varkappa_{\mathrm{rel}}| \leqq \varphi\,\frac{|T_\varphi - T_{\varphi,1}|_{\max}}{T_{\varphi,1}}\,0{,}0226,$$

für $T_{\varphi,1} = 290^\circ$ ergibt sich folgende Fehlertabelle:

$\lvert T_\varphi - T_{\varphi,1}\rvert_{\max}$	0,5°	1°	2°	3°
$\varphi = 10$ ccm	0,039 %	0,078 %	0,156 %	0,235 %
$\varphi = 20$ „	0,078 %	0,156 %	0,312 %	0,470 %

Da die Fehler sicher kleiner sind als die Schätzung, bleiben sie unwesentlich, so lange die Schwankungen der Zimmertemperatur unter 1,5° bleiben.

§ 7, 1. m). Barometerkorrektion.

Das für die Auswertung der Versuche wichtige bestimmte Integral $\int\limits_{p_a}^{p_t} \frac{f + p f'}{p^2 - p_0^2} d p$ mit den Anfangs- und Enddrucken als Grenzen, hängt vom Barometerstand p_0 ab, wobei p_0 für die Integration konstant ist.

Setzt man $p_0 = 760 + \beta \, (\beta \gtreqless 0)$, und werde 760 mm mit p_{00} bezeichnet, so kann das Integral als Funktion von p_0 nach Taylor entwickelt werden. Wir berücksichtigen nur das erste Glied der Entwicklung.

$$F(p_0) = F(p_{00}) + \beta F'(p_{00}).$$

Die relative Korrektion ist einfach:

$$\varkappa_{\text{rel}} = \beta \frac{F'(p_{00})}{F(p_{00})}$$

$$F'(p_{00}) = \int \frac{f' d p}{p^2 - p^2_{00}} - 2 \int \frac{f + p f'}{p^2 - p_0^2} \cdot \frac{d p}{p + p_0}$$

durch Einsetzen der graphisch ermittelten Integrale:

$$\int \frac{f' d p}{p^2 - p^2_{00}} = 0{,}0003775 \quad \text{und} \quad \int \frac{f + p f'}{p^2 - p_0^2} \, \frac{d p}{p + p_0} = 0{,}00022$$

$$\varkappa_{\text{rel}} = 0{,}00017 \, \beta .$$

Die Korrektion beträgt 0,017 % für 1 mm und ist zu addieren, wenn der Barometerstand höher als 760 mm ist.

§ 7, 3 a. Abweichungen vom idealen Gaszustand.

Das Gasgesetz wird ersetzt durch die van der Waalssche Zustandsgleichung:

$$\left(p + \frac{a n^2}{v^2}\right) \left(\frac{v}{n} - b\right) = R T.$$

Setzt man im Attraktionsglied unter Vernachlässigung aller Größen zweiter Ordnung $n = \frac{p v}{R T}$ und löst nach n auf, so erhält man

$$n = \frac{v}{b + \frac{R T}{p} - \frac{a}{R T}},$$

nach der Poiseuilleschen Gleichung ist:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\eta}{8}\,\frac{\varrho^4}{\eta}\cdot\frac{dp}{dl} \qquad\qquad \frac{dn}{dt} = \nu$$

$\nu\,dt$ ist die im Zeitelement dt ausgeströmte Molzahl Gas.

$$\nu\,dt = \frac{\pi}{8}\,\frac{\varrho^4}{\eta}\cdot\frac{dp}{dl}\cdot\frac{dt}{\frac{RT}{p} + b - \frac{a}{RT}}$$

$$\nu = \frac{\pi\varrho^4}{8\eta L}\int\frac{dp}{\frac{RT_0}{p} + b_0 - \frac{a_0}{RT_0}} = \frac{\pi\varrho^4}{8\eta L}\int\frac{p\,dp}{A_0 p_0 + B_0}.$$

Setzt man zur Abkürzung (T_0 Temperatur der Kapillaren, T die des Ausflußapparates):

$$A = b - \frac{a}{RT},\ A_0 = b_0 - \frac{a_0}{RT_0},\ B = RT;\ B_0 = RT_0,$$

so erhält man durch Integration:

$$\nu = \frac{\pi\varrho^4}{8\eta L}\left[\frac{p^2 - p_0^2}{2B_0} - \frac{A_0}{3B_0^2}(p^3 - p_0^3)\right].$$

ν kann man auch durch Differentiieren der Zustandsgleichung erhalten:

$$\nu = \frac{f + pf'}{B}\,\frac{dp}{dt} - \frac{A}{B^2}\,p(2f + pf')\frac{dp}{dt},$$

durch Verbindung beider Gleichungen für ν ergibt sich:

$$\frac{\pi\varrho^4}{8\eta L}t = \int\frac{(f + pf')\,dp}{B\left[\frac{p^2 - p_0^2}{2B_0} - \frac{A_0}{3B_0^2}(p^3 - p_0^3)\right]} - \frac{A}{B^2}\int\frac{p(2f + pf')\,dp}{\left[\frac{p^2 - p_0^2}{2B_0} - \frac{A_0}{3B_0^2}(p^3 - p_0^3)\right]},$$

für eine erste Näherung genügt:

$$\frac{\pi\varrho^4}{8\eta L}t = \frac{2B_0}{B}\int\frac{f + pf'}{p^2 - p_0^2}\,dp + \frac{4A_0}{3B}\int\frac{f + pf'}{(p^2 - p_0^2)^2}(p^3 - p_0^3)\,dp - \frac{2AB_0}{B^2}\int\frac{p(2f + pf')\,dp}{p^2 - p_0^2}$$

$$\varkappa_{\mathrm{rel}} = -\frac{\frac{2}{3}\,\frac{A_0}{B_0}\int\frac{f + pf'}{(p^2 - p_0^2)}(p^3 - p_0^3)\,dp}{\int\left(\frac{f + pf'}{p^2 - p_0^2}\right)dp} + \frac{A}{B}\cdot\frac{\int\frac{p(2f + pf')}{p^2 - p_0^2}\,dp}{\int\frac{f + pf'}{p^2 - p_0^2}\,dp}.$$

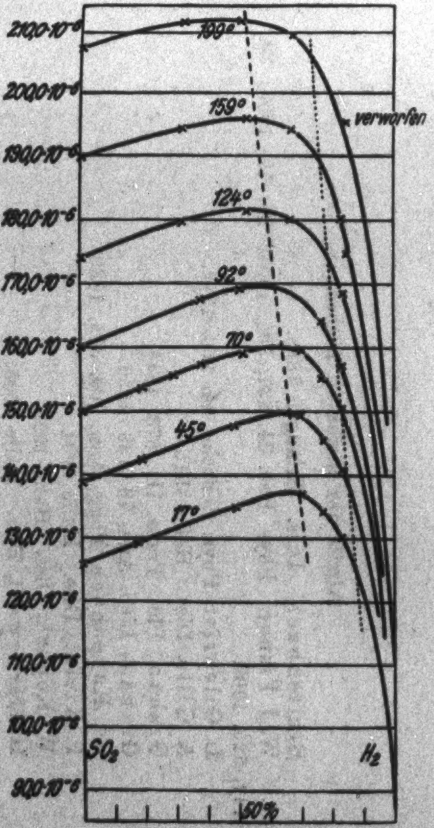


Fig. 4.
Schwefeldioxyd–Wasserstoff.

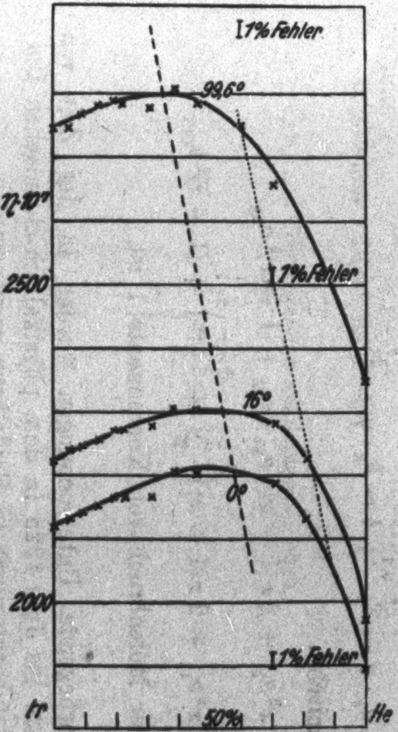


Fig. 5.
Helium–Argon (nach Tänzler).

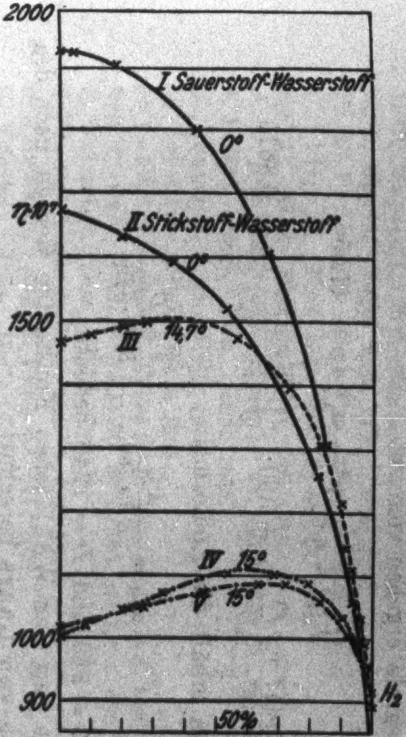


Fig. 6.
II. Stickstoff–Wasserstoff (Kleint).
III. Kohlendioxyd–Wasserst (Puluj).
IV. Ammoniak–Wasserst. (Thomsen).
V. Äthylen–Wasserstoff (Thomsen).

Die Integrale ergeben sich zu:

$$\int \frac{f + p f'}{(p^2 - p_0^2)^2} (p^3 - p_0^3)\, d p = 472{,}5$$

$$\int \frac{p(2 f + p f')}{(p^2 - p_0^2)}\, d p = 360; \quad \int \frac{(f + p f')}{(p^2 - p_0^2)}\, d p = 0{,}3675$$

und man erhält die Endformel:

$$\varkappa_{\mathrm{rel}} = \frac{A\, C}{R\, T \cdot 760} - \frac{2\, A_0\, D}{3\, R\, T_0 \cdot 760},$$

wobei $C = 980$ und $D = 1240$ bedeuten.

Die van der Waalsschen Konstanten werden nach den Angaben van Laars berechnet:

$$a = a_k \cdot \varphi \cdot e^{\frac{T_k}{T} - 1}; \; b = b_k \cdot \varphi \cdot e^{\frac{T_k}{T} - 1},$$

für Gemische:

$$a = x^2 a_{11} + 2\, x (1 - x) \sqrt{a_{11} \cdot a_{22}} + (1 - x)^2 a_{22}$$

$$b = x^2 b_{11} + 2\, x (1 - x) \left(\frac{\sqrt[3]{b_{11}}}{2} + \frac{\sqrt[3]{b_{22}}}{2} \right)^3 + (1 - x)^2 b_{22},$$

wo x der Molenbruch von Komponente 1 ist.

Vorliegende Untersuchungen wurden in der Zeit von Mai 1924 bis Juni 1925 in dem physikalisch-chemischen Universitätslaboratoriums in Heidelberg vorgenommen.

Abriß der zitierten Literatur.

Breitenbach, Diss. Erlangen 1898.

W. J. Fisher, Phys. Rev. **24**. 237, 385. 1907; **28**. 73. 1909; **29**. 147, 325. 1909.

L. Gilchrist, Phys. Zeitschr. **14**. 160. 1913.

A. Gille, Diss. Halle 1915.

Graham, Phil. Trans. III. 573. 1846.

Graham, Lieb. Ann. **76**. 138. 1850.

Ed. Hagenbach, Pogg. Ann. **109**. 385. 1860.

F. Kleint, Diss. Halle 1904.

W. Kopsch, Diss. Halle 1909.

H. Markowski, Diss. Halle 1903.

J. Cl. Maxwell, Phil. Mag. (4) 19. 19. 1860.
O. E. Meyer, Pogg. Ann. 148. 1, 203. 1873.
Fr. M. Pedersen, Phys. Rev. 25. 225. 1907.
P. Philipps, Proc. Roy. Soc. (A) 87. 48. 1912.
Puluj, Wien. Ber. (2) 79. 97, 745. 1878.
A. O. Rankine, Phys. Zeitschr. 11. 497. 1910; 11. 745. 1910.
I. F. Schierloh, Diss. Halle 1908.
K. Schmitt, Diss. Halle 1909.
H. Schultze, Diss. Halle 1901.
H. Schultze, Ann. d. Phys. (4) 5. 140. 1901; (4) 6. 302. 1901.
Sutherland, Phil. Mag. (5) 36. 507. 1893; (6) 14. 1. 1907.
P. Taenzler, Diss. Halle 1906.
Thiesen, Verh. d. Phys. Ges. 8. 236. 306.
E. Thomsen, Ann. d. Phys. 40. 971. 1911.
G. Voelker, Diss. Halle 1910.
G. Zemplén, Ann. d. Phys. 19. 783. 1906; 29. 869. 1909; 38. 71. 1912.
O. Zimmer, Diss. Halle 1911.

(Eingegangen 20. September 1925.)

2. *Das elektrostatische Feld einer Triode*[1]; *von G. J. Elias, Balth. van der Pol Jr. und B. D. H. Tellegen.*

Erster Teil.

Von G. J. Elias.

v. Laue[2]) hat dieses Feld betrachtet für den Fall, daß die Gitterdrähte parallel zum Glühdraht laufen und die Schnittpunkte dieser Drähte mit einer Fläche, senkrecht auf dem Glühdraht, die Eckpunkte eines regelmäßigen Vielecks sind. In diesem Falle kann das Problem als ein zweidimensionales aufgefaßt werden.

Wenn jedoch das Gitter aus einem Draht besteht, welcher schraubenförmig um den Glühdraht gewunden ist, so ist die Berechnung des Feldes ziemlich leicht, wenn die Konfiguration der Elektroden wie folgt idealisiert wird:

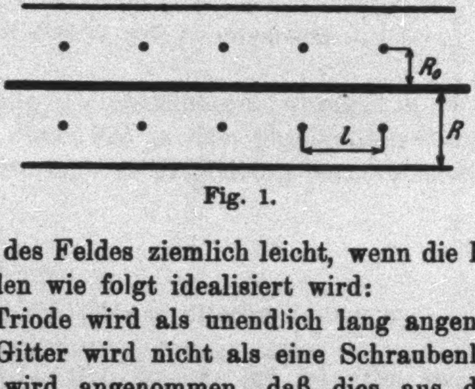


Fig. 1.

1. die Triode wird als unendlich lang angenommen;

2. das Gitter wird nicht als eine Schraubenlinie gedacht, sondern es wird angenommen, daß dies aus dünnen kreisförmigen Drähten besteht, welche in äquidistanten Flächen, senkrecht auf dem Glühdraht, gelegen sind, wobei die Mittel-

---

[1] Dieser Artikel ist die Übersetzung dreier nur unwesentlich abgeänderter Aufsätze, welche im „Tydschrift van het Nederlandsch Radiogenootschap" erschienen sind: G. J. Elias, II. S. 23. 1923; Balth. v. d. Pol Jr, II. S. 53. 1924; B. D. H. Tellegen, II. S. 95. 1925.

[2] M. von Laue, Ann. d. Phys. 59. S. 465. 1919.

punkte der Kreise sich auf diesem Draht befinden. Ein Durchschnitt des Glühdrahtes wird sich also gestalten, wie in Fig. 1 dargestellt.

Die nachfolgenden Bezeichnungen sollen benutzt werden:

R Radius-Anode,
R_0 Radius-Gitter,
ϱ_0 Radius-Gitterdrähte,
ϱ Radius-Glühdraht,
l Abstand-Flächen der Gitterdrähte.

Die Koordinate in der Richtung der Röhrenachse sei x, wobei der Ursprung im Schnittpunkt des Glühdrahtes mit der Fläche eines Gitterdrahtes gedacht wird. Ein Punkt des axialsymmetrischen Feldes ist durch x und den Abstand r zum Glühdraht bestimmt.

Die Ladung jeder Windung des Gitterdrahtes sei Q_0. Die Flächendichte der Ladung auf dem Glühdraht läßt sich durch eine Fourierscche Reihe darstellen:

$$\omega_1 = b_0 + b_1 \cos\frac{2\pi x}{l} + \cdots + b_n \cos\frac{2\pi n x}{l} + \cdots, \tag{1}$$

ebenso die auf der Anode durch:

$$\omega_2 = B_0 + B_1 \cos\frac{2\pi x}{l} + \cdots + B_n \cos\frac{2\pi n x}{l} + \cdots \tag{2}$$

In diesen Reihen kommt nur die Cosinusfunktion vor, weil in beiden Fällen für gleiche und entgegengesetzte Werte von x die Dichte denselben Wert hat.

Die Potentiale der Ladungsdichten b_0 und B_0 folgen aus dem Potential einer geladenen Linie der Länge $2a$ mit einer Ladung λ per Längeneinheit. Dieses beträgt in einem Punkt in einem Abstand von der Mitte der Linie, welche klein ist in Beziehung auf a:

$$2\lambda \ln\frac{2a}{r}\,.$$

Hierin bedeutet r den Abstand des betrachteten Punktes zur geladenen Linie. Dies gibt für das Potential von b_0:

$$\left\{\begin{aligned} &V_{10} = 4\pi\varrho b_0 \ln\frac{2x_\infty}{r} \\ &\text{und von } B_0: \\ &V_{20} = 4\pi R B_0 \ln\frac{2x_\infty}{R}, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

worin x_∞ den absoluten Wert von x im Unendlichen vorstellt.

Um das Potential der Ladungsdichte $b_n \cos \frac{2\pi n x}{l}$ auf dem Glühdraht in einem Punkt (x, r) außerhalb desselben zu berechnen, soll zuerst das Potential einer linienförmigen Ladung, welche pro Längeneinheit $\varrho \, d\varphi \, b_n \cos \frac{2\pi n x}{l}$ beträgt, berechnet

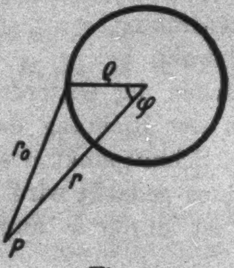


Fig. 2.

werden und dann nach φ integriert werden, wie dies aus Fig. 2 ersichtlich ist.

Das Potential der linienförmigen Ladung beträgt:

$$\left\{\begin{aligned} &\varrho \, d\varphi \, b_n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \frac{2\pi n x_0}{l} \, d x_0}{\sqrt{r_0^2 + (x_0 - x)^2}} = \varrho \, d\varphi \, b_n \cos \frac{2\pi n x}{l} \, . \\ &\qquad \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \frac{2\pi n y}{l} \, d y}{\sqrt{r_0^2 + y^2}} = \varrho \, d\varphi \, b_n \cos \frac{2\pi n x}{l} \pi \, i \, H_0^{(1)} \left(\frac{2\pi i n r_0}{l}\right)^{1)}, \end{aligned}\right.$$

worin $H_0^{(1)}$ die **Hankelsche** Funktion erster Art der nullten Ordnung darstellt, während bei der Integration gesetzt ist:

$$x_0 - x = y.$$

Bei der Integration nach φ muß substituiert werden:

$$r_0^2 = r^2 + \varrho^2 - 2 r \varrho \cos \varphi;$$

weiter kann geschrieben werden:

$$(4) \quad \left\{\begin{aligned} &H_0^{(1)}\left(\frac{2\pi i n r_0}{l}\right) = H_0^{(1)}\left(\frac{2\pi i n r}{l}\right) J_0\left(\frac{2\pi i n \varrho}{l}\right) + \\ &+ 2 \sum_{s=1}^{\infty} H_s^{(1)}\left(\frac{2\pi i n r}{l}\right) J_s\left(\frac{2\pi i n \varrho}{l}\right) \cos s\varphi , \end{aligned}\right.$$

---

1) Vgl. **N. Nielsen**, Handbuch der Cylinderfunktionen, Leipzig 1904, S. 221, Formel (7).

eine Entwicklung gültig für $r > \varrho$.1) Bei Anwendung hiervon gibt die Integration nach φ für das Potential der Flächenladung $b_n \cos\frac{2\pi n x}{l}$ im Punkte (x, r):

$$V_{1n} = 2\pi^2 i \varrho b_n \cos\frac{2\pi n x}{l} H_0^{(1)}\left(\frac{2\pi i n r}{l}\right) J_0\left(\frac{2\pi i n \varrho}{l}\right). \tag{5}$$

In derselben Weise kann man vorgehen um das Potential der Flächendichte $B_n \cos\frac{2\pi n x}{l}$ auf der Anode in einem Punkte (x, r) innerhalb des Zylinders mit einem Radius R zu berechnen. Das Potential der linienförmigen Ladung, welche pro Längeneinheit $R\,d\varphi\,B_n \cos\frac{2\pi n x}{l}$ beträgt, wird, genau wie oben:

$$R\,d\varphi\,B_n \cos\frac{2\pi n x}{l}\,\pi i H_0^{(1)}\left(\frac{2\pi i n r_0}{l}\right).$$

Hierin ist $r_0^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi$.

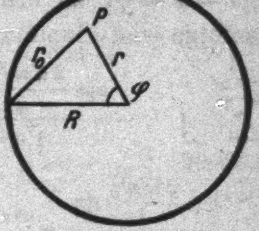


Fig. 3.

Wird die Entwicklung (4) angewendet, gültig für $R > r$, so gibt die Integration nach φ für das Potential:

$$V_{2n} = 2\pi^2 i R B_n \cos\frac{2\pi n x}{l} H_0^{(1)}\left(\frac{2\pi i n R}{l}\right) J_0\left(\frac{2\pi i n r}{l}\right). \tag{6}$$

Zur Berechnung des Potentials der Ladungen Q_0, welche sich auf den kreisförmigen Gitterdrähten befinden, kann zuerst das Potential der unendlich kleinen Teilchen $R_0\,d\varphi$ der Kreise, welche auf einer Linie parallel zum Glühdraht gelegen sind, betrachtet werden. Wenn der Abstand des betrachteten Feldpunktes zur erwähnten Linie r_0 ist, so ist das Potential dieser Teilchen:

$$\frac{Q_0\,d\varphi}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{1}{\sqrt{r_0^2+(ml-x)^2}}.$$

---

1) Vgl. N. Nielsen, S. 280.

Wir können schreiben:

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{1}{\sqrt{r_0^2+(ml-x)^2}}=\\&\qquad=\beta_0+\beta_1\cos\frac{2\pi x}{l}+\cdots+\beta_n\cos\frac{2\pi n x}{l}+\cdots\end{aligned}\right.$$

weil dieser Ausdruck denselben Wert haben muß für gleiche und entgegengesetzte Werte von x.

Für den Koeffizient β_n gilt:

$$\beta_n=\frac{2}{l}\int_0^l\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{\cos\frac{2\pi n x}{l}\,dx}{\sqrt{r_0^2+(ml-x)^2}},$$

während

$$\beta_0=\frac{1}{l}\int_0^l\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{dx}{\sqrt{r_0^2+(ml-x)^2}}.$$

Schreiben wir $ml-x=y$, so erhalten wir, nach Verwechselung der Reihenfolge von Summation und Integration:

$$\left\{\begin{aligned}\beta_n&=\frac{2}{l}\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\int_{(m-1)l}^{ml}\frac{\cos\frac{2\pi n(y-ml)}{l}\,dy}{\sqrt{r_0^2+y^2}}=\\&=\frac{2}{l}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\frac{2\pi n y}{l}\,dy}{\sqrt{r_0^2+y^2}}=\frac{2\pi i}{l}H_0^{(1)}\left(\frac{2\pi i n r_0}{l}\right).\end{aligned}\right.$$

Ebenso:

$$\beta_0=\frac{2}{l}\ln\frac{2x_\infty}{r_0}.$$

Das Potential der kleinen Kreisbögen $R_0\,d\varphi$ der kreisförmigen Gitterdrähte wird also:

$$\frac{Q_0\,d\varphi}{\pi l}\left[\ln\frac{2x_\infty}{r_0}+\pi i\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{2\pi n x}{l}\,H_0^{(1)}\left(\frac{2\pi i n r_0}{l}\right)\right].$$

Die Integration nach φ geschieht genau wie oben mittels der Reihenentwicklung (4). In dieser Weise erhalten wir für einen Punkt außerhalb des Gitters, für welchen

$$r_0^2=r^2+R_0^2-2rR_0\cos\varphi\qquad\text{und}\qquad r>R_0:$$

$$\text{(7)}\qquad\left\{\begin{aligned}V_{80}&=\frac{2Q_0}{l}\left[\ln\frac{2x_\infty}{r}+\right.\\&\left.\quad+\pi i\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{2\pi n x}{l}\,H_0^{(1)}\left(\frac{2\pi i n r}{l}\right)J_0\left(\frac{2\pi i n R_0}{l}\right)\right].\end{aligned}\right.$$

Ebenso wird für das Potential für einen Punkt innerhalb des Gitters, wo $r < R_0$, gefunden:

$$\left\{\begin{aligned} V_{30} = \frac{2\,Q_0}{l}\Big[\ln \frac{2\,x_\infty}{R_0} &+ \\ &+ \pi\, i \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2\,\pi\, n\, x}{l}\, H_0^{(1)}\left(\frac{2\,\pi\, i\, n\, R_0}{l}\right) J_0\left(\frac{2\,\pi\, i\, n\, r}{l}\right)\Big]. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Die Randbedingung für die Potentiale ist nun diese, daß das Potential am Glühdraht und an der Anode einen konstanten Wert hat. Durch Anwendung der Ausdrücke (3), (5), (6), (7) und (8) erhält man für diese Potentiale bzw.:

$$\left\{\begin{aligned} V_1 = 4\,\pi\,\varrho\, b_0 \ln \frac{2\,x_\infty}{\varrho} &+ \\ &+ 2\,\pi^2\, i\,\varrho \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{2\,\pi\, n\, x}{l}\, H_0^{(1)}\left(\frac{2\,\pi\, i\, n\, \varrho}{l}\right) J_0\left(\frac{2\,\pi\, i\, n\, \varrho}{l}\right) + \\ &+ 4\,\pi\, R\, B_0 \ln \frac{2\,x_\infty}{R} + \\ &+ 2\,\pi^2\, i\, R \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \frac{2\,\pi\, n\, x}{l}\, H_0^{(1)}\left(\frac{2\,\pi\, i\, n\, R}{l}\right) J_0\left(\frac{2\,\pi\, i\, n\, \varrho}{l}\right) + \\ &+ \frac{2\,Q_0}{l}\Big[\ln \frac{2\,x_\infty}{R_0} + \\ &+ \pi\, i \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2\,\pi\, n\, x}{l}\, H_0^{(1)}\left(\frac{2\,\pi\, i\, n\, R_0}{l}\right) J_0\left(\frac{2\,\pi\, i\, n\, \varrho}{l}\right)\Big] + C. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

$$\left\{\begin{aligned} V_2 = 4\,\pi\,\varrho\, b_0 \ln \frac{2\,x_\infty}{R} &+ \\ &+ 2\,\pi^2\, i\,\varrho \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{2\,\pi\, n\, x}{l}\, H_0^{(1)}\left(\frac{2\,\pi\, i\, n\, R}{l}\right) J_0\left(\frac{2\,\pi\, i\, n\, \varrho}{l}\right) + \\ &+ 4\,\pi\, R\, B_0 \ln \frac{2\,x_\infty}{R} + \\ &+ 2\,\pi^2\, i\, R \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \frac{2\,\pi\, n\, x}{l}\, H_0^{(1)}\left(\frac{2\pi i n R}{l}\right) J_0\left(\frac{2\pi i n R}{l}\right) + \\ &+ \frac{2\,Q_0}{l}\Big[\ln \frac{2\,x_\infty}{R} + \\ &+ \pi\, i \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2\,\pi\, n\, x}{l}\, H_0^{(1)}\left(\frac{2\,\pi\, i\, n\, R}{l}\right) J_0\left(\frac{2\,\pi\, i\, n\, R_0}{l}\right)\Big] + C. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Hierin ist C eine willkürliche additive Konstante. Weil die Gleichungen (9) und (10) identisch erfüllt sein müssen für alle Werte von x und die Potentiale endlich bleiben müssen, bekommt man:

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
&2\pi\varrho b_0 + 2\pi R B_0 + \frac{Q_0}{l} = 0,\\
&V_1 = -4\pi\varrho b_0 \ln\varrho - 4\pi R B_0 \ln R - \frac{2Q_0}{l}\ln R_0 + C,\\
&V_2 = C,\\
&\pi\varrho b_n H_0^{(1)}\left(\frac{2\pi i n\varrho}{l}\right) +\\
&\qquad + \pi R B_n H_0^{(1)}\left(\frac{2\pi i n R}{l}\right) + \frac{Q_0}{l} H_0^{(1)}\left(\frac{2\pi i n R_0}{l}\right) = 0,\\
&\pi\varrho b_n J_0\left(\frac{2\pi i n\varrho}{l}\right) +\\
&\qquad + \pi R B_n J_0\left(\frac{2\pi i n R}{l}\right) + \frac{Q_0}{l} J_0\left(\frac{2\pi i n R_0}{l}\right) = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Diese Gleichungen genügen zur Bestimmung der unbekannten Größen, wenn Q_0 als bekannt angenommen wird. Letztere Größe ist aber bekannt, sobald V_3 gegeben ist. Um V_3 mittels der verschiedenen Ladungen auszudrücken, kann nicht einfach $r = R_0$ gesetzt werden, weil (7) bzw. (8) in diesem Falle unendlich groß werden würde. Um dies zu vermeiden kann in (7) gesetzt werden: $x = 0$, $r = R_0 + \varrho_0$.

Der in dieser Weise erhaltene Ausdruck für V_3 wird dann nicht ganz exakt sein, weil die Ladung Q_0 sich in Wirklichkeit nicht auf einem Kreis mit Radius R_0 befindet, wie annähernd angenommen war, sondern auf einer Toroide, wobei der Radius des sich drehenden Kreises ϱ_0 beträgt. Der Ausdruck für V_3 wird jedoch desto exakter sein, je kleiner ϱ_0/R_0 ist. In den Ausdrücken (5) und (6) kann mit derselben Vernachlässigung $r = R_0$ gesetzt werden.

In dieser Weise erhalten wir:

$$
(12)\quad \left\{
\begin{aligned}
V_3 = {} & 4\pi\varrho b_0 \ln\frac{2x_\infty}{R_0} + 2\pi^2 i\varrho\sum_{n=1}^{\infty} b_n H_0^{(1)}\left(\frac{2\pi i n R_0}{l}\right) J_0\left(\frac{2\pi i n\varrho}{l}\right) +\\
& + 4\pi R B_0 \ln\frac{2x_\infty}{R} + 2\pi^2 i R\sum_{n=1}^{\infty} B_n H_0^{(1)}\left(\frac{2\pi i n R}{l}\right) J_0\left(\frac{2\pi i n R_0}{l}\right) +\\
& + \frac{2Q_0}{l}\left[\ln\frac{2x_\infty}{R_0} + \pi i\sum_{n=1}^{\infty} H_0^{(1)}\left\{\frac{2\pi i n(R_0+\varrho_0)}{l}\right\} J_0\left(\frac{2\pi i n R_0}{l}\right)\right] + C.
\end{aligned}
\right.
$$

Mit Hilfe der Gleichungen (11) und (12) ist das Problem eigentlich schon gelöst. Um jedoch die Lösung einfacher zu gestalten kann angenommen werden, daß sowohl $2\pi R_0$ als

$2\pi(R - R_0)$ groß sind in Beziehung auf l, während $2\pi\varrho$ und $2\pi\varrho_0$ klein sind in Beziehung auf l.

Unter diesen Umständen können für die Zylinderfunktionen bei den großen Argumenten die bekannten asymptotischen Entwicklungen, bei den kleinen Argumenten die hierfür geltenden Annäherungen angewendet werden und genügt meistens das erste Glied für $n = 1$ in den verschiedenen Reihen.

Die Ausdrücke (11) geben bei Einführung dieser Annäherungen:

$$(13)\left\{\begin{aligned} V_1 - V_2 &= 4\pi R B_0 \ln\frac{\varrho}{R} + \frac{2Q_0}{l}\ln\frac{\varrho}{R_0} = 4\pi\varrho b_0 \ln\frac{R}{\varrho} + \frac{2Q_0}{l}\ln\frac{R}{R_0};\\ b_1 &= -\frac{Q_0}{2\pi\varrho\sqrt{lR_0}}\, e^{-\frac{2\pi R_0}{l}} \cdot \frac{1}{\ln\dfrac{l}{\pi\gamma\varrho}};\\ B_1 &= -\frac{Q_0}{\pi l\sqrt{RR_0}}\, e^{-\frac{3\pi(R-R_0)}{l}}. \end{aligned}\right.$$

Hierin ist γ die Eulersche Konstante.

Mit derselben Annäherung finden wir aus (12):

$$(14)\left\{\begin{aligned} V_3 = &-4\pi\varrho b_0 \ln R_0 + 2\pi\varrho b_1 \sqrt{\frac{l}{R_0}}\, e^{-\frac{2\pi R_0}{l}} -\\ &-4\pi R B_0 \ln R + l B_1 \sqrt{\frac{R}{R_0}}\, e^{-\frac{2\pi(R-R_0)}{l}} -\\ &-\frac{2Q_0}{l}\ln R_0 + \frac{Q_0}{\pi R_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\, e^{-\frac{2\pi n\varrho_0}{l}} + C. \end{aligned}\right.$$

Das vorletzte Glied dieses Ausdrucks wird logarithmisch unendlich groß für $\varrho_0 = 0$, weil

$$\lim_{m=\infty}\sum_{1}^{m}\frac{1}{n} = \gamma + \ln(m+1).$$

Mit Hilfe von (11) bekommt man:

$$(15)\left\{\begin{aligned} V_1 - V_3 = &\,4\pi\varrho b_0 \ln\frac{R_0}{\varrho} - 2\pi\varrho b_1 \sqrt{\frac{l}{R_0}}\, e^{-\frac{2\pi R_0}{l}} -\\ &-l B_1 \sqrt{\frac{R}{R_0}}\, e^{-\frac{2\pi(R-R_0)}{l}} - \frac{Q_0}{\pi R_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\, e^{-\frac{2\pi n\varrho_0}{l}}. \end{aligned}\right.$$

Durch Einführung von b_1, B_1 und Q_0/l aus (13) bekommt man schließlich:

$$(16)\left\{\begin{aligned} 2\pi\varrho\, b_0\left(2\ln\frac{R_0}{\varrho}\ln\frac{R}{R_0}+A\,l\ln\frac{R}{\varrho}\right) &= V_1\left(\ln\frac{R}{R_0}+\frac{A\,l}{2}\right)- \\ &\quad - V_2\frac{A\,l}{2}-V_3\ln\frac{R}{R_0}, \end{aligned}\right.$$

worin gesetzt ist:

$$A=\frac{1}{R_0}\left[\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-\frac{2\pi n\varrho_0}{l}}-\frac{e^{-\frac{4\pi R_0}{l}}}{\ln\frac{l}{\pi\gamma\varrho}}-\frac{1}{\pi}e^{-\frac{4\pi(R-R_0)}{l}}\right].$$

Bei den gemachten Annahmen werden die letzten zwei Glieder im Ausdruck für A sehr klein gegen das erste.

Aus (16) erhält man für $l=0$ (Gitter ohne Öffnungen):

$$4\pi\varrho\, b_0\ln\frac{R_0}{\varrho}=V_1-V_3,$$

während für $A=\infty$ ($\varrho_0=0$, also kein Gitter):

$$4\pi\varrho\, b_0\ln\frac{R}{\varrho}=V_1-V_2,$$

wie zu erwarten war.

Den Durchgriff erhält man aus (16) als Quotient der Koeffizienten der elektrostatischen Induktion im Ausdruck für b_0 als:

$$(17)\qquad D=\frac{A\,l}{2\ln\frac{R}{R_0}}.$$

Für B_0 wird in derselben Weise gefunden:

$$(18)\left\{\begin{aligned} 2\pi R\, B_0\left(2\ln\frac{R_0}{\varrho}\ln\frac{R}{R_0}+A\,l\ln\frac{R}{\varrho}\right) &= -V_1\frac{A\,l}{2}+ \\ &\quad + V_2\left(\ln\frac{R_0}{\varrho}+\frac{A\,l}{2}\right)-V_3\ln\frac{R_0}{\varrho}. \end{aligned}\right.$$

Für $l=0$ (Gitter ohne Öffnungen) wird dies:

$$4\pi R\, B_0\ln\frac{R}{R_0}=V_2-V_3,$$

wie es in diesem Falle auch sein soll.

Schließlich wird für Q_0 gefunden:

$$(19)\left\{\begin{aligned} \frac{Q_0}{l}\left(2\ln\frac{R_0}{\varrho}\ln\frac{R}{R_0}+A\,l\ln\frac{R}{\varrho}\right) &= -V_1\ln\frac{R}{R_0}-V_2\ln\frac{R_0}{\varrho}+ \\ &\quad + V_3\ln\frac{R}{\varrho}. \end{aligned}\right.$$

Für $l = 0$ bekommt man:

$$\frac{2\,Q_0}{l} = \frac{V_3 - V_1}{\ln \dfrac{R_0}{\varrho}} + \frac{V_3 - V_2}{\ln \dfrac{R}{R_0}},$$

wie man auch in zwei getrennten Feldern von zylindrischer Struktur für die Ladung des mittleren Zylinders findet.

Ist $A = \infty$ (kein Gitter), so geben (18) bzw. (19):

$$4\pi R B_0 \ln \frac{R}{\varrho} = V_2 - V_1;\quad Q_0 = 0,$$

wie zu erwarten war.

Das Potential eines willkürlichen Punktes innerhalb des Gitters folgt aus (3), (5), (6) und (8):

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} V = {} & - 4\pi \varrho\, b_0 \ln r + \\ & + 2\pi^2 i \varrho \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{2\pi n x}{l} H_0^{(1)}\left(\frac{2\pi i n r}{l}\right) J_0\left(\frac{2\pi i n \varrho}{l}\right) - \\ & - 4\pi R B_0 \ln R + \\ & + 2\pi^2 i R \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \frac{2\pi n x}{l} H_0^{(1)}\left(\frac{2\pi i n R}{l}\right) J_0\left(\frac{2\pi i n r}{l}\right) - \\ & - \frac{2\,Q_0}{l} \ln R_0 + \\ & + \frac{2\pi i Q_0}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi n x}{l} H_0^{(1)}\left(\frac{2\pi i n R_0}{l}\right) J_0\left(\frac{2\pi i n r}{l}\right) + C. \end{aligned}\right.$$

Für einen Punkt außerhalb des Gitters müssen (3), (5), (6) und (7) angewendet werden:

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} V = {} & - 4\pi \varrho\, b_0 \ln r + \\ & + 2\pi^2 i \varrho \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{2\pi n x}{l} H_0^{(1)}\left(\frac{2\pi i n r}{l}\right) J_0\left(\frac{2\pi i n \varrho}{l}\right) - \\ & - 4\pi R B_0 \ln R + \\ & + 2\pi^2 i R \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \frac{2\pi n x}{l} H_0^{(1)}\left(\frac{2\pi i n R}{l}\right) J_0\left(\frac{2\pi i n r}{l}\right) - \\ & - \frac{2\,Q_0}{l} \ln r + \\ & + \frac{2\pi i Q_0}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi n x}{l} H_0^{(1)}\left(\frac{2\pi i n r}{l}\right) J_0\left(\frac{2\pi i n R_0}{l}\right) + C. \end{aligned}\right.$$

Die Struktur des elektrostatischen Feldes kann am besten untersucht werden, indem man die Lage der Linien, wo eine Äquipotentialfläche sich selbst schneidet, betrachtet. Infolge der axialen Symmetrie des Feldes sind diese Linien Kreise;

in einem Durchschnitt der Röhre durch den Glühdraht sind die Schnittpunkte dieser Kreise als Doppelpunkte wahrnehmbar. In diesen Punkten muß das Feld notwendigerweise Null sein, deshalb gilt für die Doppelpunkte im Durchschnitt:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = 0; \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = 0 .$$

Beim Untersuchen der Lage der Doppelpunkte soll angenommen werden $V_1 = 0$, $V_2 > 0$, während V_3 sich ändert.

Solange r von der Ordnung von R_0 ist, kann für $r < R_0$ mit genügender Annäherung (wobei einige Glieder vernachlässigt sind) geschrieben werden, vorausgesetzt, daß die auf S. 377 genannten Bedingungen erfüllt sind:

$$(22)\left\{\begin{aligned} V = &- 4\pi \varrho b_0 \ln r - 4\pi R B_0 \ln R - \frac{2 Q_0}{l} \ln R_0 + \\ &+ \frac{Q_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi n x}{l} \frac{e^{-\frac{2\pi n (R_0 - r)}{l}}}{n \sqrt{R_0 r}} + C . \end{aligned}\right.$$

$$(23)\left\{\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial r} &= - \frac{4\pi \varrho b_0}{r} + \frac{2 Q_0}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi n x}{l} \frac{e^{-\frac{2\pi n (R_0 - r)}{l}}}{\sqrt{R_0 r}} \left(1 - \frac{l}{4\pi n r}\right); \\ \frac{\partial V}{\partial x} &= - \frac{2 Q_0}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2\pi n x}{l} \frac{e^{-\frac{2\pi n (R_0 - r)}{l}}}{\sqrt{R_0 r}} . \end{aligned}\right.$$

In diesen Ausdrücken besitzen, falls $\cos \frac{2\pi n x}{l} = \pm 1$, die Reihen, in welchen goniometrische Funktionen vorkommen, das Zeichen des ersten Gliedes. Ferner haben, falls das Gitterpotential stark negativ ist, b_0 und Q_0 ein entgegengesetztes Zeichen, während $2 Q_0 / l$ in absolutem Sinne größer ist als $4\pi \varrho b_0$. Dies alles hat zur Folge, daß bei stark negativem Gitterpotential $\partial V / \partial r$ und $\partial V / \partial x$ Null sind für $x = \frac{l}{2} + k l$ (k ist eine willkürliche ganze Zahl) und die Doppelpunkte liegen dann in Flächen mitten zwischen den Flächen der Gitterkreise. Es können keine Kraftlinien verlaufen von der Anode zum Glühdraht, wohl aber von der Anode zum Gitter und vom Glühdraht zum Gitter.

Wird V_3 größer (also in absolutem Sinne kleiner) so bewegen sich die Doppelpunkte auf den Strahlen $x = \frac{l}{2} + k l$ in der Richtung des Glühdrahtes. In der Nähe hiervon gilt aber der Ausdruck (22) für V nicht mehr, sondern er muß ersetzt werden durch:

$$(24)\left\{\begin{aligned} V = &-4\pi\varrho\, b_0 \ln r - 4\pi\varrho \ln\frac{r}{\varrho}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\frac{2\pi n x}{l} - \\ &- 4\pi R B_0 \ln R - \frac{2Q_0}{l}\ln R_0 + C. \end{aligned}\right.$$

In Annäherung folgt hieraus:

$$(25)\left\{\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial r} &= -\frac{4\pi\varrho}{r}\left(b_0 + b_1\cos\frac{2\pi x}{l}\right), \\ \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{8\pi^2\varrho}{l}\ln\frac{r}{\varrho}\sum_{n=1}^{\infty} n\, b_n \sin\frac{2\pi n x}{l}. \end{aligned}\right.$$

Die Doppelpunkte liegen auf den Strahlen $x = \frac{l}{2} + kl$ und ebenfalls auf dem Glühdraht, falls $b_0 = b_1$, in welchem Falle man erhält:

$$(26)\qquad V_3 = -V_2\,\frac{\frac{Al}{2}\ln\frac{l}{\pi\gamma\varrho} + \ln\frac{R_0}{\varrho}\sqrt{\frac{l}{R_0}}\,e^{-\frac{2\pi R_0}{l}}}{\ln\frac{R}{R_0}\ln\frac{l}{\pi\gamma\varrho} - \ln\frac{R}{\varrho}\sqrt{\frac{l}{R_0}}\,e^{-\frac{2\pi R_0}{l}}}.$$

Für diesen Wert der Gitterspannung wird der Übergang der Kraftlinien von der Anode zum Glühdraht gerade möglich werden. Für größere Werte von V_3 findet die sog. „Inselbildung“ statt, wobei ein Teil des Glühdrahtes Kraftlinien von der Anode erhält, bis bei einem Gitterpotential:

$$(27)\qquad V_3 = -V_2\,\frac{\frac{Al}{2}\ln\frac{l}{\pi\gamma\varrho} - \ln\frac{R_0}{\varrho}\sqrt{\frac{l}{R_0}}\,e^{-\frac{2\pi R_0}{l}}}{\ln\frac{R}{R_0}\ln\frac{l}{\pi\gamma\varrho} + \ln\frac{R}{\varrho}\sqrt{\frac{l}{R_0}}\,e^{-\frac{2\pi R_0}{l}}},$$

Kraftlinien verlaufen von der Anode zur ganzen Länge des Glühdrahtes; die Doppelpunkte liegen dann bei $x = kl$ auf dem Glühdraht, und $b_0 = -b_1$.

Bei weiterer Vergrößerung von V_3 bewegen sich die Doppelpunkte auf den Strahlen $x = kl$ wieder nach außen, die Kraftlinien verlaufen von der Anode zum Glühdraht und zum Gitter, sie können nicht vom Glühdraht zum Gitter gelangen, angesichts der Lage der Doppelpunkte.

Für $r = R_0 - \varrho_0$, $x = kl$ gibt (23) in Annäherung:

$$(28)\quad \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{4\pi\varrho b_0}{R_0} + \frac{2Q_0}{lR_0}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{2\pi n\varrho_0}{l}}; \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

Hierin ist die Reihe der e-Funktionen in einfacher Weise zu summieren; $\frac{\partial V}{\partial r}$ wird $= 0$, wenn:

$$(29)\quad V_3 = V_2 \frac{-\frac{Al}{2}\left(e^{\frac{2\pi\varrho_0}{l}} - 1\right) + \ln\frac{R_0}{\varrho}}{\ln\frac{R_0}{\varrho} + \ln\frac{R}{R_0}\, e^{\frac{2\pi\varrho_0}{l}}}.$$

Die Doppelpunkte liegen dann auf den Gitterdrähten, während das Potential des Gitters einen positiven Wert hat.

Bei noch weiterer Zunahme von V_3 liegen die Doppelpunkte bei einem Wert $r > R_0$. In diesem Falle kann, wenn r nicht nahezu gleich R ist, die folgende Annäherung benutzt werden:

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} V &= -4\pi\varrho b_0 \ln r - 4\pi R B_0 \ln R - \frac{2Q_0}{l}\ln r + \\ &\quad + \frac{Q_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{2\pi n x}{l}\,\frac{e^{-\frac{2\pi n(r-R_0)}{l}}}{n\sqrt{rR_0}} + C; \\ \frac{\partial V}{\partial r} &= -\frac{4\pi\varrho b_0}{r} - \frac{2Q_0}{lr} - \\ &\quad - \frac{2Q_0}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{2\pi n x}{l}\,\frac{e^{-\frac{2\pi n(r-R_0)}{l}}}{\sqrt{rR_0}}\left(1 + \frac{l}{4\pi n r}\right); \\ \frac{\partial V}{\partial x} &= -\frac{2Q_0}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{2\pi n x}{l}\,\frac{e^{-\frac{2\pi n(r-R_0)}{l}}}{\sqrt{rR_0}}. \end{aligned}\right.$$

Die beiden Differentialquotienten sind Null für $x = kl$ und $2\pi(r - R_0) \gg l$, wenn:

$$(31)\quad V_3 = V_2 \frac{\frac{Al}{2} + \ln\frac{R_0}{\varrho}\left[1 + \sqrt{\frac{r}{R_0}}\, e^{-\frac{2\pi(r-R)}{l}}\right]}{\ln\frac{R_0}{\varrho} + \ln\frac{R}{\varrho}\sqrt{\frac{r}{R_0}}\, e^{-\frac{2\pi(r-R_0)}{l}}}.$$

Ist $r = R_0 + \varrho_0$, so liegen die Doppelpunkte an der Oberfläche der kreisförmigen Gitterdrähte. Dann ist:

$$(32)\qquad V_3 = V_2 \frac{\frac{A\,l}{2}\left(e^{\frac{2\pi\varrho_0}{l}} - 1\right) + \ln \frac{R_0}{\varrho} e^{\frac{2\pi\varrho_0}{l}}}{\ln \frac{R_0}{\varrho} e^{\frac{2\pi\varrho_0}{l}} + \ln \frac{R}{R_0}} .$$

Wenn die Doppelpunkte bei $r > R_0$ liegen, so verlaufen die Kraftlinien von der Anode zum Glühdraht und vom Gitter zum Glühdraht; es können keine Kraftlinien zwischen Anode und Gitter verlaufen, angesichts der Lage der Doppelpunkte.

Wenn V_3 weiter zunimmt, so liegen die Doppelpunkte bei der Anode und muß die folgende Annäherung benutzt werden:

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned} V = &- 4\pi\varrho\, b_0 \ln r - 4\pi R B_0 \ln R + \\ &+ l\sqrt{\frac{R}{r}} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\frac{2\pi n x}{l} \cdot \frac{1}{n} \cdot e^{-\frac{2\pi n(R-r)}{l}} - \\ &- \frac{2 Q_0}{l} \ln r + \frac{Q_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{2\pi n x}{l} \frac{e^{-\frac{2\pi n(r-R_0)}{l}}}{n\sqrt{r R_0}} + C. \end{aligned}\right.$$

Für $r = R$ kann geschrieben werden:

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial r} &= - \frac{4 Q_0}{l\sqrt{R R_0}} e^{-\frac{2\pi(R-R_0)}{l}} \cos\frac{2\pi x}{l} - \frac{4\pi\varrho\, b_0}{R} - \frac{2 Q_0}{l R}; \\ \frac{\partial V}{\partial x} &= - 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{2\pi n x}{l} - \\ &\quad - \frac{2 Q_0}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{2\pi n x}{l} \frac{e^{-\frac{2\pi n(R-R_0)}{l}}}{\sqrt{R R_0}}. \end{aligned}\right.$$

Diese beiden Differentialquotienten sind Null, wenn $x = k\,l$ und:

$$(35)\qquad V_3 = V_2 \frac{\frac{A\,l}{2} + \ln\frac{R_0}{\varrho}\left\{1 + 2\sqrt{\frac{R}{R_0}}\, e^{-\frac{2\pi(R-R_0)}{l}}\right\}}{\ln\frac{R_0}{\varrho} + 2\ln\frac{R}{\varrho}\sqrt{\frac{R}{R_0}}\, e^{-\frac{2\pi(R-R_0)}{l}}} .$$

Die Doppelpunkte liegen also bei diesem Wert von V_3 an der Anode auf den Strahlen $x = k\,l$.

Bei einem größeren Wert von V_3 bleiben die Doppelpunkte auf der Anode, sie entfernen sich jedoch von den

Strahlen $x = kl$ nach beiden Seiten. Sie treffen zusammen auf den Strahlen $x = \frac{l}{2} + kl$, wenn:

$$V_3 = V_2 \frac{\frac{Al}{2} + \ln \frac{R_0}{\varrho} \left\{1 - 2\sqrt{\frac{R}{R_0}}\, e^{-\frac{2\pi(R - R_0)}{l}}\right\}}{\ln \frac{R_0}{\varrho} - 2 \ln \frac{R}{\varrho} \sqrt{\frac{R}{R_0}}\, e^{-\frac{2\pi(R - R_0)}{l}}}. \tag{36}$$

Im letzteren Falle verlaufen keine Kraftlinien von der Anode zum Glühdraht.

Nimmt V_3 weiter zu, so bewegen sich die Doppelpunkte auf den Strahlen $x = \frac{l}{2} + kl$ in der Richtung des Gitters, bis sie für $V_3 = +\infty$ sich in derselben Lage befinden als für $V_3 = -\infty$. Bei der Lage der Doppelpunkte auf den Strahlen $x = \frac{l}{2} + kl$ können keine Kraftlinien verlaufen zwischen Anode und Glühdraht.

Ist $r = R_0$, so muß $Q_0 = 0$ sein, da sonst in Anbetracht des Unendlichwerdens von $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{2\pi n(R_0 - r)}{l}}$ der Differentialquotient $\partial V / \partial r$ unendlich groß werden würde. Deshalb liegen die Doppelpunkte bei $r = R_0$, wenn $V_3 \ln \frac{R}{\varrho} = V_2 \ln \frac{R_0}{\varrho}$, wegen (19). Das Potential des Gitters entspricht dann dem Potential eines Punktes, der in einer Entfernung R_0 von der Achse gelegen ist in einem zylindrischen Felde, gebildet von Glühdraht und Anode.

Für den Fall, daß $2\pi R_0 \gg l$ und ferner $V_3^2 + D V_3$ nicht nahezu gleich Null ist, ist $b_1 < b_0$, so daß dann zufolge (25) $\partial V / \partial r$ am Glühdraht sehr wenig von x abhängt, das Feld hat dort unter diesen Umständen in allen Punkten fast denselben Wert. Man kann dann nach Schottky[1]) ein „Effektivpotential" des Gitters einführen; dieses Potential wird definiert als die Potentialdifferenz, welche zwischen einem zylindrischen Gitter mit demselben Radius als das anwesende Gitter und dem Glühdraht existieren müßte, um dieselbe Feldintensität an diesem Draht zu erlangen. Für diesen Potentialwert bekommt man:

$$V_3' = -4\pi \varrho\, b_0 \ln \frac{R_0}{\varrho}. \tag{37}$$

Delft (Holland), September 1923. Technische Hochschule.

---

[1]) W. Schottky, Arch. f. Elektrotechnik 8. S. 13. 1920.

Zweiter Teil.

Von Balth. van der Pol Jr.

Die Formel (17) von Prof. **Elias** für den Durchgriff einer Triode mit Ringgitter ist:

$$D = \frac{A\,l}{2 \log \frac{R}{R_0}}, \tag{17}$$

worin:

$$A = \frac{1}{R_0}\left[\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-\frac{2\pi n \varrho_0}{l}} - \frac{e^{-\frac{4\pi R_0}{l}}}{\log \frac{l}{\pi \gamma \varrho}} - \frac{1}{\pi}e^{-\frac{4\pi(R-R_0)}{l}}\right].$$

Wie der Verfasser bereits bemerkt, sind die letzten zwei Glieder im Ausdruck für A klein gegen das erste, und bei Vernachlässigung der kleinen Glieder bleibt also:

$$A = \frac{1}{R_0 \pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-\frac{2\pi n \varrho_0}{l}}.$$

Diese Reihe kann in einfacher Weise summiert werden. Setzt man nämlich:

$$e^{-\frac{2\pi \varrho_0}{l}} = x,$$

so ist:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n = \log\frac{1}{1-x};$$

und man erhält also:

$$A = \frac{1}{R_0 \pi}\log\frac{1}{1-e^{-\frac{2\pi \varrho_0}{l}}}.$$

Für den Durchgriff folgt hieraus:

$$D = \frac{l}{2\pi R_0 \log\frac{R}{R_0}}\log\frac{1}{1-e^{-\frac{2\pi \varrho_0}{l}}}. \tag{P 1}$$

Da jedoch in der Ableitung von (17) die Annäherung

$$\frac{2\pi \varrho_0}{l} \ll 1$$

bereits verwendet wurde, so kann man das logarithmische Glied in (P 1) auch schreiben:

$$\log\frac{1}{1-e^{-\frac{2\pi \varrho_0}{l}}} = \log\frac{l}{2\pi \varrho_0}.$$

Für den Durchgriff D erhält man also den Ausdruck:

$$D = \frac{l}{2\pi R_0}\,\frac{\log\frac{l}{2\pi \varrho_0}}{\log\frac{R}{R_0}}. \tag{P 2}$$

Wir können jetzt den Durchgriff des Ringgitters vergleichen mit den bekannten Ausdrücken für den Durchgriff, so wie diese von J. J. Thomson[1], von Laue[2] und Abraham[3] berechnet sind für ein Stabgitter, von n Stäben an den Ecken eines regelmäßigen n-Ecks gebildet, in einem Abstand vom Glühdraht, welchen wir wieder R_0 bezeichnen werden. Auch die Dicke der geraden Stäbe werden wir wieder $2\varrho_0$ nennen.

Die Resultate der drei genannten Forscher stimmen vollständig überein und werden in den vorliegenden Bezeichnungen:

$$\text{(P 3)} \qquad D = \frac{\log \frac{R_0}{n\varrho_0}}{n \log \frac{R}{R_0}} .$$

Vergleichen wir (P 3) mit dem Ausdruck (P 2), welcher in der oben erläuterten Weise aus der Berechnung von Prof. Elias abgeleitet werden kann, so zeigt es sich, daß beide Ausdrücke ein genau übereinstimmendes Resultat liefern, wenn man n im Parallelstabgitterproblem ersetzt durch:

$$\frac{2\pi R_0}{l} .$$

Man erhält also denselben Durchgriff in den beiden Fällen, wenn man die Abstände der parallelen Drähte, an der Peripherie des Gitterkreises R_0 gemessen, der Ganghöhe des schraubenförmigen Gitters gleichsetzt.

In beiden Fällen ist, pro Längeneinheit der Triode, in die Gitterfläche ($r = R_0$) eine Länge Draht (der gleichen Dicke) eingeführt gleich n.

Der folgende wahrscheinliche praktische Satz liegt hier nahe (wenn dieser auch nicht allgemein bewiesen ist):

Vorausgesetzt, daß man eine bestimmte Länge Draht so homogen wie möglich (also entweder in Form einer Schraube, oder in Form paralleler Stäbe, oder in Form eines Netzes, usw.) in die Gitterfläche einführt, so wird der Durchgriff in erster Annäherung in allen Fällen gleich groß sein.

Eindhoven (Holland), Februar 1924. Physikalisches Laboratorium der Philips' Glühlampenfabriken A.-G.

---

1) B. S. Gossling, Journ. of the Inst. of Electr. Eng. 58. S. 670. 1920.

2) M. von Laue, Ann. d. Phys. 59. S. 465. 1919.

3) M. Abraham, Arch. f. Elektrotechnik 8. S. 42. 1920.

Dritter Teil.

Von B. D. H. Tellegen.

Im ersten Teil berechnete Prof. Elias das elektrostatische Feld einer zylindrischen Triode mit schraubenförmigem Gitter. Die nachfolgenden Annäherungen wurden dabei eingeführt:

1. die Triode wurde unendlich lang gedacht;
2. die Schraube wurde ersetzt durch eine Anzahl von äquidistanten Ringen mit ihrem Mittelpunkt in der Triodenachse und in Flächen gelegen senkrecht auf dieser Achse; wir nennen dies ein Ringgitter;
3. der Gitterdraht wurde als dünn angenommen.

Aus einer näheren Untersuchung ergibt sich die Möglichkeit die Methode von Prof. Elias genau so anzuwenden, ohne jedoch von der 2. und 3. Annäherung Gebrauch zu machen.

I. Zuerst lassen wir nur die 2. Annäherung fallen, wir nehmen jedoch den Gitterdraht noch als dünn an. Wir halten uns an die Bezeichnungen:

R	Radius-Anode,
R_0	Radius-Gitter,
ϱ_0	Radius-Gitterdrähte,
ϱ	Radius-Glühdraht,
l	Ganghöhe.

Wir bestimmen einen Punkt P durch Schraubenkoordinaten r, φ, x. Hierbei ist r der Abstand von P zur Achse;

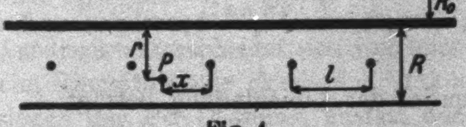


Fig. 4.

φ der Winkel, welchen die Fläche durch P und die Achse mit einer willkürlichen festen Nullfläche durch die Achse bildet. Die Fläche durch P und die Achse schneidet den Gitterdraht an verschiedenen Punkten. Hieraus wählen wir einen Punkt Q, der an derselben Seite der Achse liegt wie P. Den Abstand von P zur Fläche durch Q senkrecht auf der Achse nehmen wir als die x-Koordinate von P. Wir wählen die Punkte Q, welche zu den verschiedenen P gehören, derartig, daß sie zusammen einen Umgang der Schraube bilden, welche anfängt und endigt auf der Nullfläche von φ. Das Zeichen von x wählen wir so, daß, wenn P sich auf einer Fläche senkrecht auf der Achse bewegt und φ dabei zunimmt, das x von P abnimmt. Lassen wir r und x konstant und ändern wir φ, so beschreibt P eine Schraubenlinie. Das Potential V von P wird sich dabei nicht ändern. V ist also unabhängig von φ und eine periodische Funktion von x.

Die Flächendichte der Ladung auf dem Glühdraht kann also geschrieben werden:

$$(1)^{1)} \qquad \omega_1 = b_0 + b_1 \cos\frac{2\pi x}{l} + \cdots + b_n \cos\frac{2\pi n x}{l} + \cdots$$

Ebenso für die Anode:

$$(2) \qquad \omega_2 = B_0 + B_1 \cos\frac{2\pi x}{l} + \cdots + B_n \cos\frac{2\pi n x}{l} + \cdots$$

Wir haben nur die cos-Glieder, weil ω sich nicht ändert, wenn x ein anderes Vorzeichen erhält.

Das Potential der Ladungsdichten b_0 und B_0 beträgt wieder:

$$(3) \qquad \begin{cases} V_{10} = 4\pi\varrho\, b_0 \ln\dfrac{2x_\infty}{r}, \\ V_{20} = 4\pi R\, B_0 \ln\dfrac{2x_\infty}{R}. \end{cases}$$

Wir berechnen nun das Potential der Ladungsdichte $b_n \cos\frac{2\pi n x}{l}$ im Punkte $P(x, r)$, indem wir zuerst das Potential einer Linienladung auf dem Glühdraht mit einer Ladung pro Längeneinheit $\varrho\, d\varphi\, b_n \cos\frac{2\pi n x}{l}$ berechnen und dann nach φ integrieren.

Das Potential der Linienladung beträgt:

$$\varrho\, d\varphi\, b_n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\frac{2\pi n x_0}{l}\, dx_0}{\sqrt{r_0^2 + \left(x_0 + \frac{\varphi l}{2\pi} - x\right)^2}}.$$

---

1) Wir geben den Gleichungen dieselben Nummern wie den korrespondierenden Gleichungen im Aufsatz von Prof. G. J. Elias.

Setzt man $x_0 + \frac{\varphi l}{2\pi} - x = y$, so erhält man:

$$\begin{cases} \varrho\, d\varphi\, b_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{l} - n\varphi\right) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\frac{2\pi n y}{l}\, dy}{\sqrt{r_0^2 + y^2}} = \\ = \varrho\, d\varphi\, b_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{l} - n\varphi\right) \pi i H_0^{(1)}\left(\frac{2\pi i n r_0}{l}\right). \end{cases}$$

Der Abstand in der x-Richtung von P zum Punkte (x_0, ϱ, φ) wird nicht nur bestimmt durch $x_0 - x$, sondern auch durch die Steigung der Schraubenlinie.

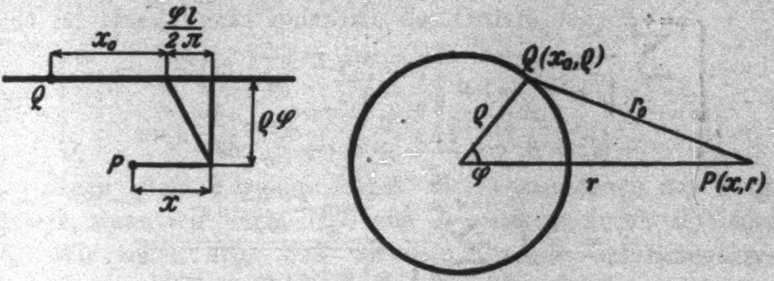


Fig. 5.

Nun ist $r_0^2 = r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho\cos\varphi$ und hierfür gilt, wenn $r > \varrho$:

$$(4) \quad \begin{cases} H_0^{(1)}\left(\frac{2\pi i n r_0}{l}\right) = H_0^{(1)}\left(\frac{2\pi i n r}{l}\right) J_0\left(\frac{2\pi i n \varrho}{l}\right) + \\ \qquad + 2\sum\limits_{s=1}^{\infty} H_s^{(1)}\left(\frac{2\pi i n r}{l}\right) J_s\left(\frac{2\pi i n \varrho}{l}\right) \cos s\varphi. \end{cases}$$

Die Integration nach φ liefert nun:

$$(5) \quad V_{1n} = 2\pi^2 i \varrho b_n \cos\frac{2\pi n x}{l} H_n^{(1)}\left(\frac{2\pi i n r}{l}\right) J_n\left(\frac{2\pi i n \varrho}{l}\right).$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich vom übereinstimmenden Ausdruck beim Ringgitter nur durch das Vorkommen Besselscher Funktionen der n^{ten} Ordnung, anstatt der 0ten Ordnung.

Ebenso finden wir für das Potential der Ladungsdichte $B_n \cos\frac{2\pi n x}{l}$ im Punkte (x, r):

$$(6) \quad V_{2n} = 2\pi^2 i R B_n \cos\frac{2\pi n x}{l} H_n^{(1)}\left(\frac{2\pi i n R}{l}\right) J_n\left(\frac{2\pi i n r}{l}\right).$$

Berechnen wir nun das Potential der Ladung des Gitters, welches wir hierbei als eine Linie annehmen. Wir nennen die Ladung eines Umgangs der Schraube Q_0 und berechnen das Feld derselben, indem wir erst das Potential einer Reihe von Ladungen $Q_0\,d\varphi/2\pi$, welche in einer Linie parallel zum Glühdraht gelegen sind, berechnen, und dann nach φ integrieren. Das Potential einer derartigen Reihe beträgt:

$$\frac{Q_0\,d\varphi}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{1}{\sqrt{r_0^2+\left(m\,l+\frac{\varphi\,l}{2\pi}-x\right)^2}}\,.$$

Dies ist eine periodische Funktion von x, also dürfen wir setzen:

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{1}{\sqrt{r_0^2+\left(m\,l+\frac{\varphi\,l}{2\pi}-x\right)^2}}=\\&\qquad=\beta_0+\beta_1\cos\frac{2\pi x}{l}+\cdots+\beta_n\cos\frac{2\pi n x}{l}+\cdots,\end{aligned}\right.$$

$$\beta_n=\frac{2}{l}\int_0^l\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{\cos\frac{2\pi n x}{l}\,dx}{\sqrt{r_0^2+\left(m\,l+\frac{\varphi\,l}{2\pi}-x\right)^2}},$$

$$\beta_0=\frac{1}{l}\int_0^l\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{dx}{\sqrt{r_0^2+\left(m\,l+\frac{\varphi\,l}{2\pi}-x\right)^2}}\,.$$

Setzen wir $m\,l+\frac{\varphi\,l}{2\pi}-x=y$ und verwechseln die Reihenfolge von Summation und Integration, so erhalten wir:

$$\left\{\begin{aligned}&\beta_n=\frac{2}{l}\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\int_{(m-1)l+\frac{\varphi l}{2\pi}}^{ml+\frac{\varphi l}{2\pi}}\frac{\cos\frac{2\pi n\left(m\,l+\frac{\varphi\,l}{2\pi}-y\right)}{l}\,dy}{\sqrt{r_0^2+y^2}}=\\&\qquad\qquad=\frac{2}{l}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\left(n\varphi-\frac{2\pi n y}{l}\right)dy}{\sqrt{r_0^2+y^2}}=\\&=\frac{2}{l}\cos n\varphi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\frac{2\pi n y}{l}\,dy}{\sqrt{r_0^2+y^2}}=\frac{2\pi i}{l}\cos n\varphi\,H_0^{(1)}\left(\frac{2\pi i n r_0}{l}\right).\end{aligned}\right.$$

Gleichfalls:

$$\beta_0=\frac{2}{l}\ln\frac{2x_\infty}{r_0}\,.$$

Das Potential der Ladungen $Q_0\, d\varphi / 2\pi$ beträgt also:

$$\frac{Q_0\, d\varphi}{\pi l}\left[\ln\frac{2x_\infty}{r_0} + \pi i \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\varphi \cos\frac{2\pi n x}{l}\, H_0^{(1)}\left(\frac{2\pi i n r_0}{l}\right)\right].$$

Nun ist $r_0^2 = r^2 + R_0^2 - 2 r R_0 \cos\varphi$. Mit Hilfe der Reihe (4) liefert die Integration nach φ für einen Punkt außerhalb des Gitters, $r > R_0$:

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} V_{30} = \frac{2Q_0}{l}\Big[\ln\frac{2x_\infty}{r} &+ \\ &+ \pi i \sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{2\pi n x}{l}\, H_n^{(1)}\left(\frac{2\pi i n r}{l}\right) J_n\left(\frac{2\pi i n R_0}{l}\right)\Big], \end{aligned}\right.$$

und für einen Punkt innerhalb des Gitters, $r < R_0$:

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} V_{30} = \frac{2Q_0}{l}\Big[\ln\frac{2x_\infty}{R_0} &+ \\ &+ \pi i \sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{2\pi n x}{l}\, H_n^{(1)}\left(\frac{2\pi i n R_0}{l}\right) J_n\left(\frac{2\pi i n r}{l}\right)\Big]. \end{aligned}\right.$$

Auch diese Formeln folgen direkt aus denen des Ringgitters, wenn wir darin $H_0^{(1)}$ und J_0 ersetzen durch $H_n^{(1)}$ und J_n. Wir sehen also, daß wir alle Formeln des Ringgitters einfach übernehmen können, also auch die Randwertgleichungen (9), (10), (11) und (12), welche uns sagen, daß das Potential am Glühdraht, an der Anode und am Gitter bzw. gleich V_1, V_2 und V_3 sind und die Feldgleichungen (20) und (21). Wir brauchen nur überall $H_0^{(1)}$ und J_0 durch $H_n^{(1)}$ und J_n zu ersetzen.

Wenn wir nun die Annäherungen: $l \ll 2\pi R_0$; $l \ll 2\pi(R - R_0)$; $2\pi\varrho \ll l$; $2\pi\varrho_0 \ll l$ einführen und uns auf die ersten Harmonischen beschränken, so wird die Übereinstimmung noch größer. Die Funktionen, denen sich die Besselschen Funktionen bei einem großen imaginären Argument nähern, sind nämlich nicht von der Ordnung der Besselschen Funktionen abhängig. Wenn wir in dieser Weise b_1, B_1, b_0, B_0 und Q_0 in den Dimensionen der Triode und in den Potentialen V_1, V_2 und V_3 ausdrücken, so finden wir für B_1, b_0, B_0 und Q_0 genau dieselben Ausdrücke wie beim Ringgitter; diese werden also gegeben durch die Gleichungen (13), (16), (18) und (19). Nur die Größe A wird:

$$A = \frac{1}{R_0}\left[\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\, e^{-\frac{2\pi n \varrho_0}{l}} - \frac{2\pi^2\varrho^2}{l^2}\, e^{-\frac{4\pi R_0}{l}} - \frac{1}{\pi}\, e^{-\frac{4\pi(R-R_0)}{l}}\right].$$

Da die letzten zwei Glieder von A bei den gemachten Annahmen klein sind gegen das erste, unterscheidet sich dieser Ausdruck nur wenig vom A des Ringgitters. Auch die Formel für den Durchgriff bleibt also:

$$D = \frac{A\,l}{2 \ln \frac{R}{R_0}} \infty \frac{l}{2\pi R_0} \frac{\ln \frac{l}{2\pi \varrho_0}}{\ln \frac{R}{R_0}}\,.^{1)} \tag{17}$$

Nur der Ausdruck für b_1 wird anders, nämlich:

$$b_1 = -\frac{Q_0}{l\sqrt{l R_0}}\, e^{-\frac{2\pi R_0}{l}},$$

welcher Ausdruck bedeutend kleiner ist als der betreffende des Ringgitters.

Wir sehen also, daß die Felder einer Triode mit Ringgitter und einer Triode mit Schraubengitter — solange den gemachten Annahmen entsprochen wird — vollkommen gleich sind, ausgenommen in der Nähe des Glühdrahtes. Dies ist auch direkt einzusehen.

Die Größe b_1/b_0 gibt die Ungleichmäßigkeit der Ladung auf dem Glühdraht wieder. Beim Ringgitter beträgt diese:

$$\frac{b_1}{b_0} = -\frac{l}{\ln \frac{l}{\pi \gamma \varrho}} \frac{e^{-\frac{2\pi R_0}{l}}}{\sqrt{l R_0}} \frac{-V_1 \ln \frac{R}{R_0} - V_2 \ln \frac{R_0}{\varrho} + V_3 \ln \frac{R}{\varrho}}{V_1\left(\frac{A\,l}{2} + \ln \frac{R}{R_0}\right) - V_3 \frac{A\,l}{2} - V_3 \ln \frac{R}{R_3}},$$

worin γ = Eulersche Konstante; und beim Schraubengitter:

$$\frac{b_1}{b_0} = -2\pi\varrho \frac{e^{-\frac{2\pi R_0}{l}}}{\sqrt{l R_0}} \frac{-V_1 \ln \frac{R}{R_0} - V_2 \ln \frac{R_0}{\varrho} + V_3 \ln \frac{R}{\varrho}}{V_1\left(\frac{A\,l}{2} + \ln \frac{R}{R_0}\right) - V_3 \frac{A\,l}{2} - V_3 \ln \frac{R}{R_3}}\,.$$

Wenn wir nun ϱ, den Radius des Glühdrahtes, sich Null nähern lassen, so nähert sich beim Ringgitter b_1/b_0 einem Werte ungleich Null. Allerdings: die Verhältnisse der Glühdrahtpunkte, welche mitten zwischen den beiden Ringen liegen, sind ganz anders als die der Punkte, welche gerade in einer Ringfläche liegen und infolge des Dünnerwerdens des Glüh-

---

1) Vgl. zweiten Teil.

drahtes verschwindet also die Ungleichmäßigkeit der Ladung nicht. Beim Schraubengitter nähert sich b_1/b_0 wohl Null, wenn ϱ immer kleiner wird. Hier liegt jeder Durchschnitt des Glühdrahtes in gleicher Lage hinsichtlich des Gitters und wir finden die verschiedenen Werte der Ladungsdichten bereits an der Peripherie eines senkrechten Durchschnittes. Wird dieser stets kleiner, so muß also die Ungleichmäßigkeit der Ladung verschwinden. In der Nähe des Glühdrahtes werden die Felder der Triode mit Ringgitter und der Triode mit Schraubengitter also verschieden sein. In Punkten, nicht in der Nähe des Glühdrahtes, wird der nächstgelegene Teil des Gitters überwiegen, so daß hierbei der Unterschied verschwindet.

II. Der Bedingung $\frac{2\pi\varrho_0}{l} < 1$ wird in praktischen Fällen oft ungenügend entsprochen. Bei einer Philips *E*-Triode beträgt diese z. B. $^1/_2$. Es ist deshalb wichtig, gleich vom Anfang an die Dicke des Gitterdrahtes zu berücksichtigen. Das Entstehen desselben können wir uns denken durch die Bewegung einer Schraubenlinie parallel zu sich selbst um die Drahtachse. Nehmen wir den senkrechten Durchschnitt als kreisförmig an, so können wir eine beschreibende Schraubenlinie definieren durch den Winkel ψ, welchen eine Linie, durch die Achse des Drahtes und die beschreibende Linie und gelegen im senkrechten Durchschnitt, mit einer festen Linie in jenem Durchschnitt bildet. Wir wählen für die beschreibende Linie, welche am weitesten vom Glühdraht entfernt ist, also in einem Abstand $R_0 + \varrho_0$, ψ gleich Null. Von der beschreibenden Linie am nächsten beim Glühdraht, also in einem Abstand $R_0 - \varrho_0$, ist ψ dann π.

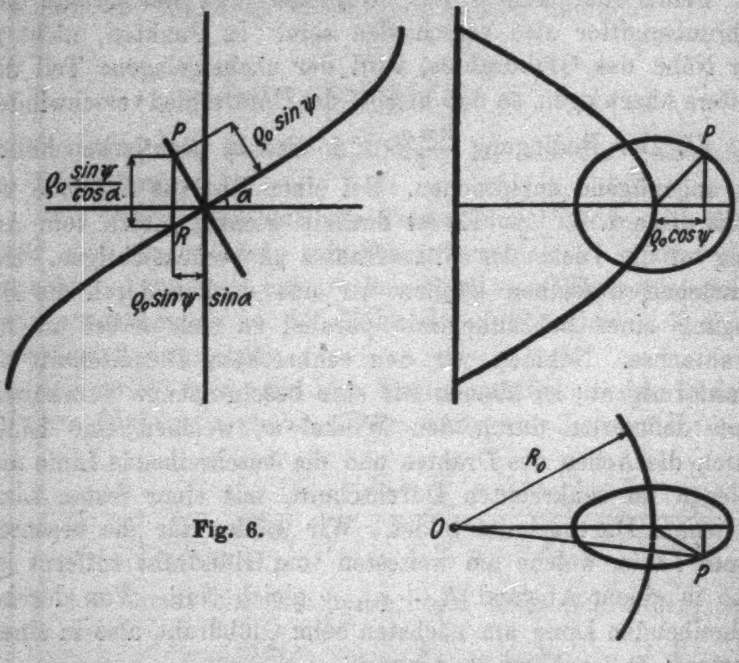
Betrachten wir nun den Teil der Oberfläche des Gitterdrahtes begrenzt von den Linien ψ und $\psi + d\psi$ längs eines Umgangs der Schraube und nennen die Ladung desselben $\varrho_0 \, d\psi \, \omega_3$, so können wir schreiben:

$$\omega_3 = Q_0 + Q_1 \cos\psi + \cdots + Q_p \cos p\psi + \cdots \tag{22}$$

Auch hier kommen nur die cos-Glieder vor, weil ω_3 sich nicht ändert, falls ψ entgegengesetztes Vorzeichen erhält. Mittels dieser Definition der Ladungen erreichen wir, daß die totale Ladung des Gitters bei allen Harmonischen mit Ausnahme von Q_0 gleich Null wird, was nicht der Fall sein würde, wenn wir von der gewöhnlichen Ladungsdichte ausgehen würden.

Wir berechnen nun das Potential von $Q_p \cos p\,\psi$. Zu diesem Zwecke berechnen wir zuerst das Potential der Schraubenlinie ψ mit Ladung $\varrho_0\, d\psi\, Q_p \cos p\,\psi$ per Umgang und integrieren dann nach ψ.

Das Potential der Schraubenlinie wird jedoch durch die Gleichungen (7) und (8) gegeben, wenn darin Q_0, x und R_0



$\varrho_0 \sin\psi$
P
$\varrho_0 \frac{\sin\psi}{\cos\alpha}$
α
R
$\varrho_0 \sin\psi \sin\alpha$
P
$\varrho_0 \cos\psi$
R_0
O
P

Fig. 6.

von den jetzt gültigen Werten ersetzt werden. Diese gehen aus Fig. 6 hervor, welche die Achse des Gitterdrahtes, die Peripherie eines senkrechten Durchschnittes und die Achse des Glühdrahtes in drei Projektionen darstellt.

R_0 muß ersetzt werden durch

$$OP = \sqrt{(R_0 + \varrho_0 \cos\psi)^2 + (\varrho_0 \sin\psi \sin\alpha)^2},$$

worin α die Neigung der Achse des Gitterdrahtes ist, also

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{l}{2\pi R_0};$$

$$x \text{ durch } x - PR$$

und

$$Q_0 \text{ durch } \varrho_0\, d\psi\, Q_p \cos p\,\psi\,.$$

Wir nehmen nun künftig an $\varrho_0 \ll R_0$.

Dann können wir schreiben:

$$O P = R_0 + \varrho_0 \cos\psi\,,$$

$$P R = \varrho_0 \frac{\sin\psi}{\cos\alpha}\,.$$

Somit erhalten wir für das Potential der Schraubenlinie ψ: in einem Punkte außerhalb der Schraubenlinie, also $r > R_0 + \varrho_0 \cos\psi$:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{2\,\varrho_0\, d\psi\, Q_p \cos p\psi}{l}\left[\ln\frac{2x_\infty}{r} + \pi i \sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{2\pi n}{l}\left(x - \varrho_0 \frac{\sin\psi}{\cos\alpha}\right)\cdot\right.\\ &\qquad\left.\cdot\, H_n^{(1)}\left(\frac{2\pi i n r}{l}\right) J_n\left\{\frac{2\pi i n}{l}(R_0 + \varrho_0 \cos\psi)\right\}\right]; \end{aligned}\right. \tag{23}$$

in einem Punkte innerhalb der Schraubenlinie, also $r < R_0 + \varrho_0 \cos\psi$:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{2\,\varrho_0\, d\psi\, Q_p \cos p\,\psi}{l}\left[\ln\frac{2\,x_\infty}{R_0 + \varrho_0 \cos\psi} + \pi i \sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{2\pi n}{l}\left(x - \varrho_0 \frac{\sin\psi}{\cos\alpha}\right)\cdot\right.\\ &\qquad\left.\cdot\, H_n^{(1)}\left\{\frac{2\pi i n}{l}(R_0 + \varrho_0 \cos\psi)\right\} J_n\left(\frac{2\pi i n r}{l}\right)\right]; \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Diese Ausdrücke müssen nach ψ integriert werden. Für das Potential von $Q_p \cos p\,\psi$ in einem Punkte ganz außerhalb des Gitters, also $r > R_0 + \varrho_0$, erhalten wir aus (23) für $p \neq 0$:

$$\begin{aligned} V_{3p} &= \frac{2\pi i\,\varrho_0\, Q_p}{l} \sum_{n=1}^{\infty} H_n^{(1)}\left(\frac{2\pi i n r}{l}\right)\cdot\\ &\quad\cdot\int_0^{2\pi} \cos p\,\psi \cos\frac{2\pi n}{l}\left(x - \varrho_0 \frac{\sin\psi}{\cos\alpha}\right) J_n\left\{\frac{2\pi i n}{l}(R_0 + \varrho_0 \cos\psi)\right\} d\psi =\\ &= \frac{2\pi i\,\varrho_0\, Q_p}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{2\pi n x}{l} H_n^{(1)}\left(\frac{2\pi i n r}{l}\right)\cdot\\ &\quad\cdot\int_0^{2\pi} \cos p\,\psi \cos\left(\frac{2\pi n \varrho_0}{l\cos\alpha}\sin\psi\right) J_n\left\{\frac{2\pi i n}{l}(R_0 + \varrho_0 \cos\psi)\right\} d\psi\,. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Formel (e) des Anhangs wird dies:

$$
\begin{aligned}
V_{3p} = {} & \frac{2\pi i \varrho_0 Q_p}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{2\pi n x}{l}\, H_n^{(1)}\left(\frac{2\pi i n r}{l}\right) \cdot \\
& \cdot \left[J_n\left(\frac{2\pi i n R_0}{l}\right) \int_0^{2\pi} \cos p\,\psi \cos\left(\frac{2\pi n \varrho_0}{l\cos\alpha}\sin\psi\right) \cdot \right. \\
& \cdot ch\left(\frac{2\pi n \varrho_0}{l\cos\alpha}\cos\psi\right) d\psi + \cos\alpha \cdot i J_n'\left(\frac{2\pi i n R_0}{l}\right) \cdot \\
& \left. \cdot \int_0^{2\pi} \cos p\,\psi \cos\left(\frac{2\pi n \varrho_0}{l\cos\alpha}\sin\psi\right) sh\left(\frac{2\pi n \varrho_0}{l\cos\alpha}\cos\psi\right) d\psi \right].
\end{aligned}
$$
[1]

Mit Hilfe der Formeln (f) des Anhangs wird dies:

$$
(25) \quad \left\{
\begin{array}{l}
\text{für } p \text{ gerade:} \\
V_{3p} = \dfrac{2\pi^2 i \varrho_0 Q_p}{l p!} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{2\pi n x}{l}\, H_n^{(1)}\left(\frac{2\pi i n r}{l}\right) \cdot \\
\qquad\qquad \cdot J_n\left(\dfrac{2\pi i n R_0}{l}\right) \left(\dfrac{2\pi n \varrho_0}{l\cos\alpha}\right)^p; \\
\text{für } p \text{ ungerade:} \\
V_{3p} = -\dfrac{2\pi^2 \varrho_0 Q_p}{l p!} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{2\pi n x}{l}\, H_n^{(1)}\left(\frac{2\pi i n r}{l}\right) \cdot \\
\qquad\qquad \cdot J_n'\left(\dfrac{2\pi i n R_0}{l}\right) \cos\alpha \left(\dfrac{2\pi n \varrho_0}{l\cos\alpha}\right)^p. \\
\text{Für } p = 0 \text{ erhalten wir:} \\
V_{30} = \dfrac{4\pi \varrho_0 Q_0}{l} \left[\ln\dfrac{2 x_\infty}{r} + \right. \\
\qquad \left. + \pi i \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{2\pi n x}{l}\, H_n^{(1)}\left(\frac{2\pi i n r}{l}\right) J_n\left(\frac{2\pi i n R_0}{l}\right) \right].
\end{array}
\right.
$$

Ebenso erhalten wir für das Potential von $Q_p \cos p\,\psi$ in einem Punkte ganz innerhalb des Gitters, also $r < R_0 - \varrho_0$, aus (24):

---

[1] *ch* = cos. hyperbolicus; *sh* = sin. hyp.

für p gerade $\neq 0$:

$$V_{3p} = \frac{2\pi^2 i \varrho_0 Q_p}{l p!} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi n x}{l} H_n^{(1)}\left(\frac{2\pi i n R_0}{l}\right) \cdot J_n\left(\frac{2\pi i n r}{l}\right)\left(\frac{2\pi n \varrho_0}{l \cos \alpha}\right)^p;$$

für p ungerade:

$$V_{3p} = -\frac{2\pi^3 \varrho_0 Q_p}{l p!} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi n x}{l} H_n^{(1)}\left(\frac{2\pi i n R_0}{l}\right) \cdot J_n\left(\frac{2\pi i n r}{l}\right) \cos \alpha \left(\frac{2\pi n \varrho_0}{l \cos \alpha}\right)^p. \tag{26}$$

Für $p = 1$ kommt noch hierzu $-\frac{2\pi \varrho_0^3 Q_1}{l R_0}$ als Anteil des ersten Gliedes von (24).

Für $p = 0$ erhalten wir:

$$V_{30} = \frac{4\pi \varrho_0 Q_0}{l}\left[\ln \frac{2 x_\infty}{R_0} + \pi i \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi n x}{l} H_n^{(1)}\left(\frac{2\pi i n R_0}{l}\right) J_n\left(\frac{2\pi i n r}{l}\right)\right].$$

Wir sehen, daß das Potential von Q_0 vollständig übereinstimmt mit dem Potential im Falle eines dünnen Gitterdrahtes, gegeben durch (7) und (8). Die p-te Harmonische der Ladung am Gitter gibt nicht nur Veranlassung zu einer p-ten Harmonischen des Potentials, wie dies bei den Ladungen am Glühdraht und an der Anode der Fall war, sondern zu einer vollständigen Fourierschen Reihe, jedoch ohne konstantes Glied. Das konstante Glied kommt im Potential von Q_0 vor, jedoch ebenfalls innerhalb des Gitters im Potential von $Q_1 \cos \psi$ ungeachtet der Tatsache, daß die ganze Ladung des Gitters jetzt Null ist. Dieser Ausdruck hat eine einfache physikalische Bedeutung. Haben wir nämlich zwei konzentrische Zylinder mit gleichen aber entgegengesetzten Ladungen und berechnen wir das Potential in einem Punkte außerhalb der beiden Zylinder, so ist dies gleich Null. Im innersten Zylinder ist das Potential konstant, jedoch ungleich Null und wird bei gegebenen Ladungen von der Kapazität der beiden Zylinder bestimmt. Bei der Ladung $Q_1 \cos \psi$ finden wir dasselbe: die ganze positive Ladung befindet sich an der Außenseite des Gitters, die ganze negative Ladung an der Innenseite, während die totale Ladung Null ist. Bei den höheren Harmonischen sind positive und negative Ladungen zu sehr verteilt um dieses Resultat geben zu können.

Beim Berechnen des Potentials der Gitterladung wurde von der Annahme $\varrho_0 \ll R_0$ Gebrauch gemacht. Im konstanten Teil dieses Potentials wurden Ausdrücke mit ϱ_0/R_0 nicht vernachlässigt, wohl aber Ausdrücke mit $(\varrho_0/R_0)^2$. In den Harmonischen wurden jedoch die Ausdrücke mit ϱ_0/R_0 vernachlässigt; dies geschah bei der Ableitung der Formel (e) des Anhangs. Dieses wird unten gerechtfertigt bei der Berechnung der Randbedingungen. Der konstante Teil und die Harmonischen des Potentials der Gitterladung kommen nur in den Randbedingungen am Gitter [Gleichungen (30) und (31)] gleichzeitig vor. Hierin wird der Anteil der Harmonischen bereits von der Ordnung ϱ_0/R_0, was deutlich aus der Ableitung von (33) und (34) hervorgeht.

Um das Feld der Ladung des Gitters vollständig zu berechnen, müssen wir noch das Potential in einem Punkte im Gitter bestimmen, also in einem Punkte, wofür $R_0 - \varrho_0 < r < R_0 + \varrho_0$. Sei für solch einen Punkt $r = R_0 + \varrho_0 \cos\beta$, so erhalten wir das Potential durch (24) zu integrieren von $-\beta$ bis β und (23) von β bis $2\pi - \beta$ und die Resultate zu summieren. Das totale Feld bekommen wir dann, indem wir die Summe nehmen der Felder von Glühdraht, Gitter und Anode. Die Randbedingungen auf Glühdraht und Anode können bestimmt werden wie unter I, diejenigen auf dem Gitter, indem man im Potential die Gleichungen des Gitters:

$$r = R_0 + \varrho_0 \cos\beta,$$

$$x = \varrho_0 \frac{\sin\beta}{\cos\alpha},$$

ausgedrückt im Parameter β, substituiert. Für alle Werte von β muß das Potential dann V_3 werden. Man kann hieran genügen, indem man das Potential des Gitters entwickelt in einer Fourierschen Reihe nach β und den konstanten Teil gleich V_3 setzt und alle Harmonischen gleich Null.

Das Beschreiten dieses Weges bietet zwar keine großen Schwierigkeiten, gibt jedoch Anlaß zu einer ziemlich umfangreichen Rechnerei, ohne daß dies zu bedeutenden Resultaten führt. Wir werden dies also hier nicht weiter ausarbeiten, da wir in einer anderen Weise schneller unser Ziel erreichen können. Beschränken wir uns nämlich darauf Q_0 und $Q_1 \cos \psi$ in Rechnung zu stellen, während wir auf die höheren Harmonischen der Gitterladung verzichten, so genügen zwei Randbedingungen für das Gitter. Diese erhalten wir, indem wir aufschreiben, daß in den Punkten $x = 0$; $r = R_0 + \varrho_0$ und $x = 0$; $r = R_0 - \varrho_0$ das Potential V_3 sei. Wenn wir dieses tun, so brauchen wir uns um das Gebiet im Gitter nicht zu bekümmern.

Wir werden jetzt die Randbedingungen niederschreiben. Das Feld wird bestimmt von (3), (5), (6), (25) und (26). Aus dem Endlichbleiben des Potentials, oder was dasselbe ist, aus der Tatsache, daß die totale Ladung des Glühdrahtes, des Gitters und der Anode Null ist, folgt:

$$\varrho b_0 + R B_0 + \frac{\varrho_0 Q_0}{l} = 0 . \tag{27}$$

Aus der Tatsache, daß das Potential am Glühdraht, also $r = \varrho$, und an der Anode, also $r = R$, identisch gleich V_1 bzw. V_2 sein muß für alle Werte von x folgt:

$$\tag{28} \left\{ \begin{aligned} V_1 &= - 4 \pi \varrho b_0 \ln \varrho - 4 \pi R B_0 \ln R - \frac{4 \pi \varrho_0 Q_0}{l} \ln R_0 - \\ &\qquad - \frac{2 \pi \varrho_0^2 Q_1}{l R_0} + C , \\ V_2 &= - 4 \pi \varrho b_0 \ln R - 4 \pi R B_0 \ln R - \frac{4 \pi \varrho_0 Q_0}{l} \ln R + \\ &\qquad + C = C . \end{aligned} \right.$$

$$\tag{29} \left\{ \begin{aligned} &\varrho b_n H_n^{(1)}\left(\frac{2 \pi i n \varrho}{l}\right) + R B_n H_n^{(1)}\left(\frac{2 \pi i n R}{l}\right) + \\ &\quad + \frac{2 \varrho_0 Q_0}{l} H_n^{(1)}\left(\frac{2 \pi i n R_0}{l}\right) + \frac{2 \pi i n \varrho_0^2 Q_1}{l^2} H_n^{(1)\prime}\left(\frac{2 \pi i n R_0}{l}\right) = 0 , \\ &\varrho b_n J_n\left(\frac{2 \pi i n \varrho}{l}\right) + R B_n J_n\left(\frac{2 \pi i n R}{l}\right) + \\ &\quad + \frac{2 \varrho_0 Q_0}{l} J_n\left(\frac{2 \pi i n R_0}{l}\right) + \frac{2 \pi i n \varrho_0^2 Q_1}{l^2} J_n'\left(\frac{2 \pi i n R_0}{l}\right) = 0 . \end{aligned} \right.$$

Das Potential im Punkte $x = 0$; $r = R_0 + \varrho_0$ gleich V_3 gesetzt, gibt:

$$
(30)\left\{
\begin{aligned}
V_3 = & - 4\pi\varrho b_0 \ln R_0 - 4\pi\varrho b_0 \frac{\varrho_0}{R_0} + \\
& + 2\pi^2 i \varrho \sum_{n=1}^{\infty} b_n H_n^{(1)} \left\{ \frac{2\pi i n (R_0 + \varrho_0)}{l} \right\} J_n \left(\frac{2\pi i n \varrho}{l} \right) - \\
& - 4\pi R B_0 \ln R + \\
& + 2\pi^2 i R \sum_{n=1}^{\infty} B_n H_n^{(1)} \left(\frac{2\pi i n R}{l} \right) J_n \left\{ \frac{2\pi i n (R_0 + \varrho_0)}{l} \right\} - \\
& - \frac{4\pi\varrho_0 Q_0}{l} \ln R_0 - \frac{4\pi\varrho_0^2 Q_0}{l R_0} + \\
& + \frac{4\pi^2 i \varrho_0 Q_0}{l} \sum_{n=1}^{\infty} H_n^{(1)} \left\{ \frac{2\pi i n (R_0 + \varrho_0)}{l} \right\} J_n \left(\frac{2\pi i n R_0}{l} \right) - \\
& - \frac{4\pi^3 \varrho_0^2 Q_1}{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} n H_n^{(1)} \left\{ \frac{2\pi i n (R_0 + \varrho_0)}{l} \right\} \cdot \\
& \qquad \cdot J_n' \left(\frac{2\pi i n R_0}{l} \right) + C.
\end{aligned}
\right.
$$

Das Potential im Punkte $x = 0$; $r = R_0 - \varrho_0$ gleich V_3 gesetzt, gibt:

$$
(31)\left\{
\begin{aligned}
V_3 = & - 4\pi\varrho b_0 \ln R_0 + 4\pi\varrho b_0 \frac{\varrho_0}{R_0} + \\
& + 2\pi^2 i \varrho \sum_{n=1}^{\infty} b_n H_n^{(1)} \left\{ \frac{2\pi i n (R_0 - \varrho_0)}{l} \right\} J_n \left(\frac{2\pi i n \varrho}{l} \right) - \\
& - 4\pi R B_0 \ln R + \\
& + 2\pi^2 i R \sum_{n=1}^{\infty} B_n H_n^{(1)} \left(\frac{2\pi i n R}{l} \right) J_n \left\{ \frac{2\pi i n (R_0 - \varrho_0)}{l} \right\} - \\
& - \frac{4\pi\varrho_0 Q_0}{l} \ln R_0 + \\
& + \frac{4\pi^2 i \varrho_0 Q_0}{l} \sum_{n=1}^{\infty} H_n^{(1)} \left(\frac{2\pi i n R_0}{l} \right) J_n \left\{ \frac{2\pi i n (R_0 - \varrho_0)}{l} \right\} - \\
& - \frac{2\pi\varrho_0^2 Q_1}{l R_0} - \frac{4\pi^3 \varrho_0^2 Q_1}{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} n H_n^{(1)\prime} \left(\frac{2\pi i n R_0}{l} \right) \cdot \\
& \qquad \cdot J_n \left\{ \frac{2\pi i n (R_0 - \varrho_0)}{l} \right\} + C.
\end{aligned}
\right.
$$

Hiermit ist das Problem eigentlich gelöst. Um den Gleichungen eine einfachere Form zu geben, nehmen wir an

$$l \ll 2\pi(R_0 - \varrho) \qquad \text{und} \qquad l \ll 2\pi(R - R_0).$$

Lösen wir aus (29) b_n und B_n und führen diese Annäherungen ein, so erhalten wir:

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &\varrho\, b_n H_n^{(1)}\left(\frac{2\pi i n \varrho}{l}\right) + \frac{2\varrho_0 Q_0}{l} H_n^{(1)}\left(\frac{2\pi i n R_0}{l}\right) + \\ &\qquad + \frac{2\pi i n \varrho_0^2 Q_1}{l^2} H_n^{(1)\prime}\left(\frac{2\pi i n R_0}{l}\right) = 0, \\ &R\, B_n J_n\left(\frac{2\pi i n R}{l}\right) + \frac{2\varrho_0 Q_0}{l} J_n\left(\frac{2\pi i n R_0}{l}\right) + \\ &\qquad + \frac{2\pi i n \varrho_0^2 Q_1}{l^2} J_n'\left(\frac{2\pi i n R_0}{l}\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

Diese Gleichungen sind ganz gleich (29), nur ist aus der ersten B_n gestrichen und aus der zweiten b_n, das heißt also: die Ungleichmäßigkeit der Ladung auf der Anode übt keinen Einfluß auf das Feld am Glühdraht aus, und auch umgekehrt. Substituieren wir diese Werte von b_n und B_n in (30) und (31), so stellt sich heraus, daß wir die b und die B, mit Ausnahme von b_0 und B_0, vernachlässigen dürfen, also: die Ungleichmäßigkeit der Ladungen am Glühdraht und an der Anode üben keinen Einfluß auf das Feld beim Gitter aus. Hierdurch haben wir in (27), (28), (30) und (31) vier Gleichungen, woraus b_0, B_0, Q_0 und Q_1 berechnet werden können. Dazu nehmen wir von (30) und (31) die halbe Summe und die halbe Differenz, wobei wir für die Besselschen Funktionen mit großem Argument die Annäherungen einführen. Es entstehen dann:

$$\begin{aligned} V_3 = &- 4\pi\varrho\, b_0 \ln R_0 - 4\pi R B_0 \ln R - \frac{4\pi \varrho_0 Q_0}{l} \ln R_0 - \\ &- \frac{2\pi \varrho_0^2 Q_0}{l R_0} + \frac{2\varrho_0 Q_0}{R_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\frac{2\pi n \varrho_0}{l}} - \frac{\pi \varrho_0^2 Q_1}{l R_0} + C; \end{aligned}$$

und:

$$4\pi\varrho\, b_0 \frac{\varrho_0}{R_0} + \frac{2\pi \varrho_0^2 Q_0}{l R_0} - \frac{\pi \varrho_0^2 Q_1}{l R_0} - \frac{2\pi \varrho_0^2 Q_1}{l R_0} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{2\pi n \varrho_0}{l}} = 0.$$

Nun ist:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\frac{2\pi n \varrho_0}{l}} = \ln \frac{1}{1-e^{-\frac{2\pi\varrho_0}{l}}}$$ 1)

und:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{2\pi n \varrho_0}{l}} = \frac{e^{-\frac{2\pi\varrho_0}{l}}}{1-e^{-\frac{2\pi\varrho_0}{l}}}$$

Dadurch erhalten wir:

$$(33)\quad \left\{ \begin{aligned} V_3 = &- 4\pi\varrho b_0 \ln R_0 - 4\pi R B_0 \ln R - \frac{4\pi\varrho_0 Q_0}{l} \ln R_0 + \\ &+ \frac{2\varrho_0 Q_0}{R_0} \ln \frac{1}{2 \operatorname{sh} \frac{\pi\varrho_0}{l}} - \frac{\pi\varrho_0^2 Q_1}{l R_0} + C; \end{aligned} \right.$$

$$(34)\quad 4\pi\varrho b_0 + \frac{2\pi\varrho_0 Q_0}{l} - \frac{\pi\varrho_0 Q_1}{l} \coth \frac{\pi\varrho_0}{l} = 0\,.$$

(34) sagt, daß $Q_1 = 0$, wenn $2\pi\varrho b_0 = -\frac{1}{2}\,\frac{2\pi\varrho_0 Q_0}{l}$ oder, wenn die Ladung des Glühdrahtes gleich und entgegengesetzt ist der halben Ladung des Gitters, und da die Summe aller Ladungen Null ist, ebenfalls gleich der Ladung auf der Anode. Es befindet sich dann eine ebenso große Ladung an der Innenseite des Gitters als an der Außenseite, wodurch Q_1 Null geworden ist.

Nun lösen wir aus (27), (28), (33), (34) b_0, B_0, Q_0 und Q_1. (33) – (28) liefert:

$$(35)\quad V_3 - V_1 = -4\pi\varrho b_0 \ln \frac{R_0}{\varrho} + \frac{2\varrho_0 Q_0}{R_0} \ln \frac{1}{2 \operatorname{sh} \frac{\pi\varrho_0}{l}} + \frac{\pi\varrho_0^2 Q_1}{l R_0}\,.$$

Aus (27) und (28) B_0 eliminiert, liefert:

$$(36)\quad V_1 - V_2 = 4\pi\varrho b_0 \ln \frac{R}{\varrho} + \frac{4\pi\varrho_0 Q_0}{l} \ln \frac{R}{R_0} - \frac{2\pi\varrho_0^2 Q_1}{l R_0}\,.$$

Aus (34), (35), (36), welche nun B_0 nicht mehr enthalten, folgt, wenn wir:

$$\begin{aligned} \ln \frac{R}{\varrho} \ln \frac{1}{2 \operatorname{sh} \frac{\pi\varrho_0}{l}} + \frac{2\pi R_0}{l} \ln \frac{R_0}{\varrho} \ln \frac{R}{R_0} - \frac{2\varrho_0}{R_0} \ln \frac{1}{2 \operatorname{sh} \frac{\pi\varrho_0}{l}} \cdot \operatorname{th} \frac{\pi\varrho_0}{l} - \\ - \ln \frac{R}{\varrho} \cdot \frac{\pi\varrho_0}{l} \operatorname{th} \frac{\pi\varrho_0}{l} = N \end{aligned}$$

setzen:

---

1) Vgl. zweiten Teil.

$$\frac{4\pi\varrho_0 Q_0}{l} N = (V_3 - V_1)\left(\frac{2\pi R_0}{l}\ln\frac{R}{\varrho} - \frac{4\pi\varrho_0}{l}\operatorname{th}\frac{\pi\varrho_0}{l}\right) -$$

$$- (V_2 - V_1)\left(\frac{2\pi R_0}{l}\ln\frac{R_0}{\varrho} - \frac{2\pi\varrho_0}{l}\operatorname{th}\frac{\pi\varrho_0}{l}\right);$$

$$\frac{2\pi\varrho_0 Q_1}{l} N = \left[(V_3 - V_1)\frac{2\pi R_0}{l}\ln\frac{R_0^2}{\varrho R} - (V_2 - V_1)\left(2\ln\frac{1}{2\operatorname{sh}\frac{\pi\varrho_0}{l}} +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2\pi R_0}{l}\ln\frac{R_0}{\varrho}\right)\right]\operatorname{th}\frac{\pi\varrho_0}{l};$$

$$- 4\pi\varrho\, b_0 N = (V_3 - V_1)\left(\frac{2\pi R_0}{l}\ln\frac{R}{R_0} - \frac{2\pi\varrho_0}{l}\operatorname{th}\frac{\pi\varrho_0}{l}\right) +$$

$$+ (V_2 - V_1)\left(\ln\frac{1}{2\operatorname{sh}\frac{\pi\varrho_0}{l}} + \frac{\pi\varrho_0}{l}\operatorname{th}\frac{\pi\varrho_0}{l}\right).$$

Und hieraus mit (27):

$$- 4\pi R B_0 N = (V_3 - V_2)\left(\frac{2\pi R_0}{l}\ln\frac{R_0}{\varrho} - \frac{2\pi\varrho_0}{l}\operatorname{th}\frac{\pi\varrho_0}{l}\right) +$$

$$+ (V_1 - V_2)\left(\ln\frac{1}{2\operatorname{sh}\frac{\pi\varrho_0}{l}} + \frac{\pi\varrho_0}{l}\operatorname{th}\frac{\pi\varrho_0}{l}\right).$$

Aus der Gleichung für b_0 folgt für den Durchgriff:

$$D = \frac{\ln\dfrac{1}{2\operatorname{sh}\dfrac{\pi\varrho_0}{l}} + \dfrac{\pi\varrho_0}{l}\operatorname{th}\dfrac{\pi\varrho_0}{l}}{\dfrac{2\pi R_0}{l}\ln\dfrac{R}{R_0} - \dfrac{2\pi\varrho_0}{l}\operatorname{th}\dfrac{\pi\varrho_0}{l}}.$$

Für $\pi\varrho_0/l$ klein geht dies über in (17).

Bei der Ableitung wurde von den Annahmen

$$\varrho_0 \ll R_0; \quad l \ll 2\pi(R_0 - \varrho); \quad l \ll 2\pi(R - R_0)$$

Gebrauch gemacht, während von der Ladung des Gitters nur Q_0 und $Q_1 \cos\psi$ berücksichtigt wurden.

Eindhoven (Holland), Juni 1925.

Physikalisches Laboratorium der Philips' Glühlampenfabriken A.-G.

Anhang.

I. Verwenden wir für $J_n\left\{\frac{2\pi i n}{l}(R_0 + \varrho_0\cos\psi)\right\}$ die mit (4) übereinstimmende Entwicklung, so erhalten wir Kugelfunktionen, mit welchen man auch nicht viel anfangen kann. Nun aber $\varrho_0 \ll R_0$ angenommen ist, können wir anders handeln.

Sei $Z_p(x+y)$ eine willkürliche Besselsche Funktion der p-ten Ordnung und nehmen wir an $|y| < |x|$.

Mit der Taylorschen Reihe erhalten wir:

$$Z_p(x+y) = Z_p(x) + \frac{y}{1!} Z_p'(x) + \cdots + \frac{y^n}{n!} Z_p^{(n)}(x) + \cdots$$

Wir können nun alle Ableitungen von Z_p in Z_p und Z_p' ausdrücken:

(a) $$\frac{y^2}{2!} Z_p'' = -\frac{y^2}{2!}\left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) Z_p - \frac{y^2}{2!}\,\frac{1}{x}\, Z_p'.$$

Das letzte Glied darf vernachlässigt werden in bezug auf $\frac{y}{1!} Z_p'$, so daß wir also von: $\frac{y^2}{2!} Z_p''$ nur:

(b) $$\frac{y^2}{2!}\left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) Z_p$$

in Rechnung zu stellen brauchen.

Durch Differentiation von (a) können wir auch die höheren Ableitungen in Z_p und Z_p' ausdrücken. Dabei stellt sich heraus, daß die Ableitungen des letzten Gliedes von (a) vernachlässigt werden dürfen, so daß die Differentiation von (b) genügt:

(c) $$\frac{y^3}{3!} Z_p''' \text{ liefert: } -\frac{y^3}{3!}\left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) Z_p' - \frac{y^3}{3!}\,\frac{2p^2}{x^3} Z_p\,.$$

Das letzte Glied von (c) ist klein in bezug auf den Ausdruck $\frac{y^2}{2!}\,\frac{p^2}{x^2} Z_p$ aus (b), also:

(d) $$\frac{y^3}{3!} Z_p''' \text{ liefert: } -\frac{y^3}{3!}\left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) Z_p'.$$

In dieser Weise finden wir, daß:

$$\frac{y^n}{n!} Z_p^{(n)} \text{ liefert: } -\frac{y^n}{n!}\left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) Z_p^{(n-2)}.$$

Substituieren wir für $Z_p^{(n-2)}$:

$$-\left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) Z_p^{(n-4)} \text{ usw.,}$$

so bekommen wir:

$$\frac{y^{2n}}{(2n)!} Z_p^{(2n)} \text{ liefert: } (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!}\left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)^n Z_p\,;$$

$$\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} Z_p^{(2n+1)} \text{ liefert: } (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) Z_p'.$$

Daß dieses erlaubt ist, kann durch vollständige Induktion bewiesen werden.

Dadurch wird die Reihe:

$$\left\{\begin{aligned} & Z_p(x+y) = \\ & = Z_p(x)\left[1 - \frac{y^2}{2!}\left(1-\frac{p^2}{x^2}\right) + \ldots + (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!}\left(1-\frac{p^2}{x^2}\right)^n + \ldots\right] + \\ & + Z_p'(x)\left[\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!}\left(1-\frac{p^2}{x^2}\right) + \cdots + (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(1-\frac{p^2}{x^2}\right)^n + \cdots\right]; \end{aligned}\right.$$

$$Z_p(x+y) = Z_p(x)\cos\left(y\sqrt{1-\frac{p^2}{x^2}}\right) + Z_p'(x)\frac{\sin\left(y\sqrt{1-\frac{p^2}{x^2}}\right)}{\sqrt{1-\frac{p^2}{x^2}}}\,.$$

Für $|y| \ll 1$ wird dies:

$$Z_p(x+y) = Z_p(x) + y\,Z_p'(x),$$

die ersten Glieder der Taylorschen Reihe.

Für $x \gg p$ bekommen wir:

$$Z_p(x+y) = Z_p(x)\cos y + Z_p'(x)\sin y,$$

welches Resultat wir auch finden bei Anwendung der Annäherungsformeln für großes Argument.

Sind x und y imaginär, so wird dies:

$$Z_p(ix+iy) = Z_p(ix)\,\mathrm{ch}\left(y\sqrt{1+\frac{p^2}{x^2}}\right) + i\,Z_p'(ix)\frac{\mathrm{sh}\left(y\sqrt{1+\frac{p^2}{x^2}}\right)}{\sqrt{1+\frac{p^2}{x^2}}};$$

$$\left|\begin{aligned} & Z_n\left\{\frac{2\pi i n}{l}(R_0+\varrho_0\cos\psi)\right\} = \\ & \qquad = Z_n\left(\frac{2\pi i n R_0}{l}\right)\mathrm{ch}\left\{\frac{2\pi n\varrho_0}{l}\cos\psi\sqrt{1+\left(\frac{l}{2\pi R_0}\right)^2}\right\} + \\ & \qquad\qquad + i\,Z_n'\left(\frac{2\pi i n R_0}{l}\right)\frac{\mathrm{sh}\left\{\frac{2\pi n\varrho_0}{l}\cos\psi\sqrt{1+\left(\frac{l}{2\pi R_0}\right)^2}\right\}}{\sqrt{1+\left(\frac{l}{2\pi R_0}\right)^2}}\,. \end{aligned}\right.$$

Mit $\frac{l}{2\pi R_0} = \mathrm{tg}\,\alpha$:

$$(\mathrm{e})\left\{\begin{aligned} & Z_n\left\{\frac{2\pi i n}{l}(R_0+\varrho_0\cos\psi)\right\} = Z_n\left(\frac{2\pi i n R_0}{l}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{2\pi n\varrho_0}{l\cos\alpha}\cos\psi\right) + \\ & \qquad\qquad + \cos\alpha\cdot i\,Z_n'\left(\frac{2\pi i n R_0}{l}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{2\pi n\varrho_0}{l\cos\alpha}\cos\psi\right)\cdot \end{aligned}\right.$$

II. Die Formel aus Nielsen, Handbuch der Cylinderfunktionen, S. 122 (6) wird für ν gleich einer ganzen Zahl p:

$$\int_0^{2\pi} e^{h\cos\psi}\cos(h\sin\psi)\cos p\psi\,d\psi = \frac{\pi h^p}{p!}$$

und darf nun auch für negative Werte von h verwendet werden.

Für $p = 0$ erhalten wir:

$$\int_0^{2\pi} e^{h\cos\psi}\cos(h\sin\psi)\,d\psi = 2\pi.$$

Wenn wir h durch $-h$ ersetzen und dann die halbe Summe und die halbe Differenz der Integralen nehmen, erhalten wir:

$$(\mathrm{f})\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{2\pi}\cos p\psi\cos(h\sin\psi)\,\mathrm{ch}(h\cos\psi)\,d\psi \begin{cases} = \dfrac{\pi h^p}{p!} & \text{für } p \text{ gerade}\\ = 0 & \text{für } p \text{ ungerade}\end{cases},\\ &\int_0^{2\pi}\cos p\psi\cos(h\sin\psi)\,\mathrm{sh}(h\cos\psi)\,d\psi \begin{cases} = 0 & \text{für } p \text{ gerade}\\ = \dfrac{\pi h^p}{p!} & \text{für } p \text{ ungerade}\end{cases}.\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{g})\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{2\pi}\cos(h\sin\psi)\,\mathrm{ch}(h\cos\psi)\,d\psi = 2\pi,\\ &\int_0^{2\pi}\cos(h\sin\psi)\,\mathrm{sh}(h\cos\psi)\,d\psi = 0.\end{aligned}\right.$$

(Eingegangen 29. September 1925.)

3. *Versuche über den Comptoneffekt;*
von G. Hagen.

(Münchener Dissertation.)

(Hierzu Tafel IV.)

Nach der Compton-Debyeschen Theorie wird angenommen, daß bei der Streuung von Röntgenstrahlen ihre Wellenlänge geändert wird, während nach der klassischen Elektrodynamik hierzu kein Anlaß besteht. Es beruht dies auf der Vorstellung, daß der primäre Röntgenstrahl an einem Elektron aus seiner ursprünglichen Fortpflanzungsrichtung in eine andere umgebeugt wird, wobei das „streuende“ Elektron in Form von Rückstoßenergie den Energie- und Impulsverlust aufzunehmen hat, den der ursprüngliche Strahl bei seiner Richtungsänderung erleidet. Wendet man daher auf den Vorgang, der sich zwischen Primärstrahl, streuendem Elektron und gestreutem Strahl abspielt, Energie- und Impulssatz an, so reichen diese aus, um die Rückstoßenergie des Elektrons zu berechnen bzw. die Energiedifferenz zwischen primärem und gestreutem Röntgenstrahl. Es zeigt sich nämlich, daß die Wellenlänge des gestreuten Röntgenstrahles um einen Betrag $\delta\lambda$ größer sein muß, der sich aus Lichtgeschwindigkeit c, Elektronenmasse m und Planckschem Wirkungsquantum h zusammensetzt:

$$\delta\lambda = \frac{2h}{m \cdot c} \sin^2 \frac{\Theta}{2},$$

wenn man unter Θ den Winkel versteht, um den der Strahl aus seiner ursprünglichen Bahn abgelenkt wird.

Dabei wird das Elektron als frei beweglich angenommen, d. h. es wird von seinen Bindungskräften im Atomverband abgesehen. Es ist daher nach dieser Theorie gleichgültig, in was für einem Medium die Streuung vor sich geht, in jedem Falle wird der sekundäre Strahl um den Betrag

$$\delta\lambda = \frac{2h}{mc} \sin^2 \frac{\Theta}{2},$$

weicher sein als der primäre. Ebenso liegt in $\delta\lambda$ keinerlei Abhängigkeit von der Härte der verwendeten Strahlung.

Nun liegt es natürlich auch durchaus im Bereich der Möglichkeit, daß die Streuung an einem Atome vor sich geht; in diesem Falle wird das Atom infolge seiner tausendmal größeren Masse keinen Impuls aufnehmen und bei der Umlenkung des Lichtstrahles keinen Rückstoß erfahren; die Streuung wird ohne Frequenzverlust vor sich gehen.

Faßt man also die Folgerungen Comptons zusammen, so ergibt sich: Wird monochromatisches Röntgenlicht an irgendeinem Stoff gestreut, so ist die Frequenz eines Teiles des gestreuten Lichtes dieselbe wie vor der Streuung; der restliche Teil hat eine Wellenlänge, die um einen Betrag $\delta\lambda$ größer ist, wobei $\delta\lambda$ selber abhängig ist von dem Winkel, unter dem die Streuung erfolgt, unabhängig dagegen von der Frequenz der Strahlung wie von der streuenden Substanz.

Es ergeben sich noch einige weitere Folgerungen aus dieser Theorie der Streuung, die mit den Gesetzen der klassischen Elektrodynamik in Widerspruch stehen und so eine Prüfung der Fruchtbarkeit dieser lichtquantentheoretischen Überlegungen gestatten würden; sie kommen aber für diese Arbeit nicht weiter in Betracht und seien nicht weiter erwähnt (12).

Compton hat auch seine Überlegungen auf den Fall ausgedehnt, daß die Streuung an gebundenen Elektronen stattfindet. In diesem Fall kommt noch eine Abhängigkeit von dem Atomgewicht der streuenden Substanz, sowie der Härte der verwendeten Strahlung in die Formel für $\delta\lambda$ hinein. Bezeichnet man nämlich die der Ionisationsenergie des Elektrons, an dem die Streuung stattfindet, entsprechende Wellenlänge mit λ_J, mit λ die Wellenlänge des Primärstrahles, so ist

$$\delta\lambda = \frac{\lambda^2}{\lambda_J - \lambda} + \frac{2h}{mc}\sin^2\frac{\Theta}{2}\,.$$

Wieweit diese Theorie aber eine experimentelle Bestätigung besitzt, ist momentan nicht ganz klar (1) (2).

Die Richtigkeit der Comptonschen Theorie auf röntgenspektroskopischem Wege zu prüfen, wurden verschiedene Versuche unternommen; die Aufgabe war festzustellen, ob monochromatisches Röntgenlicht — man verwendet dazu die Linien der Eigenstrahlung der Antikathode der Röntgenröhre — bei der Streuung in seiner Wellenlänge eine Änderung erfährt oder nicht. Es ist also die Wellenlänge der Eigenstrahlung der Antikathode einmal zu messen, wenn sie direkt in den

Spektrographen fällt, und mit der Wellenlänge zu vergleichen, die diese Linien haben, wenn sie zuvor an einem Streumaterial unter einem bestimmten Winkel gestreut werden. Eine exakte Wellenlängenmessung an einer so wenig intensiven Strahlung, wie es Streustrahlung ist, bietet aber nicht unerhebliche Schwierigkeiten, weil man an die Betriebssicherheit und Belastbarkeit der Röntgenröhre die höchsten Anforderungen stellen muß.

Die auf der Ionisationswirkung von Röntgenstrahlen beruhenden Methoden der Wellenlängenmessung wandten an:

Compton und seine Mitarbeiter (1)
Duane und seine Mitarbeiter (9)

Die photographische Methode benutzten:

Ross (6)
Bergen-Davis (0)
de Broglie und Dauvillier (8)
Becker (7)
Müller (0)

Nur von den ersten drei Autoren drangen systematische Untersuchungen in die weitere Öffentlichkeit, und die erheblichen Mißstimmigkeiten, die sich zunächst ergaben und bis in die ersten Monate dieses Jahres hinein dauerten und die Richtigkeit der Comptonschen Theorie als völlig zweifelhaft erscheinen ließen, gaben den Anlaß zu vorliegender Arbeit.

Während nämlich die Messungen Comptons sowie die sehr schönen röntgenspektroskopischen Aufnahmen von Ross die Annahmen von Compton bestätigten, befanden sich die Messungen, die Duane und seine Mitarbeiter (9) veröffentlichten, hierzu in vollkommenem Widerspruch und es erschien lange Zeit hindurch völlig zweifelhaft, ob der Comptoneffekt wirklich in das Reich der Wirklichkeit gehörte oder nicht. Anfang des Jahres hat Duane dann schließlich seine Behauptungen vollkommen zurückgenommen und erklärt, daß seine früheren Messungen durch irgendwelche Fehlerquellen entstellt worden seien und er sich jetzt den Resultaten Comptons anschlösse.

Um nun einige Klärung in das damals sehr widerspruchsvolle Tatsachenmaterial zu bringen, wurde von Grund aus eine Untersuchung des Comptoneffektes unternommen, und der eingeschlagene Weg war derselbe, wie der von Ross benutzte.

Röntgenstrahlen, die unter einem bestimmten Winkel die Röhre verließen, fielen auf einen Streukörper, von dem aus die Streustrahlen in einen Spektrographen gelangten. Der Spektrograph war so justiert, daß er eine etwa 30 XE nach beiden Seiten hin reichende Umgebung des K_α-Dubletts der Antikathodeneigenstrahlung abzubilden imstande war. Dadurch wurden zugleich auf der Platte die mit veränderter wie unveränderter Wellenlänge gestreuten Linien abgebildet, und in dem Abstand, mit dem das 4 XE auseinanderliegende K_α-Dublett getrennt wurde, war zugleich ein Maßstab für die Größe der Verschiebung gegeben, der von den übrigen Versuchsbedingungen unabhängig war. Um das auch auf der Streuaufnahme getrennt erscheinende K_α-Dublett stärker zu markieren, wurde zum Schluß der Aufnahme der untere Teil der Platte mit einem dicken Bleischirm abgedeckt und einige Minuten lang die direkt aus der Röhre kommende Strahlung in den Spektrographen fallen gelassen. Auf diese Weise war auf der Platte die mit unveränderter Frequenz gestreute Linie in ihrem oberen Teile verstärkt, was einerseits für die Ausmessung günstig war, andererseits war dadurch eine Garantie gegeben, daß nicht schon diese Linien eine andere Frequenz besitzen als die der ungestreuten Strahlen, indem sie sich scharf überdeckten. Neben dem K_α-Dublett zeigte sich dann über die ganze Platte hinweggehend das nicht mehr getrennt erscheinende Dublett mit der um den Betrag der Comptonschen Theorie größeren Wellenlänge.

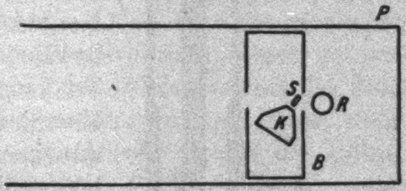
Da sich infolge des relativ großen Dispersionsgebietes des Spektrographen bei der Aufnahme der direkten Strahlung auch die nächste Umgebung des K_α-Dubletts im kontinuierlichen Spektrum abbildet, erscheint auch die mit veränderter Wellenlänge gestreute Linie des Comptoneffektes in ihrem oberen Teile etwas stärker geschwärzt, indem sich dort die Schwärzung noch überlagert, die das kontinuierliche Spektrum hervorruft.

Daß das mit veränderter Frequenz gestreute K_α-Dublett nicht mehr getrennt erscheint, hat seinen Grund darin, daß, um günstigere Expositionszeiten zu bekommen, der Streukörper ziemlich schräg anvisiert wurde, so daß der Streuwinkel nicht streng definiert war, sondern einen Bereich von etwa 10° umschloß; dadurch tritt infolge der Gleichung:

$$d\,\delta\,\lambda = \frac{h}{m\,c}\sin\Theta\cdot d\,\Theta$$

die verschobene Linie im Streuspektrum als ein mehr oder weniger verwaschenes Band auf, während die unveränderte Wellenlänge infolge der größeren Strahlungsmenge, die vom Streuer ausgeht, stärker hervortreten muß. Es sei aber gleich hier bemerkt, daß ein Öffnungswinkel von 10° nur eine Verbreiterung der verschobenen Komponente von etwa 5 XE verursacht, die also noch nicht sehr ungünstig wirken kann. Hätte das Dublett noch getrennt erscheinen sollen, so wäre eine vielfach längere Belichtungszeit erforderlich gewesen, was in Anbetracht der schon so 50stündigen Exposition nicht wünschenswert war. Als Reflexionskristall diente ein Kalkspat von etwa 1,8 : 2 cm Oberfläche, der recht gute Bilder gab. Zwei seiner Spaltflächen waren poliert, was für die Justierung des Spektrographen angenehm ist. Der Spektrograph hatte zwei Spalte aus Blei, deren Weite so gewählt wurde, daß einerseits das K_α-Dublett noch aufgelöst wurde, andererseits der bei feststehendem Kristall abgebildete Bereich hinreichend groß war. Zum Schutze gegen allgemein gestreute Strahlung war der Spektrograph ganz in 4 mm dickes Blei eingekapselt, so daß nur durch die Spalte Strahlung in den Spektrographen gelangen konnte. Gerade bei Benutzung harter Strahlen ist der Schutz gegen allgemein diffus gestreute Strahlung sehr wichtig.

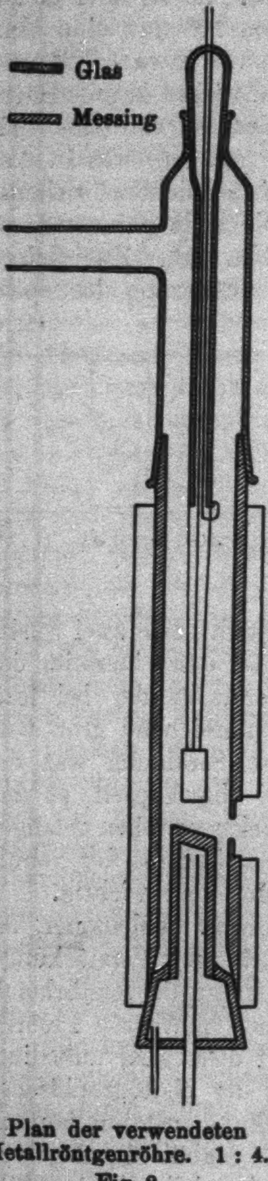
R **Röntgenröhre**
S **Streukörper**
K **Spektrograph**
P **Bleikasten, 2 m Höhe, 1 m Breite, 2,50 m Länge**
B **Bleischirme, um Streukörper und Spektrographen vor diffus gestreuter Strahlung zu schützen**



Anordnung der Apparatur bei Messungen mit harten Strahlen. 1 : 50.
Fig. 1.

Benutzt wurden Neo-Platten der Firma Schleussner, die sich als die geeignetsten erwiesen. Versuche, mit Verstärkungsschirmen zu arbeiten, hatten keinerlei Erfolg; die verstärkende Wirkung eines Schirmes beruht auf seiner sichtbaren Fluoreszenz, bei sehr geringen Intensitäten liegt diese aber unbedingt unter dem Schwellenwert der Anregung der photographischen Platte, so daß keinerlei verstärkende Wirkung zustande kommt.

Als Hochspannungsquelle wurde eine Stabilivoltanlage von Siemens und Halske benutzt; es wird dabei mittels Glühventilen, Drosselspulen und Kondensatoren der hochgespannte Wechselstrom des Transformators gleichgerichtet und seine Schwankungen werden ausgeglichen. Die Kondensatoren hatten zusammen eine Kapazität von 100000 cm und waren auf 150000 Volt durchschlagssicher. Da der Transformator für röntgentherapeutische Zwecke gebaut, sich nicht recht zum Betrieb bei Spannung unter 100 KV und hohen Stromstärken eignete, wurde an seiner Stelle ein Transformator benutzt, der zu einer „Ideal"-Apparatanlage gehörte (Reiniger, Gebbert und Schall) und der sich in Verbindung mit den Kenotrongleichrichtern natürlich besser bewährte als mit dem rotierenden Funkengleichrichter, weil die unnützen Energieverluste durch die Funkenstrecken vermieden werden. Die Anlage gab so im Dauerbetrieb bis zu $2^1/_2$ KW an der Röhre. Als Strahlenquelle wurde bei den Arbeiten mit mittelharten Strahlen eine Metallröntgenröhre verwendet, die in der Werkstatt des Institutes hergestellt, sich sehr gut bewährte. Sie hat gewisse Ähnlichkeit mit den Typen, wie sie in letzter Zeit von Wever (11) und Lange (10) beschrieben worden sind. Einige Einzelheiten seien hier aber trotz der genannten eingehenden Beschreibung doch gegeben.



Plan der verwendeten Metallröntgenröhre. 1 : 4.
Fig. 2.

Die Röhrenwand bildete ein 4 cm weites nahtlos gezogenes Messingrohr von etwa 30 cm Länge und $^1/_2$ cm Wandstärke, das außen mit einem Kühlmantel umgeben war. Die große Wandstärke der Röhre ermöglichte es, die Auflagefläche für das Aluminiumfenster direkt in die Wandung der Röhre einzufräsen; es wurde einfach mit Pizein auf dieselbe aufgekittet. Die Kathode lag auf hoher Spannung, sie war mit einem Glasrohr, an das auch die Pumpleitung angeblasen war, isoliert. Gekühlt wurde die Kathode nicht; sie war mittels eines Schliffes am oberen Ende des Glasrohres auswechselbar, ohne daß dadurch die Pumpleitung entfernt zu werden brauchte. Das Glasrohr war seinerseits mit einem Schliff auf das Messingrohr der Röhrenwandung angekittet und aufgepaßt. Die Antikathode — ein Kupferblock, in dem an seiner Stirnseite eine Platte aus dem zu untersuchenden Material eingeschweißt war und der innen mit Wasser durchspült wurde — war in einen Messingkonus eingelötet, der seinerseits eingekittet wurde. Auf diese Weise befand sich im Hochvakuum nur eine Lötstelle, die ein leichtes Auswechseln des Antikathodenmateriales gestattete. Lötstellen bilden häufig Anlaß zu allen möglichen Störungen und sind deshalb im Hochvakuum besser zu vermeiden. Sie sind häufig undicht oder werden es mit der Zeit, amalgamieren sich mit Quecksilberdämpfen und geben dann Gas ab. Ein Vorteil war die zylindrische Bauart der Röhre, die ein leichtes Reinigen ermöglichte.

Für die Messungen bei hohen Spannungen wurden Röhren aus Glas benutzt, bei denen die Kühlung der Antikathode lediglich durch Ausstrahlung geschah; dabei kam die Antikathode bis auf Weißglut. Zuerst wurde ein unbrauchbar gewordenes Ventilrohr der Stabilivoltanlage etwas umgebaut, indem die Kathode verändert und wie an der Metallröhre mit einem Schliff versehen wurde, der ein Auswechseln des Glühfadens ermöglichte. Diese Röhre vertrug im Dauerbetrieb eine Belastung mit $4^1/_2$ MA bei 135 KV und hatte eine Lebensdauer von 150 Stunden; als dann etwas an ihr abgeändert werden sollte, zersprang sie bei dem Glasblasen, weil das Glas eben durch den langen Gebrauch doch schon angegriffen war. Die zweite Röhre wurde mit 6—7 MA und 175 KV belastet; sie war größer dimensioniert und den technischen Therapie-Röntgenröhren nachgebildet, nur daß sie ebenfalls an der Pumpe lag und eine auswechselbare Kathode hatte. Leider brach sie infolge übermäßiger Erhitzung des Glaskolbens schon nach 6stündigem Betrieb zusammen, nachdem bei den Prüfversuchen Spannungen bis zu 230 KV erreicht worden waren. Es dürfte daher wohl doch zweckmäßig sein, für derartige Versuche die

Metallröhre etwas abzuändern, indem sie nämlich in der bisher verwendeten Form für Spannungen über 60 KV nicht mehr durchschlagsicher war, was sich aber durch Anwendung von Porzellan als Isolationsmittel wohl erzielen lassen dürfte. Man kann eben doch einer Metallröhre im Dauerbetrieb höhere Energien zumuten als einer Röhre aus Glas, wobei man sich allerdings auf die Anwendung niederer Spannungen beschränken müßte (etwa bis 120 KV). Sie sind auch aus dem Grunde günstiger, weil man viel näher an den Brennfleck mit dem Spektrographen usw. heranrücken kann.

Als Pumpe diente zuletzt eine Stahlpumpe von Leybold nach Gaede. Es ist hier der Ort, gegen ein weit verbreitetes Vorurteil Stellung zu nehmen, das behauptet, die Stahlpumpe pumpe zwar sehr schnell aber nicht hoch genug, um mit ihr Coolidgevakuum zu erreichen. Die Pumpe war dauernd sechs Monate in Betrieb und mußte während dieser Zeit zweimal gereinigt werden, eine Arbeit, die mit Abschneiden und wieder Anblasen an die Apparatur vielleicht 2 Stunden in Anspruch nahm. Sonst pumpte sie stets tadellos und zwar mit Ölpumpenvorvakuum; es wurden, wie erwähnt, Spannungen bis zu 200 KV und darüber erreicht und die Lebensdauer der verwendeten Glühfäden der Röntgenröhre — mit der Hand hergestellte Spiralen aus 0,25 mm dickem Wolframdraht — war etwa 200 Stunden bei $4^{1}/_{2}$ MA und 135 KV Belastung oder dieselbe Zeit bei 40 MA und 50 KV; sie waren auch dann noch nicht merklich abgebrannt und wurden durch neue ersetzt, weil die Röhre sowieso geöffnet werden mußte. Daß das ein glänzendes Zeugnis für die Güte des erreichten Vakuums ist, braucht nicht betont zu werden; gekühlt wurde allerdings mit flüssiger Luft oder Kohlensäurekältemischung zum Ausfrieren der Quecksilberdämpfe.

Nun zu den eigentlichen Messungen! Es galt nach drei Richtungen die Eigenschaften der nach der Comptonschen Theorie mit Frequenzverlust gestreuten Linie zu untersuchen. Ihre Wellenlänge soll:

1. unabhängig vom Streumaterial sein,
2. unabhängig von der Härte der verwendeten Strahlung,
3. abhängig vom Winkel sein, unter dem die Streuung stattfindet.

Das Messungsmaterial ist in der Tabelle zusammengestellt.

verw. Antikathode	Wellenlänge	Streuer	Streuwinkel	Δ_a	$\Delta\lambda/\Delta_a$	$\Delta\lambda$ beobacht.	$\Delta\lambda$ berechnet
Mo	708 XE	Paraffin	54°	4,3 XE	2,5	10,8 XE	9,0 XE
„	708	„	92°	4,3	6,07	26,1	24,8
„	708	„	114°	4,3	8,0	34,4	33,8
Rh	612	„	85°	4,3	5,4	23,2	22,3
Ag	562	„	83°	5	4,8	24	21,8
Ta	220	„	90°	24	—	—	24
W	209	„	90°	24	—	—	24
Mo	708	Li	93°	4,3	6,2	26,6	25,2
Mo	708	Mg	87°	4,3	5,8	25	22,8

Hier sei Folgendes erwähnt:

Um die erste Eigenschaft zu prüfen, wurden Aufnahmen von Molybdäneigenstrahlung gemacht unter Benutzung von Lithium, Paraffin und Magnesium als Streumaterialien. Die Belichtungszeiten betrugen jeweils 45—50 Stunden bei 55 KV und 40 MA. Es zeigte sich in jedem Falle ein Resultat, das im Einklang mit der Comptonschen Theorie stand. Neben der mit unveränderter Wellenlänge gestreuten Strahlung zeigte sich eine Linie, die eine um den Betrag der Comptonschen Theorie größere Wellenlänge hatte. Dieselbe war der Intensität nach bei Magnesium schwächer als die mit unveränderter Frequenz gestreute Linie, in den anderen Fällen war sie erheblich stärker.

Um die Abhängigkeit von der Größe des Streuwinkels festzustellen, wurden ebenfalls bei Molybdänstrahlung drei Aufnahmen geamcht; die Winkel waren 54°, 92°, 114°; es zeigte sich auch hier das erwartete Resultat.

Um die Unabhängigkeit von der Wellenlänge der verwendeten Strahlung zu untersuchen, wurden als Antikathodenmaterial benutzt: Molybdän, Rhodium, Silber, Tantal, Wolfram.

Die drei ersten Metalle zeigten Ergebnisse, wie sie mit der Theorie im Einklang stehen; dagegen konnte weder bei Tantal noch auch bei Wolframstrahlung bei Benützung von Paraffin als Streuer ein Comptoneffekt gefunden werden. Es sei daher auf diesen Punkt etwas näher eingegangen.

Zweimal wurden Messungen bei hohen Spannungen unter veränderten Versuchsbedingungen ausgeführt. Die ersten

Messungen bei Tantalstrahlung, die späteren bei Wolframstrahlung. Es wurde bereits bemerkt, daß bei den Messungen mit mittelharten Strahlen ein Kegel von etwa 10° Öffnungswinkel den Streukörper traf. Hier bildete die Größe des Aluminiumfensters der Röntgenröhre die Begrenzung des Streukegels, indem durch die dicke Messingwand der Röhre so gut wie keine Strahlung dringen konnte. Die Glasröhre hingegen verließen natürlich Strahlen nach allen Richtungen. Bei den ersten Messungen mit Tantalstrahlung wurde der Streukörper einfach in eine solche Entfernung von der Antikathode gebracht, daß er von den Strahlen, die von ihr ausgingen, unter einem räumlichen Winkel von 8—10° Öffnung getroffen wurden. Dabei befand sich die ganze Röhre sowie Streukörper und Spektrograph in einem großen Bleikasten von den Abmessungen 2 : 1 : 2,50 m, um den Experimentierenden vor Strahlen zu schützen. Es wurden dabei zwei Aufnahmen gemacht, von denen die bessere in der Reproduktion wiedergegeben ist. Die Belichtungszeit betrug 50 Stunden bei $4^1/_2$ MA und 135 KV Belastung. Von einer veränderten Wellenlänge ist auf diesen Aufnahmen so gut wie nichts zu erkennen. Man sieht auf der Platte deutlich die mit unveränderter Wellenlänge gestreute K_α-Linie, sowie ebenfalls gestreut die als zweite Standardlinie dienende K_β-Linie. Letztere hat von der K_α-Linie einen Abstand von 24 XE nach der kurzwelligen Seite hin, dieselbe Größe, um die die nach der Comptonschen Theorie zu erwartende veränderte Wellenlänge größer sein soll. Dabei ist die Intensität der K_β-Linie fünfmal schwächer als die der K_α-Linie.

Es wurde indessen der Einwand gemacht, die diffus am Bleikasten gestreuten Röntgenstrahlen hätten den Streukörper getroffen und infolge des undefinierten Streuwinkels nur zur Verstärkung der unveränderten Wellenlänge beigetragen.

Es läßt sich aus der Literatur entnehmen, daß bei den Messungen von Compton, Ross und anderen in ähnlicher Weise Röntgenröhre und Streukörper in Bleikästen eingeschlossen waren, ohne daß sich ein störender Einfluß bemerkbar gemacht hätte. Es wurden indessen unter Vermeidung dieser Unkorrektheit die Versuche wiederholt. In den Strahlengang wurden zwischen der Röntgenröhre und Streukörper entsprechende Bleiblenden gebracht, die durch ein Fenster die

Strahlung unter einem Öffnungswinkel von 8° auf den Streukörper fallen ließen. Streuer und Spektrograph befanden sich dabei vollkommen in 4 mm starkes Blei eingeschlossen. Nach Durchsetzen des Streukörpers traten die Röntgenstrahlen durch ein zweites Fenster wieder ins Freie; diffus am Bleikasten gestreute Strahlung dürfte infolge der Einhüllung des Streukörpers durch die Bleischirme nur in ganz verschwindendem Maße denselben getroffen haben. Es läßt sich auch abschätzen, daß die Strahlung, die in dem Streukörper nach den übrigen Seiten gestreut, nach nochmaliger Streuung in den Spektrographen gelangt sein kann, das Resultat höchstens um 10 Proz. verfälscht haben kann. Trotzdem zeigte auch diese Platte genau dasselbe Ergebnis wie die erste, ohne diese Vorsichtsmaßregeln aufgenommene Platte. Daß das Dispersionsgebiet des Spektrographen hinreichend groß war, hatten Vorversuche gezeigt. Es ließ sich also kein Comptoneffekt bei diesen Bedingungen beobachten, obwohl er noch zu beobachten gewesen wäre, wenn das Verhältnis der Intensitäten der veränderten zur unveränderten Wellenlänge 1 : 5 gewesen wäre.

In einer neueren Arbeit gibt Duane an: auch bei harter Strahlung den Comptoneffekt jetzt gefunden zu haben; und zwar soll die verschobene Wellenlänge gegenüber der unverschobenen dort noch stärker sein als bei niedrigen Spannungen. Ross und Webster veröffentlichen ebenfalls als vorläufiges Resultat von Streuversuchen mit harten Strahlen mit der Ionisationskammer gemessene Kurven, in denen die veränderte Wellenlänge ebenfalls auftritt. Diese Angaben stehen mit der vom Verfasser erhaltenen photographischen Aufnahme in Widerspruch. Ein Grund dafür läßt sich einstweilen nicht angeben.

Der Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft ist das Physikalische Institut der Universität München für den Ankauf einer Hochspannungsanlage zu Dank verpflichtet; die Firma Siemens und Halske hatte die Freundlichkeit, bis zur Lieferung derselben eine „Stabilivoltanlage“ dem Institut zur Verfügung zu stellen. Die Firma Reiniger, Gebbert und Schall, Erlangen, hat schon seit längerem dem Institute einen „Idealapparat“ zur Benützung überlassen, der hier wertvolle Dienste leistete. Besonderes Entgegenkommen bei der Herstellung von Antikathoden aus wertvollen Materialien

zeigten die Firmen Heräus, Hanau und E. Gundelach, Gehlberg. Nicht unerwähnt sei auch die Röntgenfabrik Niggl, München, die durch den Bau einer Spezialröntgenröhre diese Arbeit unterstützte.

Hrn. Geheimrat Prof. Dr. W. Wien, München, der die Anregung zu dieser Arbeit gab, ihren Fortgang durch dauerndes Interesse und viele Ratschläge sowie durch Überlassung vieler Apparate förderte, sei hier besonderer Dank ausgesprochen. Manch wertvollen Rat gab Hr. Dr. Fritz Kirchner, Assistent am Münchener Physikalischen Institut.

München, den 20. Juni 1925.

Literaturverzeichnis.

1. Compton, Phys. Rev. 18. S. 96. 1921; 19. S. 265. 1922; 21. S. 207. 483. 1923; 24. S. 168. 1924; Bul. Nat Res. Coun. Washington 20. S. 10. 1922; Phil. Mag. 46. S. 897. 1923; Proc. Nat. Ac. 10. S. 271. 1923; 10. S 370. 1924; 11. S. 117. 1925.

2. Debye, Phys. Zeitschr. 24. S. 161. 1923.

3. Gray, Phil. Mag. 26. S. 611. 1913.

4. Florance, Phil. Mag. 27. S. 225. 1914.

5. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, 4. Aufl. S. 57, 758.

6. Ross, Phys. Rev. 22. S. 201. 1923; Proc. Nat. Ac. 9. S. 246. 1923; 10. S. 304. 1923; 11_1 S. 56. 224. 1923.

7. Becker, Proc. Nat. Ac. 10. S. 342. 1924.

8. de Broglie, Compt. rend. 178. S. 908. 2076. 1924; 179. S. 12. 1924.

9. Duane, Proc. Nat. Ac. 9. S. 413. 1923; 10. S. 41. 92. 148. 1924; 11. S. 25. 374. 1925.

10. Lange, Ann. d. Phys. 76. S. 457. 1925.

11. Wever, Zeitschr. f. Phys. 14. S. 410. 1923.

12. Wentzel, Phys. Zeitschr. 26. S. 436. 1925.

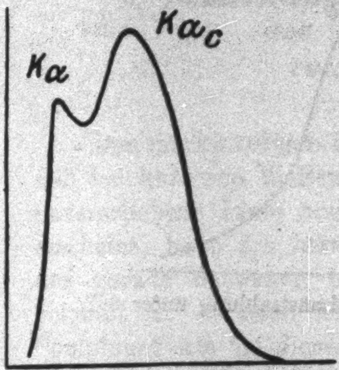
(Eingegangen 14. Juli 1925.)

Nachtrag.

Es war leider erst nach Fertigstellung des Drucksatzes vorliegender Arbeit möglich, Photogramme von den Röntgenspektrogrammen zu erhalten. Die Photogramme, die mit einem

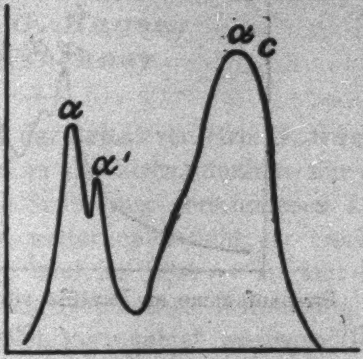
Kochschen Photometer des Münchner Physikalischen Institutes angefertigt worden sind, sind hier zum Teil wiedergegeben.

Schlüsse auf das Intensitätsverhältnis der unverschobenen zur verschobenen Linie zu ziehen, dürfte nach Ansicht des



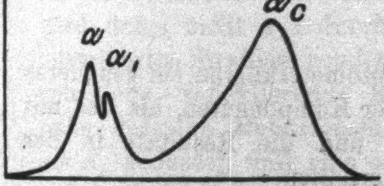
Streuaufnahme an Paraffin von Molybdänstrahlung unter 54°.

Fig. 1.



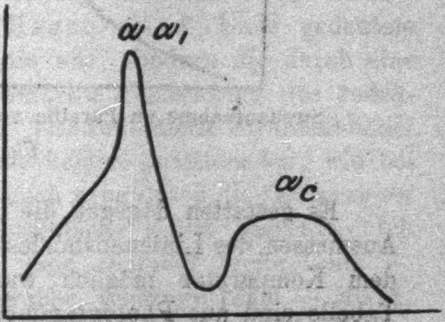
Streuaufnahme an Paraffin von Molybdänstrahlung unter 92°.

Fig. 2.



Streuaufnahme an Paraffin von Molybdänstrahlung unter 114°.

Fig. 3.

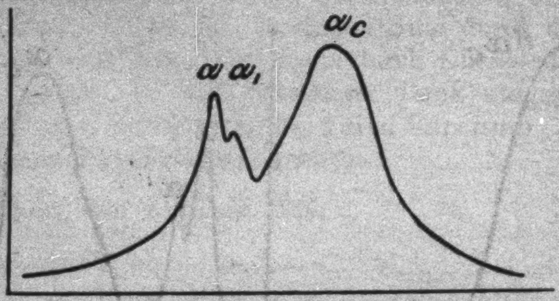


Streuaufnahme an Magnesium von Molybdänstrahlung unter 87°.

Fig. 4.

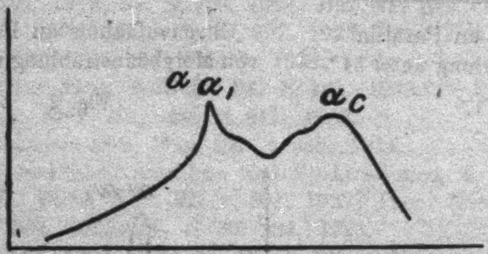
Verf. aber nicht zulässig sein, da man nicht annehmen kann, daß beide Linien unter gleich günstigen Reflexionsbedingungen reflektiert werden, wenn man die Methode mit feststehendem Kristall benutzt. Eine exakte Klärung der Frage nach dem

Intensitätsverhältnis beider Linien könnte man nur aus Aufnahmen erhalten, die unter Benutzung der Drehkristall- oder Seemannmethode gemacht worden sind, bzw. aus Messungen mit Ionisationskammern.



Streuaufnahme an Paraffin von Rhodiumstrahlung unter 86°.

Fig. 5.



Streuaufnahme an Paraffin von Silberstrahlung unter 88°.

Fig. 6.

Es gestatten dagegen die Photometerkurven ein genaueres Ausmessen des Linienabstandes der Komponenten, als das mit dem Komparator möglich war, und die Resultate in der Tabelle sind aus Photogrammen erhalten.

Würzburg, 22. Oktober 1925.

4. *Bemerkung zur vorstehenden Arbeit des Hrn. G. Hagen;*

von F. Kirchner.

Den merkwürdigen Befund der Arbeit von Hrn. G. Hagen, daß bei kürzeren Wellenlängen in der Streuaufnahme nur eine unverschobene Linie und keine Spur einer verschobenen Linie erscheint, habe ich inzwischen weiter untersucht; er erschien uns gerade deswegen wichtig, weil bis jetzt — so weit hier bekannt ist — noch keine photographischen Aufnahmen des Comptoneffekts in diesem Wellenlängengebiet vorliegen (Ionisationskammer-Messungen kann man wohl nach den jahrelangen und jetzt noch nicht aufgeklärten Mißerfolgen von W. Duane und seinen Mitarbeitern in diesem Wellenlängengebiet kaum noch als genügend zuverlässig ansehen).

Bei der weiteren Untersuchung hat sich leider herausgestellt, daß die von Hrn. Hagen als K_α-Linie gedeutete Linie offenbar nicht diese Linie war, sondern die durch eine merkwürdige Fokussierung verstärkte Begrenzung des reflektierten Strahlenbündels selbst. Das reflektierte Strahlenbündel wird dabei nicht nur durch die beiden Spaltblenden, wie bei mittelharten Strahlen, sondern auch noch durch die *fast streifend* getroffene, reflektierende Kristallfläche selbst begrenzt. Ich habe dasselbe Reflexionsbild (eine ziemlich breite Linie — als K_α gedeutet, und eine schwache, schärfere Linie — als K_β gedeutet) durch geeignete Wahl der Spaltweiten leicht wieder erhalten von einem anderen Kristall mit gleich langer reflektierender Fläche. Die wirkliche K_α-Linie habe ich mit wesentlich längerer reflektierender Fläche bei denselben Spaltweiten als eine Linie von derselben Schärfe erhalten, wie die als K_β gedeutete Linie. Durch genaue Ausmessung und eingehende Untersuchung der Abhängigkeit der Linienorte von der Kristallstellung konnte die wirkliche K_α-Linie einwandfrei von den falschen „Begrenzungslinien“ unterschieden werden. (Diese

Linien haben hier wegen der größeren Öffnung des reflektierten Bündels *größeren* Abstand als bei kurzer Kristallfläche). Die Intensität der wirklichen K_α-Linie ist freilich bei einer Röhrenspannung von 150 Kilovolt gegenüber dem kontinuierlichen Spektrum in der Umgebung viel schwächer, als die Begrenzungslinie gegenüber dem unbelichteten Teil der Platte; eine photographische Aufnahme des Streuspektrums mit einer technischen Röntgenröhre erscheint deshalb auch bei 50stündiger Belichtungszeit vorläufig aussichtslos. (Versuche mit einer an der Pumpe liegenden Laboratoriumsröhre, bei der der Streuer wesentlich näher an den Brennfleck der Antikathode herangebracht werden könnte, führten bisher zu keinem Erfolg.)

Ob in den Hagenschen Streuaufnahmen von Tantal- und Wolframstrahlung die K_α-Linie überhaupt vorhanden war, läßt sich nicht sicher feststellen — die schwächere, als K_β gedeutete, Linie könnte vielleicht K_α gewesen sein; als sicher möchte ich aber behaupten, daß die stärkere Linie nur die Begrenzung des reflektierten Strahlenbündels nach langen Wellen bedeutete, daß also noch langwelligere Strahlung nicht mehr reflektiert werden konnte. Aus diesen Aufnahmen läßt sich also jedenfalls nicht der Schluß ziehen, daß der Comptoneffekt bei Ta- und Wo-Strahlung nicht existiert.

München, Phys. Inst. d. Univ., November 1925.

(Eingegangen 23. November 1925.)

5. *Bemerkung zur Arbeit des Hrn. Joh. Dejmek: „Wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungen zur Verzögerungszeit bei Funkenentladungen“* [1]; *von Werner Braunbek.*

Hr. J. Dejmek behauptet in der Einleitung zu der oben zitierten Abhandlung, daß zwischen der von Hrn. M. v. Laue[2]) theoretisch abgeleiteten Verteilungsfunktion der Verzögerungszeiten bei der Funkenentladung und der von Hrn. K. Zuber[3]) gemessenen Verteilung eine quantitative Übereinstimmung nicht bestehe. Er stützt diese Behauptung auf die Überlegung, daß in der von v. Laue, a. a. O., abgeleiteten Gleichung

$$\ln n_t^\infty = -\beta p (t - t_0)$$

β und p Wahrscheinlichkeitszahlen seien, die ihrer Natur nach nicht größer als 1 sein könnten, während der Versuch Nr. 36 bei Zuber für das Produkt βp den Wert 1,86 ergebe.

Diese Überlegung ist unrichtig. Man erkennt dies schon aus einer einfachen Dimensionsbetrachtung der genannten Gleichung. Der Logarithmus von n_t^∞ ist eine reine Zahl; also *können* nicht β *und* p Wahrscheinlichkeitszahlen sein, da sonst die rechte Seite der Gleichung, auf der noch $(t - t_0)$ steht, die Dimension einer Zeit hätte.

Tatsächlich ist auch bei v. Laue zwar p eine Wahrscheinlichkeitszahl, nämlich die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein etwa gebildetes Ion günstige Bedingungen für die Funkenbildung vorfindet, *nicht* aber β. Vielmehr ist erst $\beta\,dt$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß im Zeitelement dt ein Ion ge-

---

1) J. Dejmek, Ann. d. Phys. 77. S. 667. 1925.
2) M. v. Laue, Ann. d. Phys. 76. S. 261. 1925.
3) K. Zuber, Ann. d. Phys. 76. S. 231. 1925.

bildet wird. β hat also die Dimension einer reziproken Zeit und kann prinzipiell *jeden* Zahlenwert annehmen, so daß das Produkt βp sehr wohl auch den Wert 1,86 haben kann.

Damit entbehren auch die weiteren Betrachtungen des Hrn. Dejmek, die sich auf diese scheinbare Unstimmigkeit zwischen Theorie und Versuch stützen, jeder Grundlage.

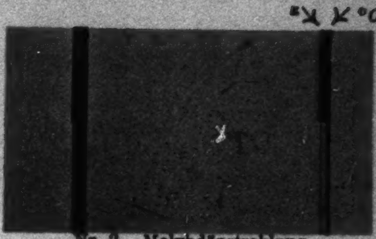
Stuttgart, Physikalisches Institut d. Techn. Hochschule, Oktober 1925.

(Eingegangen 5. Oktober 1925.)

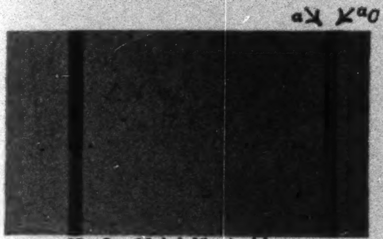
Druck von Metzger & Wittig in Leipzig

α ↘ ↙ α_C

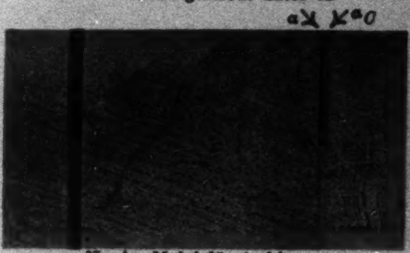
Nr. 1. Molybdänstrahlung
an Paraffin gestreut unter 54°


α ↘ ↙ α_C

Nr. 2. Molybdänstrahlung
an Paraffin gestreut unter 92°


α ↘ ↙ α_C

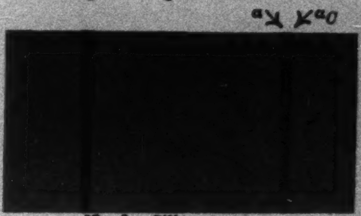
Nr. 3. Molybdänstrahlung
an Paraffin gestreut unter 114°


α ↘ ↙ α_C

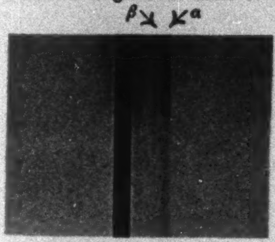
Nr. 4. Molybdänstrahlung
an Magnesium gestreut unter 87°

α ↘ ↙ α_C

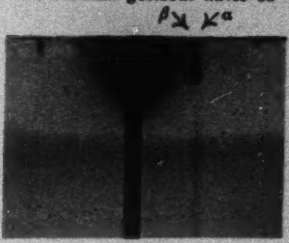
Nr. 5. Rhodiumstrahlung
an Paraffin gestreut unter 86°


α ↘ ↙ α_C

Nr. 6. Silberstrahlung
an Paraffin gestreut unter 88°



Nr. 7. Tantalstrahlung
an Paraffin gestreut unter 90°



Nr. 8. Wolframstrahlung
an Paraffin gestreut unter 90°

Mit α wurde auf den Bildern das mit unveränderter Wellenlänge gestreute K_α-Dublett bezeichnet, mit α_C das mit veränderter Wellenlänge gestreute; die Trennung des K_α-Dubletts in seine Komponenten α und α' ist bei der Reproduktion verloren gegangen.

G. Hagen.

1925. № 21.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 78.

1. *Ein gesetzmäßiger Zusammenhang zwischen den chemischen Elementen im Effekt des elektrischen Feldes auf ihre Serienlinien;*

von J. Stark.

Die Balmersche Wasserstoffserie hat die Formel:

$$\frac{1}{\lambda} = \nu = N\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2}\right) \qquad m = 3, 4, 5 \ldots$$

In dieser ist λ die Wellenlänge, ν die Wellenzahl, N die Rydbergsche Konstante, $N/2^2$ die Endzahl, N/m^2 die Laufzahl der Serie. Im Anschluß an die für die Serien anderer Elemente eingeführte Bezeichnungsweise werde die Laufzahl der Wasserstoffserie N/m^2 durch die Marke $m\,w$ ersetzt, worin m die Gliednummer, w die Zueignung zur Wasserstoffserie ausdrückt. Es wird diese dann durch die Formel dargestellt:

$$\nu = 2w - m\,w \qquad m = 3, 4, 5 \ldots$$

Es ist eine grundlegende Tatsache, daß dem Wasserstoffatom nur die eine Laufzahlreihe $m\,w$ eigentümlich ist; es besitzt darum nur eine Serie 1. Ordnung $\nu = 1w - m\,w$, nur eine Serie 2. Ordnung $\nu = 2w - m\,w$ und nur eine Serie 3. Ordnung $\nu = 3w - m\,w$.

Soweit unsere Erfahrung reicht, sind den Atomen aller anderen Elemente mehrere Laufzahlreihen eigentümlich, sie besitzen darum im Unterschied von Wasserstoff mehrere Serien zweiter Ordnung. Zur Kennzeichnung dieser verschiedenen Laufzahlreihen benütze ich die von **Rydberg** eingeführten Namen für die entsprechenden Serien und übernehme die in der Literatur üblich gewordenen Marken $m\,s$ und $m\,d$ für die Laufzahlen der scharfen und der diffusen Serie. Die Laufzahlreihe der sogenannten Hauptserie $m\,p$ habe ich mit dem Beiwort „fastscharf" gekennzeichnet, insofern die im elektrischen Feld sichtbar werdende Nebenserie mit den Laufzahlen $m\,p$ angenähert das Verhalten der scharfen Nebenserie zeigt. Dann habe ich später[1]) erkannt, daß mindestens eine Starkeffekt-Komponente der diffusen Nebenserienlinien von He und Li als Glied einer neuen Nebenserie zweiter Ordnung anzusprechen ist, deren Laufzahlen mf mit der bis dahin zumeist nur im Ultrarot beobachteten Fundamental- oder Bergmannserie übereinstimmen. Nachdem schon die Untersuchung Nyquists[1]) an He-Linien es wahrscheinlich gemacht hatte, ziehe ich aus den wertvollen Beobachtungen Fosters[2]) an denselben Linien den Schluß, daß mindestens zwei nahdiffuse Serien zu unterscheiden sind; der am weitesten von der diffusen Serie entfernten nahdiffusen Serie ordne ich die Laufzahlreiche mf_1 zu, der weniger entfernten Serie die Laufzahlreihe mf_2. Nach Einführung der vorstehenden Bezeichnungen ergibt sich folgende Darstellung der Nebenserien zweiter Ordnung (2p-Serien) eines schweren Elements

---

[1]) J. **Stark** u. O. **Hardtke**, Ann. d. Phys. 58. S. 712. 1919.

Scharfe Serie	$\nu = 2p - ms$	$m = 3, 4 \ldots.$
Fastscharfe Serie	$\nu = 2p - mp$	$m = 3, 4 \ldots.$
Diffuse Serie	$\nu = 2p - md$	$m = 3, 4 \ldots.$
Erste nahdiffuse Serie	$\nu = 2p - mf_1$	$m = 3, 4 \ldots.$
Zweite nahdiffuse Serie	$\nu = 2p - mf_2$	$m = 3, 4 \ldots.$

Vergleichen wir unter dem Gesichtspunkt des optischen Merkmals der Serienemission den Wasserstoff mit den übrigen Elementen, so haben wir festzustellen, daß *bei den schweren Elementen statt der einen Laufzahlreihe des Wasserstoffs* mw *mindestens fünf Laufzahlreihen* ms, mp, md, mf_1, mf_2 *auftreten.*

Schon vor längerer Zeit[3]) habe ich erkannt, daß für die Art und Größe des Starkeffektes einer Serienlinie eines Elements ihre Laufzahl maßgebend ist und dementsprechend das Gesetz den übereinstimmenden Effekte formuliert. Im Ausbau dieser Erkenntnis kann man den Vergleich des Effektes für die verschiedenen Elemente mit dem Vergleich ihrer Laufzahlen in Zusammenhang bringen.

Die Differenz der Laufzahl einer Serienlinie eines Elements gegen die Laufzahl der Wasserstoff-Serienlinie gleicher Nummer heiße die Wasserstoffdifferenz der betrachteten Serienlinie; die Wasserstoffdifferenz für eine scharfe, fastscharfe und diffuse Serienlinie ist demnach $ms - mw$, $mp - mw$, $md - mw$.

---

[1]) H. Nyquist, Phys. Rev. **10**. S. 226. 1917.

[2]) J. St. Foster, Phys. Rev. **23**. S. 667. 1924.

[3]) J. Stark, Ann. d. Phys. **56**. S. 585. 1918.

Die gekennzeichneten Vergleiche müssen für dieselbe Feldstärke und dieselbe Gliednummer an den verschiedenen Serien der verschiedenen Elemente durchgeführt werden. Die Größe des Effektes in den nachstehenden Tabellen ist für eine Feldstärke von 28000 Volt × cm^{-1} aus den Angaben in der Literatur berechnet; hierbei ist die Annahme gemacht, daß die Größe des Effektes proportional der Feldstärke ist, eine Annahme, die nach den vorliegenden Erfahrungen nur angenähert richtig ist. In den Tabellen sind die Elemente nach steigenden Wasserstoffdifferenzen geordnet; diese sind aus den Angaben in der Schrift von F. Paschen und R. Götze „Seriengesetze der Linienspektren" gebildet, wobei freilich nicht durchweg die Nummerierung der Serienlinien in dieser Schrift übernommen wurde.

Die Tab. 1 bezieht sich auf die scharfe Serie, soweit der Effekt bis jetzt mit positivem Erfolg an Linien dieser Serie beobachtet worden ist. Die Tab. 2 enthält die wenigen Untersuchungen über Linien der fastscharfen Nebenserie, die ja erst durch ein elektrisches Feld sichtbar gemacht werden. Am zahlreichsten sind die bis jetzt vorliegenden Untersuchungen für die diffuse Nebenserie, wie die Tab. 3 ersehen läßt; für die Linien dieser Serie ist im Falle der Zerlegung in mehrere Komponenten als Effekt $\Delta\lambda$ der Abstand der äußersten rotverschobenen Komponente von der unbeeinflußten Linie angegeben.

Tabelle 1.

Scharfe Nebenserie $2p - ms$.

Element	Wellenlänge	Serienzeichen	Wasserstoffdifferenz	Effekt $\Delta\lambda$	Beobachter	Vermutung über $\Delta\lambda$
P–He	4437,6	$2P - 5S$	260	0,8	Stark u. Kirschbaum	
O	5436	$2p - 5s$	430	0,6	Yoshida	
O–He	4121,0	$2p - 5s$	577	0,1	Nyquist	zu klein
Ne	5189	$2p_9 - 5s_5$	618	0,13	„	
Li	4273,3	$2p - 5s$	800	0,3	Lüssem	zu groß
Ag	3981,9	$2p_1 - 5s$	1128	0,07	Takamine	
P–He	4169,0	$2P - 6S$	149	1,78	Stark u. Kirschbaum	
O	5019	$2p - 6s$	245	0,9	Yoshida	
O–He	3867,6	$2p - 6s$	328	0,7	Liebert	
Ne	4789	$2p_9 - 6s_5$	350	0,25	Nyquist	
Li	3985,9	$2p - 6s$	453	1,1	Lüssem	zu groß

Tabelle 2.

Fastscharfe Nebenserie $2p - mp$.

Element	Wellenlänge	Serienzeichen	Wasserstoffdifferenz	Effekt $\Delta\lambda$	Beobachter	Vermutung über $\Delta\lambda$
P–He	4383,4	$2P - 5P$	–19	–3,6	Foster	
Li	4148,2	$2p - 5p$	85	2,6	Stark	
O–He	4046,0	$2p - 5p$	123	1,2	Koch	
P–He	4141,5	$2P - 6P$	–11	–6,6	Foster	
Li	3921,8	$2p - 6p$	48	5	Stark	
O–He	3830,0	$2p - 6p$	71	0,6	Liebert	zu klein
P–He	4007,5	$2P - 7P$	–7	–8,5	Foster	
O–He	3711,3	$2p - 7p$	45	2,7	Liebert	

Tabelle 3.

Diffuse Nebenserie $2p - md$.

Element	Wellenlänge	Serienzeichen	Wasserstoffdifferenz	Effekt $\Delta\lambda$	Beobachter	Vermutung über $\Delta\lambda$
Li	4603,0	$2p - 4d$	8,7	1,6	Lüssem	zu klein
P–He	4921,9	$2P - 4D$	10	2,5	Stark u. Kirschbaum	zu groß
O–He	4471,5	$2p - 4d$	12	1,2	„ „ „	
Ne	5805	$2p_8 - 4d_1''$	28	0,9	Nyquist	
Na	5682,9	$2p_2 - 4d$	42	0,7	Stark u. Hardtke	
Ne	5117	$2p_{10} - 4s_1''''$	60	0,5	Nyquist	
O	6158	$2p_1 - 4d$	117	0,6	Takamine	
Ca	3644	$2p_1 - 4d_1$	–469	– 0,4	Takamine u. Kokubu	
Mg	3093	$2p_2 - 4d$	619	0,4	„ „ „	
Al	2568	$2p_2 - 4d_2$	2496	0,00	Wendt u. Wetzel	
Li	4132,4	$2p - 5d$	2,2	3	Lüssem	zu klein
P–He	4387,9	$2P - 5D$	5,4	4,8	Stark u. Kirschbaum	zu groß
O–He	4026,2	$2p - 5d$	6,5	3,5	„ „ „	
Na	4979,3	$2p_2 - 5d$	27	1,4	Stark u. Hardtke	
Cu	3688,6	$2p_1 - 5d_1$	33	1,2	„ „ „	
Ne	4709	$2p_{10} - 5d_5$	54	1,2	Nyquist	
Ca	4685	$2P - 5D$	–63	– 0,4	Takamine u. Kokubu	
O	5330	$2p - 5d$	64	0,7	Böttcher u. Tuczek	
Hg	2378,3	$2p_3 - 5d_3$	115	0,5	Ritter	
Ca	3350,2	$2p_2 - 5d$	–133	– 1,4	„	zu groß
Zn	2608,5	$2p_1 - 5d_1$	161	0,13	„	
Al	2367,2	$2p_2 - 5d_2$	1660	0,00	Wendt u. Wetzel	
Li	3915,2	$2p - 6d$	1	5	Stark u. Kirschbaum	zu klein
P–He	4143,8	$2P - 6D$	4	7,5	Foster	
O–He	3819,6	$2p - 6d$	4,6	5,3	Stark u. Kirschbaum	
Ne	4425	$2p_{10} - 6d_5$	32	3,1	Nyquist	
O	4968	$2p - 6d$	39	2,0	Böttcher u. Tuczek	
Hg	2399,4	$2p_2 - 6d_2$	58	1,2	Ritter	
Zn	2516	$2p_1 - 6d_1$	91	0,25	„	

Beim Studium der drei Tabellen fällt zunächst auf, daß das Vorzeichen der Wasserstoffdifferenz und des Effektes $\Delta \lambda$ in den meisten Fällen positiv ist. Weiter fällt auf, daß in den wenigen Fällen, in denen die Wasserstoffdifferenz negativ ist, auch der Effekt $\Delta \lambda$ negatives Vorzeichen hat. Endlich lassen die drei Tabellen einen Zusammenhang zwischen der Größe der Wasserstoffdifferenz und der Größe des Effektes erkennen; es nimmt nämlich mit wachsender Wasserstoffdifferenz die Größe des Effektes $\Delta \lambda$ ab. Einige Werte von $\Delta \lambda$ fallen in den Tabellen aus dieser Gesetzmäßigkeit heraus, vorläufig läßt sich aber noch nicht entscheiden, ob diese Ausnahmen tatsächlich bestehen oder nur auf eine Ungenauigkeit der Messung und Berechnung des Effektes $\Delta \lambda$ zurückzuführen sind.

Wenn wir von den vorstehenden Unebenheiten in den drei Tabellen absehen, können wir auf Grund derselben folgende Gesetzmäßigkeit formulieren: *Bei den Linien der scharfen, fastscharfen und diffusen Serie der schweren Elemente hat der Effekt $\Delta \lambda$ eines elektrischen Feldes dasselbe Vorzeichen wie die Wasserstoffdifferenz ihrer Laufzahlen und ist innerhalb einer Serienart für verschiedene Elemente um so kleiner, je größer die zugeordnete Wasserstoffdifferenz ist.*

Wie die drei Tabellen weiter übereinstimmend lehren, *nimmt für jedes Element innerhalb einer jeden Serienart die Wasserstoffdifferenz mit steigender Gliednummer ab und in Erfüllung der vorstehenden Gesetzmäßigkeit nimmt darum der zugeordnete Effekt $\Delta \lambda$ mit steigender Gliednummer zu.*

Wie der Vergleich der drei Serienarten an der Hand der drei Tabellen ergibt, ist zwar die Wasserstoffdifferenz einer scharfen Serienlinie der darin genannten Elemente größer als diejenige der diffusen Linie gleicher Nummer und somit der Effekt $\Delta \lambda$ der scharfen Linie kleiner als derjenige der diffusen Linie; indes ist von Serienart zu Serienart das Verhältnis von Wasserstoffdifferenz zum Effekt $\Delta \lambda$ verschieden. Es ist nämlich das Produkt aus einer Wasserstoffdifferenz für eine scharfe Linie und ihrem Effekt größer als dieses Produkt für die fastscharfe Linie gleicher Nummer und das Produkt für eine solche wieder größer als dasjenige für die zugeordnete diffuse Linie. Oder mit anderen Worten, *bezogen auf die gleiche Wasserstoffdifferenz ist der Effekt $\Delta \lambda$ für die scharfe Serie größer als für die fastscharfe Serie und für diese wieder größer als für die diffuse Serie.*

Für die nahdiffusen Serien habe ich eine Tabelle über ihre Wasserstoffdifferenzen und Effekte nicht mitgeteilt, weil die Laufzahlen dieser Serien nicht genau bekannt sind. So viel aber scheint sicher zu sein, daß die Wasserstoffdifferenzen der nahdiffusen Serienlinien noch kleiner sind als diejenigen der zugeordneten diffusen Serienlinien; für die höheren Gliednummern der f_1-Serie ist bei mehreren Elementen die Wasserstoffdifferenz negativ und ebenso der Effekt $\Delta\lambda$; für die niedrigen Nummern und die f_2-Serien scheint diese Übereinstimmung im Vorzeichen bei einem verhältlich kleinen Werte der Wasserstoffdifferenz nicht zu bestehen; übersteigt dieser Wert den Betrag von ungefähr 50, so stimmen die Vorzeichen wieder überein.

Der beschriebene gesetzmäßige Zusammenhang zwischen Wasserstoffdifferenz und Effekt liefert auch die Begründung der Erkenntnis, daß für den Effekt der Serienlinien zweiter Ordnung in erster Linie ihre Laufzahl maßgebend ist. Da die Wellenzahl einer Serienlinie z. B. einer diffusen Nebenserienlinie $\nu = 2p - md$ eine Differenz der zwei Zahlen $2p$ und md ist, so darf man erwarten, daß der Effekt eines elektrischen Feldes auf die Wellenlänge der Serienlinie additiv aus den Effekten auf die Endzahl $2p$ und die Laufzahl md sich zusammensetzt. Indes ist die Wasserstoffdifferenz von $2p$ in der Regel sehr viel größer als diejenige von md für $m > 3$ und aus diesem Grunde gemäß unserer Gesetzmäßigkeit der Effekt auf md sehr viel größer als derjenige auf $2p$, so daß der Effekt $\Delta\lambda$ für die höheren Gliednummern einer Serie mit sehr großer Annäherung allein von der Laufzahl md bestimmt erscheint.

Außer den in den obigen drei Tabellen zusammengestellten Angaben gibt es noch eine große Anzahl von Beobachtungen, welche im Einklang mit der aufgestellten Gesetzmäßigkeit stehen. Indes finden sich auch folgende ihr widersprechende Angaben in der Literatur. Nach Ladenburg[1]) soll die D-Linie des Natriums, das Glied Nr. 2 der fastscharfen Hauptserie, einen positiven Effekt $\Delta\lambda$ haben, obwohl ihre Wasserstoffdifferenz negativ ist. Nach Takamine[2]) soll das Glied Nr. 3 der diffusen Triplet-Nebenserie des Magnesiums einen negativen Effekt $\Delta\lambda$

---

1) R. Ladenburg, Ztschr. f. Phys. 28. S. 51. 1924.

2) T. Takamine, Astrophys. Journ. 50. S. 1. 1924.

besitzen, obwohl seine Wasserstoffdifferenz positiv ist. Wie sich die vorstehenden Ausnahmen von unserer Gesetzmäßigkeit erklären, muß vorderhand dahingestellt bleiben.

Durch den gesetzmäßigen Zusammenhang zwischen Wasserstoffdifferenz und Effekt wird um alle chemischen Elemente ein sie zusammenfassendes Band geschlungen; der Vergleich aller schweren Elemente mit Wasserstoff bei der Bildung der Wasserstoffdifferenz ihrer Serienlinien hat zur Grundlage eine gemeinsame Eigenart desjenigen Gebietes an den Atomen der chemischen Elemente, welches für die Emission ihrer Serienlinien einer bestimmten Nummer maßgebend ist; die Wasserstoffdifferenz der Serienlinie eines bestimmten Elements erscheint als ein Maß der Abweichung jener Eigenart dieses Elements von der Eigenart des Wasserstoffatoms an demjenigen Orte des Atomgebietes, in welchem die betrachtete Seriengliednummer zur Emission kommt.

In einer besonderen Schrift, welche die bisher erschienenen Untersuchungen über den Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien zum Gegenstand hat, werde ich die nachstehenden Behauptungen und Folgerungen eingehend begründen.

Die gemeinsame Eigenart aller chemischen Elemente, welche für die Emission ihrer Serienlinien maßgebend ist, ist das elektrische Feld, welches das einwertig positive Atomion eines Elements infolge der Abtrennung eines Elektrons umgibt; bei der Bewegung des sich wiederanlagernden Elektrons in diesem zentrisch positiven elektrischen Atomionfeld kommen die Serienlinien zur Emission.

Die Überlagerung eines homogenen elektrischen Außenfeldes über das zentrisch symmetrische Atomionfeld des Wasserstoffs erzeugt in diesem eine elektrisch verstärkte und eine geschwächte Seite; diese Veränderung des *H*-Atomionfeldes hat eine symmetrische Zerlegung der *H*-Serienlinien zur Folge; ihre rotverschobenen Komponenten kommen in der elektrisch verstärkten Atomionfeldseite zur Emission, die violettverschobenen Komponenten in der geschwächten Atomionfeldseite; eine Vergrößerung der Feldstärke in einem Gebiet des Atomions vergrößert also die Laufzahl der hier emittierten Serienlinie und verschiebt die Linie nach Rot, eine Verkleinerung der Feldstärke verkleinert die Laufzahl und verschiebt die Linie nach Violett.

Bei den schweren Elementen ist über das zentrisch positive Atomionfeld exzentrisch das inhomogene Feld eines an der Atomoberfläche angeordneten negativen Elektrons oder mehrerer solcher Elektronen gelagert und verstärkt das positive Atomionfeld in einem bestimmten Gebiete, während es in einem anderen Gebiete das Atomionfeld schwächt. Durch die Wirkung dieses exzentrisch übergelagerten Elektronenfeldes werden die Linien der *H*-Serie in Komponenten zerlegt, indem in dem elektrisch verstärkten Gebiet des Atomionfeldes die Laufzahl vergrößert, in dem geschwächten Gebiet die Laufzahl verkleinert wird; hierbei bevorzugt die Emission im allgemeinen das verstärkte Gebiet, so daß eine kleinere Anzahl von Linienkomponenten als im Effekt des homogenen Außenfeldes im Falle des Wasserstoffs eine wahrnehmbare Intensität besitzt. Eine positive Wasserstoffdifferenz einer Serienlinie eines schweren Elements entspricht also einer Zunahme, eine negative Wasserstoffdifferenz entspricht einer Abnahme der Stärke im zugeordneten Atomfeldgebiet infolge der exzentrischen Überlagerung eines inhomogenen Elektronenfeldes. Die eine Laufzahlreihe des zentrisch symmetrischen *H*-Atomionfeldes wird durch die exzentrische Überlagerung eines Elektronenfeldes mindestens in fünf verschiedene Laufzahlreihen und damit die eine Balmersche *H*-Serie mindestens in fünf Nebenserien (Endzahl $2p$) und fünf Hauptserien (Endzahl $2s$) bei den schweren Elementen zerlegt.

Die Überlagerung eines homogenen elektrischen Feldes über die einwertig positiven Atomionen eines schweren Elements, die infolge der Wiederanlagerung des abgetrennten Elektrons in der Emission von Serienlinien begriffen sind, bewirkt, daß sich die Atomionen in bezug auf die Achse des homogenen Feldes so richten, daß sie ihre negative Seite, in der das Atomionfeld infolge des exzentrischen Oberflächenelektronenfeldes geschwächt ist, der positiven Seite des Außenfeldes, ihre durch das Elektronfeld verstärkte Seite der negativen Seite des Außenfeldes zuwenden. Infolge dieser Einstellung wird die verstärkte Atomionfeldseite durch das Außenfeld weiter verstärkt und die geschwächte Atomionfeldseite durch das Außenfeld weiter geschwächt; da die Veränderung der Stärke im Atomionfeld einen Effekt $\Delta \lambda$ an den emittierten Serienlinien und zwar eine Zunahme der örtlichen

Stärke im Atomionfeld eine Zunahme der Laufzahl und damit der Wellenlänge der örtlich emittierten Serienlinie hervorbringen, so haben die Effekte $\Delta\,\lambda$ eines homogenen Feldes auf die Serienlinien schwerer Elemente dasselbe Vorzeichen wie die zugehörigen Wasserstoffdifferenzen ihrer Laufzahlen.

Nachdem die Erkenntnis über die gemeinsame Eigenart der chemischen Elemente hinsichtlich der Emission ihrer Serienlinien aus der Erfahrung über ihren Effekt gewonnen ist, kann man ausgehend von dieser Erkenntnis umgekehrt die Art festlegen, wie die Serienlinien der schweren Elemente für unseren Vergleich mit den H-Linien zu nummerieren sind. Da die Atomionfelder der schwereren Elemente mit wachsendem Abstand von der zentralen positiven Ladung asymptotisch die Übereinstimmung mit dem H-Atomionfeld erreichen, hat man zur Ermittlung der für den obigen Vergleich zu wählenden Gliednummern die betrachtete Laufzahlreihe $m\,s$, $m\,p$ oder $m\,d$ so an die Laufzahlreihe des Wasserstoffes $m\,w$ zu legen, daß sie asymptotisch in diese ausläuft; die der einzelnen Laufzahl $m\,w$ zunächst liegende Laufzahl $m\,s$, $m\,p$ oder $m\,d$ erhält dann dieselbe Nummer wie die betrachtete Laufzahl $m\,w$.

Ullersricht bei Weiden i. Oberpfalz, Juni 1925.

(Eingegangen 3. September 1925.)

2. *Eine Verallgemeinerung der Fowlerschen Verteilungsstatistik;*

von W. Schottky.

Vor einiger Zeit hat R. H. Fowler eine von C. G. Darwin und ihm ausgebildete statistische Methode[1]) dazu benutzt, um alle Verteilungsfragen der chemischen Gleichgewichtslehre (Dampfdruck, Gasgleichgewichte usw.) auf ein einfaches Schema zurückzuführen[2]), das, ohne Zuhilfenahme jeder thermodynamischen Betrachtung, nach Art der von Ehrenfest und Trkal für das Gasgleichgewicht durchgeführte Methode[3]), die Verteilung der verschiedenartigen Stoffteilchen auf die verschiedenen Molekülsorten und Phasen zu berechnen gestattet, falls gewisse elementare Daten gegeben sind. Ich selbst habe mich früher für eine andere statistische Behandlungsweise chemischer Gleichgewichtsprobleme ausgesprochen[4]); ich habe vorgeschlagen, mit Hilfe der Thermodynamik die zu lösende statistische Aufgabe soweit in Einzelaufgaben aufzuteilen, zu „separieren", daß es die statistische Betrachtung nur noch mit verhältnismäßig einfachen Gebilden zu tun hat, nämlich mit homogenen Gebilden, die so gewählt sind, daß bei ihnen die nicht auf Fernkräften beruhenden Wechselwirkungen noch vernachlässigt werden können. Diese Statistik läuft einfach darauf hinaus, daß man die Gibbsschen thermodynamischen Potentiale aller Stoffteilchen in diesen Einzelgebilden in Abhängigkeit von den unabhängig veränderlichen Teilchenzahlen des Gebildes statistisch bestimmt. Allerdings ist es zur vollständigen statistischen Bestimmung dieser thermodynamischen Potentiale noch notwendig, eine Normierung der Energie und Entropie vorzunehmen, die gestattet, die Energie- und Entropieänderungen beim Übergang von Stoffteilchen aus einem Ge-

---

1) Phil. Mag. 44. S. 450 u. 823. 1922.
2) Phil. Mag. 45. S. 1. 1923.
3) Proc. Amst. 23. S. 167—183. 1920.
4) Ann. d. Phys. 68. S. 481—544. 1922.

bilde in das andere für jeden Fall richtig zu bestimmen. Eine solche Normierung ist aber möglich.[1])

Im folgenden möchte ich nichts weiter tun, als in einem Fall, der von den bisherigen Voraussetzungen der Fowlerschen Statistik noch nicht erfaßt wird, nämlich dem Fall der partiellen Verdampfung eines Stoffes aus einem Mehrkomponentensystem[2]), auf eine Verallgemeinerung der Fowlerschen Formeln hinzuweisen. Ich habe mich dabei bemüht, diese Verallgemeinerung, die sich bei der thermodynamischen Statistik ohne weiteres dadurch ergibt, daß alle Gleichgewichte durch die thermodynamischen Potentiale vollständig bestimmt sind, in die Fowlersche Formelsprache zu übersetzen, ohne jedoch den direkten Beweis im Sinne der Fowlerschen Gedankengänge, für diese Behauptungen geben zu können. Vielleicht können jedoch diese Zeilen für die Mathematiker dieser Theorie als Anregung dienen.

Die Frage des chemischen Gleichgewichts, d. h. die Frage der Verteilung irgendwelcher stofflicher Bestandteile auf verschiedene Molekülarten oder Phasen, wird von R. H. Fowler in folgender Weise behandelt. Es werden zunächst alle überhaupt möglichen Mikrozustände des Gesamtsystems betrachtet, die mit den gegebenen äußeren Bedingungen (Volumen, Energie) verträglich sind. Zu diesen Mikrozuständen gehören, bei *gegebener* Verteilung aller stofflichen Bestandteile auf die verschiedenen Molekülgruppen und Phasen, alle Bewegungs- und Quantenzustände, die bei gegebenen äußeren Bedingungen möglich sind; jeder dieser Mikrozustände hat ein gewisses Gewicht a priori, das für die Quantenzustände durch die „Quantengewichte“ bestimmt ist, während es für die klassischen Bewegungen aus der Größe des von der betreffenden Bewegung bestrichenen, durch h^n dividierten Phasenvolumens ermittelt wird. Insgesamt sind bei gegebener stofflicher Verteilung immer eine ganz bestimmte Menge verschiedener derartiger mit einem Gewichtsfaktor versehener Zustände („weighted com-

---

1) Ann. d. Phys. 68. S. 481—544. 1922.

2) Den Anlaß zur Beschäftigung mit dieser Frage bot eine Arbeit von v. Raschevsky, Ztschr. f. Phys. 32. S. 746—754. 1924, der die bisher noch zu speziellen Methoden der Fowlerschen Statistik benutzt, um ein derartiges Problem (das Elektronendampfdruckproblem) zu behandeln.

plexions") möglich. Bei anderer chemischer Gruppierung der Stoffteilchen ergibt sich eine neue derartige Mannigfaltigkeit von Zuständen. Das Gesamtbild ist schließlich dadurch gegeben, daß jeder Zustand, der einer bestimmten stofflichen Verteilung entspricht, mit derjenigen Häufigkeit vorkommt, die der durch ihn repräsentierten Zahl von „bewerteten Komplexionen" entspricht. So kann man, wenn man die Art und den Wert der bei den gegebenen äußeren Bedingungen möglichen Komplexionen kennt, die mittlere Verteilung irgendwelcher stofflicher Bestandteile auf verschiedene Molekülgruppen oder Phasen ermitteln, d. h. aber die Verteilung der Stoffe auf Moleküle und Phasen im statistischen Gleichgewicht bestimmen. Darüber hinaus sind mit Hilfe dieses Ansatzes auch die Häufigkeiten aller nicht der mittleren Verteilung entsprechenden Zustände, also z. B. auch die mittleren Schwankungen aller beobachtbaren Größen zu ermitteln.

Dieses allgemeine, in ähnlicher Weise vielleicht schon früher aufgestellte Programm wird von **Fowler** unter folgenden Annahmen durchgeführt. Es wird vorausgesetzt, daß die kleinsten Stoffteilchen, nach deren Verteilung gefragt wird, immer, entweder im freien Zustande oder als Bestandteile einer der in dem System vorkommenden Molekülarten (die man natürlich alle kennen muß!), sich so verhalten, als ob die betreffende Molekülart, ohne Wechselwirkung mit Molekülen gleicher oder anderer Art, allein im Raum vorhanden wäre. Sobald ein Stoffteilchen aus einem Molekül abdissoziiert, entsteht eine andere der in dem System vorhandenen Molekülarten, die sich aber ebenso verhält. Für Gasmoleküle bedeutet diese Annahme, daß sich die betreffenden Molekülarten wie Moleküle eines idealen Gases verhalten. Für feste Körper, die, mit der Gesamtheit der in ihnen möglichen Quantenzustände, ebenfalls als große Moleküle behandelt werden, ist aber die Einschränkung noch etwas größer; es wird angenommen, daß beim Abdissoziieren (Verdampfen) eines Stoffteilchens aus dem festen Körper keine neue *Art* von Kristallen entsteht, sondern daß sich nur die Zahl N der den Kristall aufbauenden unter sich gleichen Stoffteilchen ändert.

Unter diesen Voraussetzungen kann der Beitrag des festen Körpers zu der Gesamtzahl der verschiedenen möglichen

Komplexionen durch einen Beitrag $[K(z)^N]$ dargestellt werden, wobei $K(z)$ eine von N unabhängige, nur von den spezifischen Eigenschaften des festen Körpers abhängige Funktion bedeutet (nämlich die Zustandssumme eines einzelnen Stoffteilchens innerhalb des Kristalles)[1].) Mit dieser Annahme rechnet auch v. Raschevsky.

Die Verallgemeinerung liegt auf der Hand. Wenn man einen festen Körper im Gleichgewicht mit aus ihm verdampfenden Teilchen betrachtet, die durch ihren Austritt die Eigenschaften des zurückbleibenden Festkörpers ändern, so hat man offenbar zunächst nach dem Austritt jedes Teilchens eine neue Art von Molekül vor sich, das einer ihm eigentümlichen Zahl von inneren Quantenzuständen fähig ist. Anstelle des Nten Exponenten der Zustandssumme eines Einzelteilchens hat man dann eine von N abhängige Funktion $K_N(z)$ zu betrachten, die die Zustandssumme des Gesamtkristalls mit N Teilchen der betreffenden Art darstellen muß:

$$K_N(z) = \sum_{\tau=0}^{\infty} p_\tau z^{\varepsilon_\tau}, \tag{24}$$

wobei p_τ das Gewicht und ε_τ die Energie des τten Quantenzustandes des Gesamtkristalles mit N Teilchen der betrachteten Art darstellt. Setzt man diesen Ausdruck in die Fowlerschen Verteilungsformeln (10,2) und (10,22) (S. 30) ein und sucht diese Formeln auszuwerten, so muß es, wie der Vergleich mit der thermodynamischen Statistik zeigt, wesentlich auf die Änderung von $K_N(z)$ mit N in der Umgebung des wahrscheinlichsten N-Wertes ankommen. Das heißt aber, daß hier, ebenso wie in der thermodynamisch separierten Statistik, die *Änderung* der (mit der freien Energie ja eng zusammenhängenden[2])) Zustandssumme des festen Körpers bei Änderung

---

[1] a. a. O. S. 29 und 30.

[2] Der Zusammenhang der in der Fowlerschen Statistik in Betracht kommenden Änderung von $K(z)$ mit dem thermodynamischen Potential μ ist explizite folgender: es wird gebraucht $K_N(z)$ für das Argument $\vartheta = e^{-\frac{1}{KT}}$. Nach (24) ist $K_N(\vartheta) = Z$, wobei Z die Zustandssumme (für die Temperatur T) bedeutet, die mit der freien Energie des festen Körpers durch die Gleichung $F = -KT \ln Z$ zusammenhängt. Hieraus folgt:

$$\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial N} = -\frac{1}{KT}\frac{\partial F}{\partial N} = -\frac{\mu}{KT}.$$

der betreffenden Teilchenzahlen bekannt sein muß, um die Verteilung, den Dampfdruck der betreffenden Teilchen zu bestimmen.

In ähnlicher Weise bedürfen die Formeln Fowlers der Verallgemeinerung für den Fall, wo die Moleküle der gasförmigen Phase nicht unabhängig voneinander sind, sondern miteinander in Wechselwirkungen stehen. Immer müssen aus soviel Teilchen bestehende Gebilde einer gemeinsamen statistischen Betrachtung unterworfen werden, daß die in Betracht zu ziehenden Wechselwirkungen *innerhalb* eines derartigen Gebildes stattfinden. Dazu ist unter Umständen notwendig, auch Teilchen, die sich frei gegeneinander bewegen können, als einheitliches Elementargebilde zu betrachten; ein Beispiel für eine derartige über die Fowlerschen Ansätze hinausgehenden Berechnungsmethode hat kürzlich M. Planck bei der genauen statistischen Berechnung der Dissoziation des Wasserstoffatoms gegeben.1) Für kompliziertere Wechselwirkungen (Flüssigkeiten, Oberflächeneffekte, elektrische Ladungen) wird jedoch die Gesamtheit der in der Fowlerschen Statistik gemeinsam zu umfassenden Vorgänge und Zustände so kompliziert, daß man sich bei der statistischen Behandlung solcher Fälle sicher vorläufig lieber noch der Krücke der Thermodynamik bedienen wird, um die Fülle der statistischen Probleme zu separieren und getrennt in Angriff zu nehmen. Daß die Untersuchung der thermodynamischen Größen in Abhängigkeit von den inneren Parametern des Systems (Teilchenzahl, Lage, Teilenergien) auch die *Schwankungen* innerhalb des Systems liefert, hat bekanntlich Einstein gezeigt.2)

Der Ausdruck

$$\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial N} = \frac{1}{K_N(\vartheta)}\frac{\partial K_N(\vartheta)}{\partial N} = -\frac{\mu}{KT}$$

ist nun derjenige, der bei der Auswertung der Fowlerschen Formeln in unserem Falle maßgebend sein muß. (μ ist hier die Änderung von F mit der Teilchenzahl N.)

1) Ann. d. Phys. 75. S. 673—684. 1924.

2) Verh. d. D. Phys. Ges. 12. S. 820. 1914. Vgl. auch L. Szilard, Ztschr. f. Phys. 32. S. 753. 1925.

Siemensstadt, den 18. September 1925.

(Eingegangen 23. September 1925.)

3. *Röntgenographische Bestimmung der Atomanordnung in den Mischkristallreihen Au-Cu und Pd-Cu;*

von C. H. Johansson und J. O. Linde.

(Hierzu Tafel V.)

Einleitung.

Betreffend die Konstitution der Mischkristalle herrscht gegenwärtig keine einheitliche Auffassung. Gemäß der Theorie von Tammann[1]) sollen im Raumgitter die Atome regelmäßige gute Ordnung und bestmögliche Durchmischung besitzen, vorausgesetzt, daß die Legierungen äußerst langsam aus der Schmelze abgekühlt werden, so daß die Atome Zeit erhalten zu diffundieren und ihre Plätze einzunehmen. Bei raschem Abkühlen der Legierungen soll die statistische Verteilung der Atome erhalten werden, die jedoch, unabhängig vom Prozentgehalt, bei hinreichendem Tempern in die geordnete Verteilung übergehen soll. Er nennt die so erhaltene Verteilung eine normale und schreibt ihr große Stabilität zu. Die normale Verteilung ist eindeutig definiert, so daß wenigstens bei einfachem Verhältnisse zweier Komponenten es möglich ist, sie vorauszusagen. Außer der normalen und der statistischen gibt Tammann noch vier andere mögliche Verteilungen an, die aber, seiner Meinung nach, weniger stabil sind. Er wurde zu dieser Auffassung durch seine Untersuchungen über die sogenannten Resistenzgrenzen der Mischkristalle geführt. Es ist aber von Masing[2]) und Borelius[3]) aufgewiesen worden, daß man nicht aus der Existenz der Resistenzgrenzen irgendwelche sicheren Schlüsse betreffend die Atomverteilung ziehen darf.

In einigen Mischkristallen kommen Legierungen einfacher Atomproportionen vor (z. B. $AuCu_3$, AuCu, CuPd, CdMg), die

---

1) G. Tammann, Lehrbuch der Metallographie (3. Aufl.).

2) G. Masing, Ztschr. f. anorg. u. allg. Ch. 118. S. 293. 1921.

3) G. Borelius, Ann. d. Phys. 74. S. 216. 1924.

sich bei der termischen Analyse oder in dem elektrischen Leitfähigkeitsdiagramme in charakteristischer Weise zu erkennen geben und die man als Verbindungen zu bezeichnen gewöhnt ist. Wenn man mit Tammann die Annahme macht, daß alle gut gemischten Mischkristalle eine geordnete Atomverteilung haben, entsteht die Schwierigkeit, anzugeben, in welcher Weise die Konstitution dieser Legierungen sich von den übrigen Mischkristallen unterscheiden sollen. Rosenhain[1]) glaubt in der Gitterstruktur eine Distinktion zu finden. Die Verbindungen würden sich durch komplizierte von denen der Komponenten verschiedener Strukturen auszeichnen, was doch gegenwärtig mit empirischen Tatsachen im Widerspruch zu stehen scheint.

Der Tammannschen Auffassung gegenüber steht die, daß die Mischkristalle im allgemeinen eine ungeordnete Atomverteilung haben und daß nur bei den in Zustandsdiagrammen besonders hervortretenden Legierungen eine mehr geordnete Verteilung vorhanden ist. Dieser Auffassung scheinen in den letzten Jahren mehrere Forscher zuzuneigen.

Die röntgenographischen Methoden geben nun ein vorzügliches Mittel, zwischen diesen verschiedenen Auffassungen zu entscheiden. Wie Laue[2]) gezeigt hat, gibt ein Mischkristallgitter mit statistischer Verteilung dieselben Maxima wie ein Gitter von einer Atomart und die Maxima werden dabei vollkommen scharf, während Vegard und Schjelderup[3]) darauf hingewiesen haben, daß eine regelmäßige Atomverteilung, wegen der verschiedenen Streuvermögen der verschiedenen Atomarten, sich durch Extraintensitätsmaxima an den Diagrammen ergeben müßte. Es ist wohl bekannt, wie in dieser Weise die Atomanordnung in Verbindungen zwischen Metallen und Metalloiden festgestellt worden sind. Auch mehrere auf Grund der Resultate der termischen Analyse behauptete intermetallische Verbindungen sind in dieser Weise festgestellt worden, während andernfalls die Folgerungen aus dem Zustandsdiagramm sich nicht bestätigt haben.

In einigen Fällen haben die Röntgenforscher auch bei Mischkristallen Überstrukturlinien (d. h. extra Maxima ent-

---

1) W. Rosenhain, Chem. and Met. Eng. 28. S. 442. 1923.
2) M. v. Laue, Ann. d. Phys. 56. S. 497. 1918.
3) L. Vegard u. H. Schjelderup, Phys. Ztschr. 18. S. 93. 1917.

sprechend einer bestimmten Atomanordnung oder Überstruktur) gefunden, wo ihnen keine Verbindungen bekannt waren. So fand **Bain**[1]) deutliche Linien bei den Legierungen entsprechend der Zusammensetzung Cu_3Au, sowie schwächere bei Cu_3Ni und MoW. **Phragmén**[2]) fand eine geordnete Verteilung mit einheitlichem Gitter bei und in der Nähe von Fe_3Si. In allen diesen Fällen von geordneter Verteilung ist der Gittertypus der Komponenten beibehalten und die Anordnung die von **Tammann** vorausgesagte normale. Sowohl **Bain** wie **Westgren**[3]) sehen hierin eine Stütze der **Tammann**schen Auffassung. Wir können hier nicht beistimmen. Cu_3Au ist eine durch die (**Bain** wie es scheint unbekannte) Arbeit von **Kurnakow, Zemczuzny** und **Zasedatelev**[4]) sowohl termisch wie elektrisch festgestellte Verbindung und es würde wohl am nächsten liegen, auch die übrigen Beispiele als neuentdeckte Verbindungen zu bezeichnen, so lange die geordnete Atomverteilung nicht als eine allgemeine Eigenschaft der metallischen Mischkristalle nachgewiesen werden kann. Entscheidend werden dabei röntgenographische Untersuchungen an den Mischkristallreihen, in welchen Resistenzgrenzen gefunden sind. Bis jetzt wurde z. B. bei AuAg nie irgendeine Andeutung von Überstruktur gefunden, obwohl in dieser Reihe **Scherrer**[5]), **Bain**[6]), **Mc Keehan**[7]), **van Arkel**[8]) und **Phragmén**[9]) sorgfältig getemperte Legierungen untersucht haben. Für die Kurve der elektrischen Leitfähigkeit ist hier auch immer (es liegen vier umfassende Untersuchungen vor) eine einfache Kettenlinie gefunden worden. Freilich haben mehrere Forscher die Reihe AuCu untersucht, ohne Ordnung nachweisen zu

---

1) **E. Bain**, Chem. and Met. Eng. 28. S. 65. 923; Trans. Amer. Inst. Min. and Met. Eng. 68. S. 625. 1923.

2) **G. Phragmén**, Stahl u. Eisen Nr. 9. 1925 (vorläufige Mitteilung).

3) **A. Westgren**, Teknisk Tidskrift. Heft 22. 1925.

4) **N. Kurnakow, S. Zemczuzny** u. **Zasedatelev**, Journ. of the Inst. of Metals 155. S. 305. 1916.

5) **P. Scherrer**, C. R. séances Soc. Suisse de Physique, Schaffh. 27. Aug. 1921.

6) **E. Bain**, a. a. O.

7) **Mc Keehan**, Phys. Rev. 20. S. 424. 1922.

8) **A. E. van Arkel**, Physica 4. S. 33. 1924.

9) **G. Phragmén**, Mündliche Mitteilung.

können, aber die Ursache zu dieser scheinbaren Nichtübereinstimmung mit den Resultaten von **Bain** ist aus der Arbeit von **Kurnakow, Zemczuzny** und **Zasedatelev** wohl bekannt. Wir kommen später darauf zurück.

Um zu erklären, daß die Anstrengungen eine geordnete Atomverteilung in Mischkristallen röntgenographisch nachzuweisen fast immer mißlungen sind, ist von **Bain**[1]) sowie von **Tammann**[2]) angenommen worden, daß die Überstrukturlinien bei einer nicht vollständigen Ordnung sehr schwach werden sollten und also diese Methode ungeeignet wäre, teilweise Ordnung festzustellen. Dies wird aber durch **Phragméns** Erfahrungen an Fe-Si sowie von der folgenden Untersuchung widerlegt. Wir haben die Reihen AuCu und Pd-Cu, wo die Ordnung nach Willkür mehr oder weniger vollständig gemacht werden kann, untersucht. Die benutzten Legierungen haben wir parallel mit den Röntgenaufnahmen auf ihr elektrisches Leitvermögen untersucht.

Material und Herstellung der Präparate.

Als Ausgangsmaterial ist verwendet: Cuprum metallic. puriss. pro analysi (elektrolytisch dargestellt) von der Firma **Merck** in Darmstadt, Pd (besonders rein) von **Heraeus**, Au (besonders rein) durch wohlwollendes Entgegenkommen vom Königl. Schwed. Münzamt erhalten. Aus diesen Materialien sind sowohl die neuen Drähte wie die bereits vorhandenen hergestellt. Sämtliche Legierungen sind in Quarzröhren an einem elektrischen Vakuumofen, um Oxydation zu vermeiden, geschmolzen. Die Schmelzen wurden zu viereckigen Drähten ausgewalzt und dann, um die Legierungen homogen zu machen, mehrere Stunden bei einer Temperatur in der Nähe des Schmelzpunktes geglüht. Näheres über die Herstellungstechnik ist bei **Sedström**[3]) zu finden.

Erst nach dieser Homogenisierung sind die Drähte verschieden behandelt. Um Legierungen, die im Konzentrationsdiagramm spitzförmige Abweichungen aufweisen, zu erhalten,

---

1) **E. Bain**, a. a. O.

2) **G. Tammann**, Ann. d. Phys. **75.** S. 212. 1924.

3) **E. Sedström**, Einige physikalische Eigenschaften metallischer Mischkristalle, Dissertation, Stockholm 1924.

muß man, wie **Kurnakow**, **Zemczuzny** und **Zasedatelev** bei Au-Cu gefunden haben[1]), die Temperatur durch ein bestimmtes Gebiet sehr langsam herabsetzen, damit die Atome Zeit bekommen, sich zu ordnen. Dank der Arbeit der oben genannten russischen Verfasser ist es hier nicht nötig, näher auf die Wärmebehandlung einzugehen; wir wollen nur sagen, daß wir mit relativ kurzen Abkühlungszeiten aus-

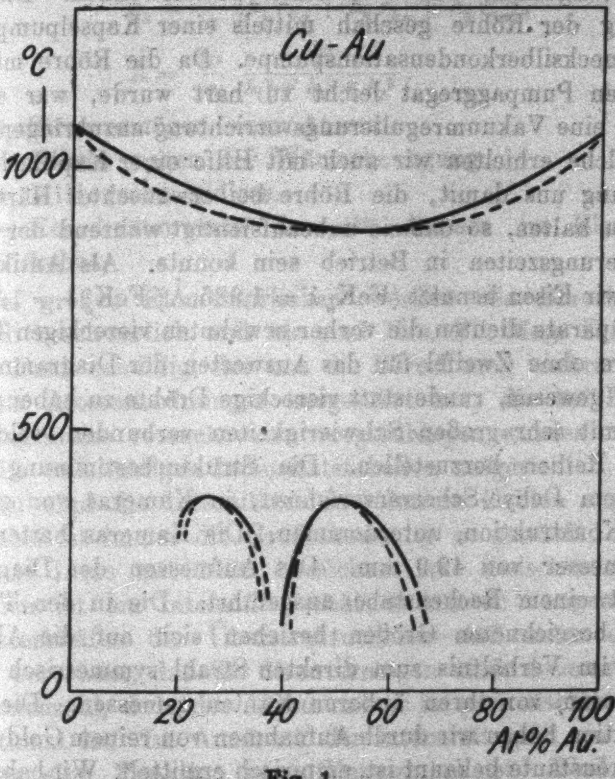


Fig. 1.

gekommen sind. Unsere Legierungen sind ein Temperaturintervall von etwa 100 Graden in 24 Stunden durchlaufen mit anfänglich einer Temperatur von einigen 10 Graden über den von **Kurnakow** angegebenen Umwandlungstemperaturen. Das Zustandsdiagramm mit den Umwandlungstemperaturen ist in Fig. 1 wiedergegeben.

---

[1]) **N. Kurnakow**, **S. Zemczuzny** u. **Zasedatelev**, a. a. O.

Röntgenapparatur.

Bei den Aufnahmen wurde die von **Siegbahn** und **Hadding** konstruierte Metallröntgenröhre verwendet. Die Hochspannung erhielten wir von einem Induktorium mit Quecksilberunterbrecher. Die Spannung war etwa 40000 Volt und die Stromstärke durch die Röhre nur etwa 3 Milliampere. Dieser niedrigen Stromstärke wegen war es notwendig, eine Beleuchtungsdauer von 8 Stunden zu verwenden. Die Evakuierung der Röhre geschah mittels einer Kapselpumpe und einer Quecksilberkondensationspumpe. Da die Röhre mit dem benutzten Pumpaggregat leicht zu hart wurde, war es notwendig, eine Vakuumregulierungsvorrichtung anzubringen. Eine gute solche erhielten wir auch mit Hilfe einer Kapillarleitung. Es gelang uns damit, die Röhre bei erwünschter Härte konstant zu halten, so daß sie unbeaufsichtigt während der langen Exponierungszeiten in Betrieb sein konnte. Als Antikathode haben wir Eisen benutzt (FeK_α $\lambda = 1{,}935$ Å; FeK_β $\lambda = 1{,}753$ Å). Als Präparate dienten die vorher erwähnten viereckigen Drähte. Es wäre ohne Zweifel für das Auswerten der Diagramme vorteilhaft gewesen, runde statt viereckige Drähte zu haben. Aber es ist mit sehr großen Schwierigkeiten verbunden, solche bei diesen Reihen herzustellen. Die Strukturbestimmung wurde nach dem Debye-Scherrerverfahren, in Kameras von gewöhnlicher Konstruktion, unternommen. Die Kameras hatten einen Durchmesser von 49,9 mm. Das Aufmessen der Diagramme ist mit einem Rechenstabe ausgeführt. Die in den Tabellen mit s bezeichneten Größen beziehen sich auf die Abstände zweier im Verhältnis zum direkten Strahl symmetrisch liegenden Linien, von ihren äußeren Kanten gemessen. Die nötige Korrektion haben wir durch Aufnahmen von reinem Gold, dessen Gitterkonstante bekannt ist, empirisch ermittelt. Wir haben auch Aufnahmen nach dem Fokussierungsprinzip von **Bohlin** und **Seemann** unternommen. Die benutzten Kameras für diese Aufnahmen waren nach der Konstruktion **Phragméns**, der bereitwillig Zeichnungen und Modelle uns zur Verfügung gestellt hat.

Berechnung von Lage und Stärke der Intensitätsmaxima.

Bei der Berechnung von Lage und Stärke der Intensitätsmaxima, die bei verschiedenen Atomanordnungen hervortreten, haben wir einen von **Waller**[1]) angegebenen Ausdruck verwendet. Dieser Ausdruck unterscheidet sich von dem bekannten **Laue**schen darin, daß **Waller** auch die Wärmebewegungen berücksichtigt.

Er findet für kubisches Gitter

$$J = \left| \sum_{k=1}^{n} \Phi_k e^{-M_k} \cdot e^{i \varrho_k} \right|^2 \cdot L,$$

$$\varrho_k = \frac{2\pi}{a} [h_1 r_{kx} + h_2 r_{ky} + h_3 r_{kz}],$$

$$L = \frac{4\pi}{a} \frac{N}{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}.$$

Φ_k Streuvermögen eines Atoms.
e^{M_k} Faktor wegen der Wärmebewegung.
h_i **Miller**sche Indices.
r_k Koordinatenwerte des k^{ten} Atomes im Elementarkubus.

Bei großen Elementarkuben werden die Berechnungen ziemlich beschwerlich und wir sind Hrn. Fil. Mag. **E. Hallén** großen Dank schuldig, der uns die Berechnung mehrerer komplizierter Atomanordnungen ausgeführt hat, die bei Deutung der Diagramme versuchsweise vorgeschlagen wurden. Er hat auch die vollständigen Intensitätstabellen aufgerichtet. In den Tabellen sind die Intensitäten in relativen Zahlen angegeben und dabei ist immer die Größenordnung so gewählt, daß die kräftigste Linie mit 1000 bezeichnet ist. Zwischen K_α- und K_β-Linien ist ein Intensitätsverhältnis von 4 : 1 angenommen. Die Intensitäten der Überstrukturlinien sind unter der Annahme berechnet, daß die Streuvermögen einer Atomart seiner Elektronenzahl, d. h. der Atomnummer im periodischen System proportional ist. Im Ausdruck der Intensität geht ein Faktor ein, der eine Funktion vom Glanzwinkel ist. Weil unsere Legierungen, die in die Kamera eingesetzt wurden, massive viereckige Drähte sind, ist es aber ohne Sinn, eine solche Funktion einzusetzen, denn der Gang der Intensität infolge Absorption im Probedrahte ist bedeutend größer. Eine Besichtigung der Aufnahmen zeigt, daß die Linienstärke relativ zu dem aus dem Intensitätsausdruck berechneten Werte mit dem

---

1) **I. Waller**, Upsala Universitets Årsskrift 1925; Mat. och nat. I.

Winkel sehr steigt, so daß für gleich starke Linien die berechneten Intensitäten viele Male größer sind im Gebiete der kleinsten Winkel als bei den übrigen, wo sich die Absorption weniger bemerkbar macht. Ein Vergleich ist daher zulässig, nur wenn die Linien nicht zu weit voneinander entfernt sind.

Resultate.

I. Au–Cu.

Die Resultate gehen aus den Tabellen und Figuren hervor. In Fig. 2 ist der elektrische Leitungswiderstand im Kon-

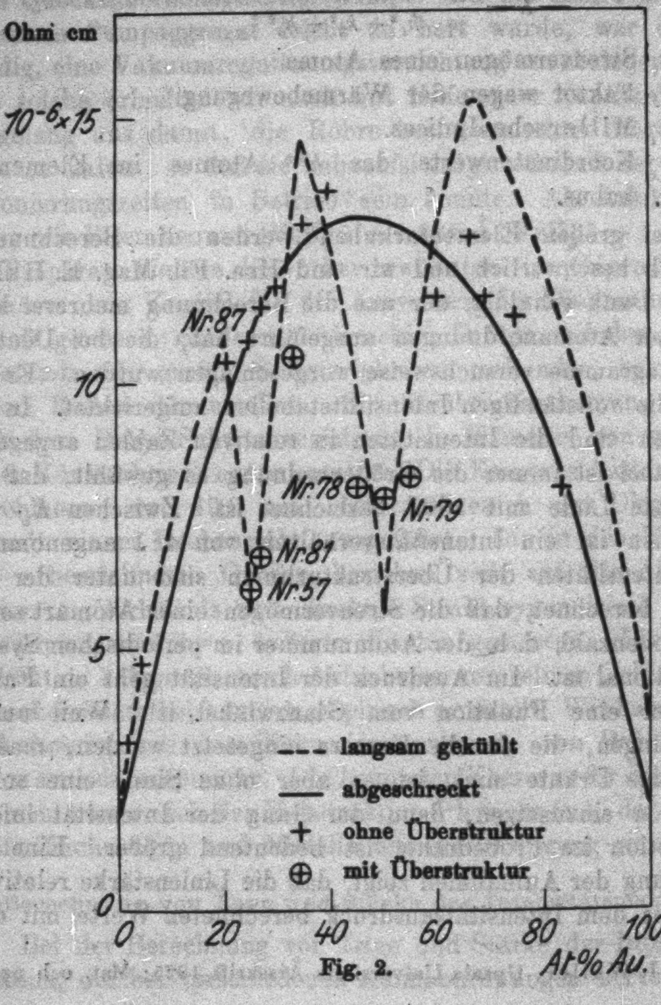
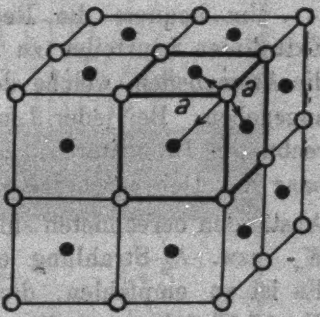


Fig. 2.

zentrationsdiagramme eingezeichnet. Die vollgezogene Linie folgt den von **Mathiesen** angegebenen Werten (ziemlich schnell gekühlte Legierungen) und hat die für Mischkristalle charakteristische Form. Die gestrichelte Linie zeigt die von **Kurnakow, Zemczuzny** und **Zasedatelev** bei langsamer Abkühlung der Legierungen gefundenen Widerstände mit den spitzförmigen Abweichungen der Kettenlinie bei 25 bzw. 50 At.-Proz. Au. Das von **Kurnakow** verwendete Gold ist aber kaum besonders rein gewesen, denn dessen Widerstand ist viel zu groß, was bedingt, daß der rechte Teil der Kurve zu hoch liegt. Die eingezeichneten Punkte geben die Widerstände der einzelnen Drähte wieder, für welche wir die Gitterstruktur untersucht haben. Dabei entsprechen die einfachen Kreuze Legierungen ohne Überstruktur, während die eingekreiselten Kreuze Legierungen mit Überstruktur wiedergeben. In der Nähe von 50 At.-Proz. Au waren die Legierungen wenig duktil und außerdem dazu geneigt, große Kristalliten zu bilden. Es war daher mit großen Schwierigkeiten verbunden, gute Aufnahme zu bekommen, was erklärt, daß die 50 At.-Proz.-Legierung nicht zum tiefmöglichsten Widerstand wärmebehandelt gewesen ist.

25 At.-Proz.-Gebiet.

Fig. 1, Taf. 1 gibt Reproduktion vom Debye-Scherrerdiagramm im 25 At.-Proz. Au-Gebiet wieder. Aufnahme Nr. 57 von 25,0 At.-Proz. Au langsam gekühlt, Nr. 87 von 25,0 At.-Proz. Au abgeschreckt und Nr. 81 von 27,0 At.-Proz. langsam gekühlt. Bei einem Vergleich der Aufnahmen 57 und 83, beide von 25,0 Proz. Au, geht mit großer Deutlichkeit hervor, daß der erstgenannte gegenüber dem zweiten einige Extramaxima aufweist. Noch deutlicher treten diese Linien auf 81 hervor. Aufnahmen von uns bis 33,3 At.-Proz. Au von durchmischten Legierungen zeigen denselben Typus der Diagramme, nur sind die Überstrukturlinien mit steigendem Au-Gehalt allmählich



Cu–Au : 25 At.-Proz. Au.
Fig. 3.

geschwächt. Im Spitzengebiet unterhalb 25 At.-Proz. Au zeigen die Aufnahmen analoge Verhältnisse.

Die zunächstliegende Annahme über die Atomgruppierung bei kubisch flächenzentriertem Gitter und dem Atomverhältnis 1 Au : 3 Cu ist ein Au-Atom in der Ecke und drei Cu-Atome in der Mitte der Seitenflächen des Elementarkubus, was Fig. 3 schematisch wiedergibt. Die Gruppe von vier solchen Atomen bildet die sogenannte Basis des Gitters. Der Elementarkubus wird also der möglichst einfache mit nur vier Atomen. Es ergibt sich für die Intensitäten:

$$J = \left| A + B \left[e^{i\pi(h_2 + h_3)} + e^{i\pi(h_1 + h_3)} + e^{i\pi(h_1 + h_2)} \right] \right|^2 \cdot L \cdot n.$$

n = Kombinationszahl,

woraus folgt:

a) h_i ungemischt, d. h. nur gerade bzw. ungerade

$$J = 64\pi \left(\frac{A + 3B}{4} \right)^2 \cdot \frac{N}{a} \cdot \frac{n}{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2},$$

b) h_i gemischt

$$J = 4\pi (A - B)^2 \cdot \frac{N}{a} \cdot \frac{n}{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}.$$

Der Ausdruck a) entspricht den normalen Linien, während b) die Überstrukturlinien gibt. Mit der angenommenen regelmäßigen Anordnung der Atome müssen also extra Linien entsprechend gemischten h-Werten hervortreten. Diese Ebenen sind (0, 01), (0, 1, 1), (0, 1, 2) usw.

Um bequem die Resultate betreffend die auftretenden Extralinien beurteilen zu können, haben wir in der Tab. Fig. 4 die Atomebenen, welche den verschiedenen Linien entsprechen, angegeben. Bei jeder Linie sind außerdem eingefügt: die berechneten Intensitäten, der Abstand zwischen einem Linienpaar des Debye-Scherrerdiagrammes, die aus den korrigierten Abständen berechneten sin α und die Werte sin α: $\sqrt{\Sigma h_i^2}$, die für K_α- bzw. K_β-Strahlung eine konstante Zahl ergeben sollen. Es ist zu empfehlen, die Tabelle zusammen mit Aufnahme Nr. 57 (Taf. I) zu studieren, weil es nicht möglich gewesen ist, die schwächsten Linien in Fig. 4 ersichtlich zu machen. Alle berechneten Linien sind zum wenigsten als K_α-Linien sichtbar. Der tiefere Wert 0,255 der Konstante für die (0, 0, 1)-Linie kann nicht sehr auffallen, teils ist die relative Genauigkeit für

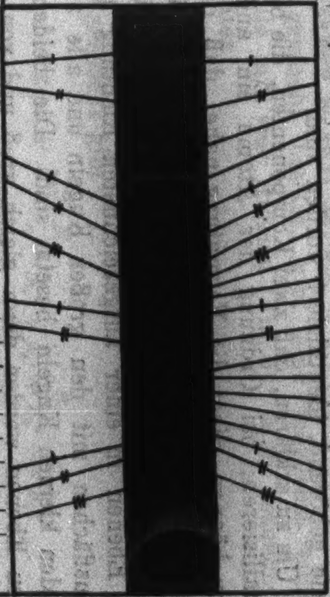
Überstruktur		Nr. 57. Au–Cu 25,0 At.-% Au	Kubisch Flächenc.		Intensität berechnet	s	$\sin\alpha$ (korr.)	$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}}$	
K_α hkl	K_β hkl		K_α hkl	K_β hkl		cm		K_α	K_β
123					116	13,22	$0{,}984_5$	$0{,}257_5$	—
023				004	63 + 35 = 98	12,13	930	258	$0{,}232_5$
			292		250	11,20	891_5	257	—
			113		818	10,44	854_0	257_5	—
013				222	82 + 63 = 145	9,69	813_5	257	235
003 }				113	113 + 204 = 317	9,06	775	258_5	233_5
122 }	003 }		022		562	8,37	729	258	—
	122 }				28	7,94	699	—	233
						7,70	681_5	—	—
				022	140	7,40	659_5	—	233
112					136	7,06	631_5	258	—
012					163	6,36	577	258	—
			002		562	5,61	514	257	—
						5,40	496	—	—
				002	140	5,05	465	—	232_5
			111		1000	4,82	444_5	257	—
				111	250	4,38	404_5	—	233_5
011					204	3,95	364_5	257_5	—
	011				50	3,54	326	—	231
001					204	2,80	255	255	—

Fig. 4.

s hier am kleinsten, teils macht eine Asymmetrie des Probedrahts in der Kamera für kleine Winkel besonders viel aus. Die relative Intensität der Linien stimmt auch mit den berechneten Werten gut überein und zwar sowohl die normalen wie die Überstrukturlinien; natürlich unter Berücksichtigung des oben diskutierten Ganges derselben wegen der Absorption im Draht. Zwei sehr schwache Linien gehen, wie die Tabelle zeigt, in das berechnete Schema nicht ein. Da sie aber bei kräftiger Oxydation der Präparate von normaler Stärke werden, ist es berechtigt anzunehmen, daß sie Oxydlinien sind.

50 At.-Proz.-Gebiet.

Fig. 2, Taf. I gibt Reproduktionen von Debye-Scherrerdiagrammen im 50 At.-Proz.-Gebiet wieder. Aufnahme Nr. 79 von 50,0 At.-Proz. Au langsam gekühlt, Nr. 89 von 50,0 At.-Proz. Au abgeschreckt und Nr. 78 von 45,0 At.-Proz. Au langsam gekühlt. Ein Vergleich zwischen den Aufnahmen Nr. 79 und Nr. 99, beide mit 50,0 At.-Proz. Au, zeigt, daß das kubisch flächenzentrierte Gitter durch die langsame Abkühlung in ein ganz neues Gitter übergegangen ist. Die stärksten Linien entsprechen gut, wie die Berechnung zeigt, den K_α-Linien eines tetragonalen flächenzentrierten Gitters, wo die eine Achse verkürzt ist. Die Aufnahmen des tetragonalen Gitters zeigen daneben eine Anzahl von relativ schwachen Linien, die als Extralinien, zu einer gewissen regelmäßigen Gruppierung der Atome gehörend, identifiziert worden sind.

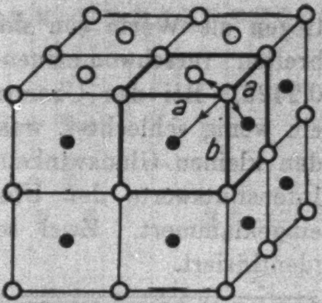
Um zu erklären, daß zwei Komponenten, die beide kubisch kristallisieren, bei Ordnung der Atome ein anderes Gitter geben können, liegt die Vermutung nahe, daß dies mit den verschiedenen Atomradien der Atome zusammenhängt. Stelle man sich die Atome als Kugeln vor und nehme an, daß alle zwei Ebenen in einer ausgezeichneten Richtung parallel der Kubusflächen mit den großen Kugeln und alle zwei Ebenen mit den kleinen Kugeln besetzt sind. Die beiden Achsen in diesen Ebenen werden dann gleich groß und von den Radien der größeren Kugeln bedingt, während die dritte Achse verschieden, und zwar kleiner wird.

Bei solch einem tetragonalen Gitter mit der dritten Achse verkürzt, gilt für die Lage der Linien:

$$\sin^2 \alpha = \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2 [h_1{}^2 + h_2{}^2 + h_3{}^2 + \varepsilon' h_3{}^2],$$

wo $(1 + \varepsilon)$ das Achsenverhältnis und $\varepsilon' = 2\varepsilon + \varepsilon^2$ ist.

Die Verkürzung einer Achse bewirkt, wie aus der Gleichung leicht zu ersehen ist, daß Linien, die von Ebenen mit gleichen Indizes herrühren, einfach auftreten wie bei einem kubischen Gitter, aber daß die übrigen Dubletten oder Tripletten werden. Es war leicht, die zusammengehörenden Dubletten auf den Diagrammen zu finden und durch ihr Ausmessen das Achsenverhältnis zu berechnen. Es hat sich für den Draht mit 50 Proz. Au, der die Aufnahme Nr. 79 gegeben hat, mit Präzisionskamera der Wert 1,069 ergeben. Die drei Drähte mit Überstruktur, die 45, 50 bzw. 55 Proz. Au enthielten und deren Widerstände im Diagramme, Fig. 2, angegeben sind, haben alle drei nach den Debye-Scherreraufnahmen ein Achsenverhältnis von 1,07 ergeben. Die $\sin^2 \alpha$ sollen dann den Zahlen 3,15, 4,00, 4,58, 8,00, 8,58, 11,15, 12,30, 12,58, 16,00, 18,32, 19,15, 20,00, 20,30 usw. proportional sein. Die angenommene Ordnung, mit je zwei Ebenen in einer Richtung mit einer Atomart und je zwei mit der anderen ungemischt besetzt, gibt eine möglichst einfache Elementarzelle mit vier Atomen (Fig. 5). Man bekommt für die Intensitäten:



Cu-Au: 50 At.-Proz. Au.
Fig. 5.

$$J = |A[1 + e^{i\pi(h_1 + h_2)}] + B[e^{i\pi(h_1 + h_3)} + e^{i\pi(h_2 + h_3)}]|^2 \cdot L \cdot n,$$

was für

a) h ungemischt gibt

$$J = 16\pi(A + B)^2 \cdot \frac{N}{a} \cdot \frac{n}{h_1{}^2 + h_2{}^2 + h_3{}^2 + \varepsilon' h_3{}^2}$$

und für

b) h_1 und h_2 gerade, h_3 ungerade oder h_1 und h_2 ungerade, h_3 gerade gibt:

$$J = 16\pi(A - B)^2 \cdot \frac{N}{a} \cdot \frac{n}{h_1{}^2 + h_2{}^2 + h_3{}^2 + \varepsilon' h_3{}^2}.$$

Fall a) entspricht den normalen Linien des Gitters, d. h. den Linien, die bei einem tetragonalen Gitter von nur einer Atomart auftreten sollen. Fall b) entspricht Überstrukturlinien gemäß der gewählten Modelle. In der Übereinstimmung mit berechneten Daten dieser Linien hat man eine Bestätigung der Richtigkeit der Modelle. Die $\sin^2 \alpha$ dieser Linien sollen den Zahlen 1,15, 2,00, 5,15, 6,60, 9,15, 10,00, 10,35, 14,35 usw. proportional sein.

Auch für dies Gebiet haben wir eine Tabelle (Fig. 6) errichtet, welche die Atomebenen der verschiedenen Linien angibt. Es ist hier zu empfehlen, die Tabelle zusammen mit Aufnahme Nr. 79, Taf. I, zu studieren. Alle normalen Linien sind sowohl als K_α wie als K_β ersichtlich und die Überstrukturlinien sind wenigstens als K_α zu sehen. Für die ersten liegen die Werte von $\sin \alpha : \sqrt{\Sigma h_i^2}$, mit Ausnahme von der breiten verschwommenen (0, 0, 4)-Linie zwischen 0,2415 und 0,2425. Bei den Überstrukturlinien ist die Übereinstimmung ein wenig schlechter, was teils der Schwäche der Linien, teils den kleinen Glanzwinkeln zuzuschreiben ist. Die berechneten Intensitätswerte der Überstrukturlinien sind in der Tabelle eingeklammert. Zwei schwache Linien sind als Oxydlinien identifiziert.

Gitterkonstanten bei Cu-Au (*Cm* × 10^{-8})

	Aus Röntgendiagrammen			Aus dem spez. Gew. (γ)	
At-% Au	a	b	$\sqrt[3]{a^2 b}$	γ	a
1,8	3,64	—	3,64	9,17	3,62
4,4	3,65	—	3,65	9,44	3,64
20,9	3,75	—	3,75	11,6	3,73
25,0	3,75	—	3,75	12,25	3,73
27,0	3,77	—	3,77	—	—
27,4	3,75	—	3,75	12,35	3,78
33,3	3,79	—	3,79	—	—
39,8	3,83	—	3,83	13,9	3,81
45,0	3,95	3,69	3,85	14,55	3,82
50,0	3,98	3,72	3,89	—	—
55,0	3,99	3,73	3,90	—	—
60,2	3,93	—	3,93	16,0	3,90
66,7	3,95	—	3,95	—	—
69,2	3,94	—	3,94	16,7	3,96
75,0	3,98	—	3,98	—	—
83,8	4,02	—	4,02	18,2	3,98
100,0	4,06	—	4,06	—	—

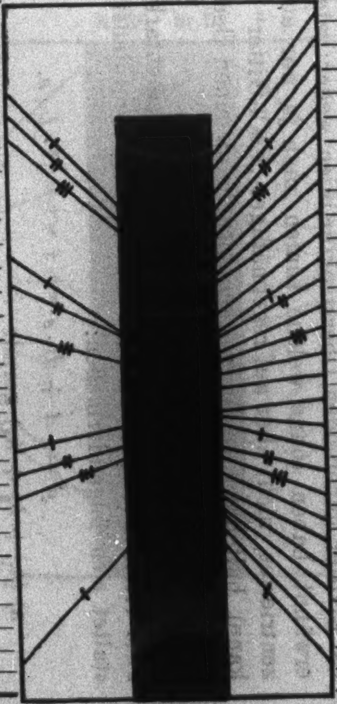
Überstruktur		Nr. 79. Au–Cu 50 At.-% Au	Tetragon. Flächenc.		Intensität berechnet	s	sin α (korr.)	$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{h^2+k^2+l^2+\varepsilon' l^2}}$	
K_α hkl	K_β hkl		K_α hkl	K_β hkl		cm		K_α	K_β
			040		98	13,44	0,971	0,243	—
				331	41	13,08	961	—	0,219
				004	11	12,48	943	—	228_5
312	330				(93)	12,17	932_5	244	—
203					(48)	11,81	919	242_5	—
	401				(10)	11,50	906_5	—	218_5
				040	25	10,82	875_5	—	219
			222		250	10,49	859	242	—
			113		256	10,33	850_5	242_5	—
			131		564	9,59	809_5	242	—
003				222	(13 + 62 = 75)	9,07	778	242	219
310				113	(36 + 64 = 132)	8,98	772	< 244	220
			113		Kupferoxyd	8,59	746	—	—
221				131	(74)	8,39	732_5	242_5	219
			202		367	8,06	710	242_5	—
			220		197	7,72	685_5	242_5	—
				202	92	7,16	643	—	219_5
			220		Kupferoxyd	6,99	630	—	—
112				220	(49 + 108 = 157)	6,86	620	241	219
	112				(> 27)	6,21	567_5	—	221
201					(132)	6,00	550	242_5	—
			002		172	5,61	517	241_5	—
			020		394	5,23	494	242	—
				002	43	5,04	467	–	218
				020	99	4,69	435_5	—	223
			111		1000	4,62	429_5	242	—
				111	250	4,20	391	—	220_5
110					(170)	3,74	347_5	244_5	—
001					(146)	2,80	257	239_5	—

Fig. 6.

Über die Gitterkonstante teils aus den Röntgendiagrammen, teils aus den spezifischen Gewichten (durch Wägung bestimmt) der Proben berechnet, haben wir eine Tabelle errichtet. Eine Abhängigkeit der Gitterkonstanten von der Atomverteilung haben wir nicht feststellen können.

II. Pd-Cu.

Diese Reihe ist früher von **Holgersson** und **Sedström**[1]) röntgenographisch untersucht worden. Sie geben an, daß das Gitter bei 40 bzw. 50 At.-Proz. Pd, wo **Sedström**[2]) im Leitfähigkeitsdiagramme spitzförmige Abweichungen gefunden hat, eine Mischung zwischen einem kubisch flächenzentrierten und einem kubisch körperzentrierten Gitter ist. Bei 45,5 At.-Proz. Pd konnten sie ein reines „CsCl-Gitter“ konstatieren. Legierungen, die nicht in den Spitzengebieten lagen, hatten den flächenzentrierten Typus der Komponenten. Um diese Resultate mit unseren Erfahrungen bei der Reihe Au-Cu besser vergleichen zu können, haben wir die Aufnahmen wiederholt, teils mit denselben Drähten, die von diesen Verfassern benutzt wurden, teils mit neuen, von uns hergestellten. Dabei hat sich bei 49,8 At.-Proz. Pd wie Fig. 3, Taf. I, wiedergibt und aus der Tabelle Fig. 7 deutlich hervorgeht, ein reines „CsCl-Gitter“ ergeben, was im Widerspruch steht mit der Angabe **Holgerssons** und **Sedströms**, obgleich das Präparat in beiden Fällen identisch dasselbe war. Da diese Verfasser daneben die zum CsCl-Gitter gehörenden Überstrukturlinien weder getafelt noch erwähnt haben (ohne welche Linien man ja nur auf körperzentriertes, nicht aber auf regelmäßiges „CsCl-Gitter“ schließen kann), halten wir es für zweckentsprechend, einen Bericht über unsere Untersuchung zu liefern.

Das CsCl-Gitter hat einen einfachen Elementarkubus mit zwei Atomen (Fig. 8) und die Berechnung der Intensitäten gestaltet sich folgendermaßen:

$$J = \left| A + B \cdot e^{i\pi(h_1 + h_2 + h_3)} \right|^2 \cdot L \cdot n.$$

a) $(h_1 + h_2 + h_3)$ gerade

$$J = 4\pi (A + B)^2 \cdot \frac{N}{a} \cdot \frac{n}{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2} \,.$$

---

1) **S. Holgersson** u. **E. Sedström**, 75. S. 143. 1924.

2) **E. Sedström** a. a. O.

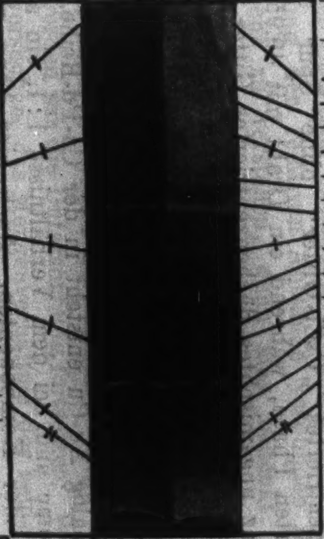
Überstruktur		Pd–Cu 49,8 At.-% Pd Nr. 86 Nr. 51	Kubisch Körperc.		Intensität berechnet	s	$\sin\alpha$	$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}}$	
K_α	K_β		K_α	K_β				K_α	K_β
hkl	hkl		hkl	hkl		cm			
003 221					56	13,09	0,962	0,327	—
				013	100	12,31	936	—	0,297
			022		250	11,98	924	327	—
	003 221				14	11,08	885₅	—	295
				022	63	10,11	836	—	297
			112		667	9,50	801₅	327	—
021				112	80 + 148 = 228	8,38	729	326	297₅
			002		250	7,35	654₅	327	—
				002	63	6,60	595	—	297₅
111					23	6,24	566	327	—
			011		1000	5,04	463	327	—
				011	250	4,58	421	—	296
001					51	3,55	325	325	—
	001				13	3,22	293	—	293

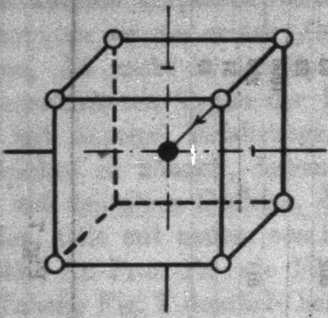
Fig. 7.

b) $(h_1 + h_2 + h_3)$ ungerade

$$J = 4\pi(\mathit{\Delta} - B)^2 \cdot \frac{N}{a} \cdot \frac{s}{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}\,.$$

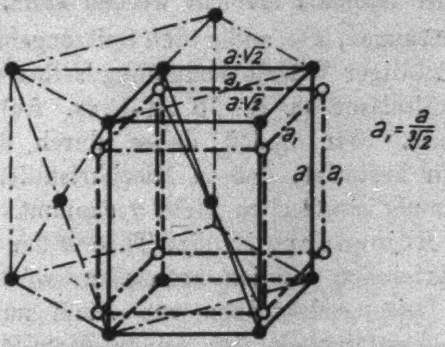
Fall a) gibt die normalen Linien des körperzentrierten Gitters und Fall b) die Überstrukturlinien, entsprechend den Atomebenen (0, 0, 1), (111), (0, 2, 1), (0, 0, 3), (2, 2, 1), (1, 1, 3) usw.

Zwischen 40 und 50 At.-Proz. Pd haben wir nur rein körperzentrierte Gitter mit einer Atomanordnung vom CsCl-Typus gefunden und zwar gaben alle diese Drähte einen anomalen, kleinen Widerstand. Zwei Drähte mit 38,9 bzw. 39,9 At.-Proz. Pd, deren Widerstände auch anomal klein waren, gaben Mischungsgitter zwischen einer flächen- und einer körperzentrierten Phase. Dabei ergab sich bei der ersten Phase eine statistische Verteilung, während die der zweiten vom CsCl-Typus war. Die Legierungen mit weniger Pd-Gehalt hatten das Gitter rein flächenzentriert mit statischer Verteilung und den Widerstand von normaler Größe. Bei 50 At.-Proz. Pd muß das Übergangsgebiet zwischen dem flächen- und dem körperzentrierten Gitter sehr eng sein. Wie oben erwähnt ist, ergab sich bei 49,8 At.-Proz. Pd ein körperzentriertes „CsCl-Gitter" ohne Spur einer flächenzentrierten Phase, während ein Draht mit 49,95 At.-Proz. Pd ein ganz ungemischtes flächenzentriertes Gitter mit statischer Verteilung besaß. Demgemäß war im Konzentrationsdiagramm das Widerstandsgefälle außerordentlich steil, die Zunahme an Pd-Gehalt um 0,15 At.-Proz. erhöhte den Widerstand von $8{,}3 \cdot 10^{-6}$ bis $43{,}7 \cdot 10^{-6}$ Ohmcm.



Cu–Pd : 50 At.-Proz. Pd.
Fig. 8.

Analog Au-Cu entsteht in der Cu-Pd-Reihe, bei Ordnung der Atome und bei dem Verhältnisse 1 : 1, ein anderes Gitter als das der Komponenten. Auch hier kann möglicherweise der Unterschied in den Atomradien eine Bedingung dieses eigentümlichen Verhältnis sein. Das kubisch flächenzentrierte Gitter entspricht ja, wie bekannt, der dichtesten Kugelpackung. Gibt es zwei Atomarten, im Verhältnis 1 : 1 mit den Radien ein wenig verschieden, entspricht einer Anordnung, mit je zwei Atomebenen von einer Atomart besetzt, die dichteste Packung. Bei hinreichend großem Unterschied zwischen den Radien zeigt aber eine Berechnung, daß dieses flächenzentrierte Gitter nicht mehr die dichteste Packung gibt. Diese wird statt dessen bei Übergang zu einem körperzentrierten Gitter erhalten auch hier mit je zwei Ebenen von einer Atomart besetzt, d. h. eben einem „CsCl-Gitter". Ein Unterschied in den Atomradien der Komponenten ist daher bei dem Verhältnis 1 : 1 für den Übergang von einem flächenzentrierten zu einem körperzentrierten Gitter günstig. Es geht aus Fig. 9 hervor, daß dabei der Übergang zwischen den beiden Gittern nur mit einer Änderung der relativen Abstände verbunden ist. Dies ist auch leicht zu verstehen, wenn man bedenkt, daß das kubisch flächenzentrierte Gitter, mit der Gitterkonstante a, als ein kubisch körperzentriertes Gitter, mit der dritten Achse tetragonal ausgezogen und mit den Gitterkonstanten $a:\sqrt{2}$ und a, betrachtet werden kann.



Kubisch flächen- bzw. körperzentriertes Gitter mit dem Zentrumatom gemeinsam.
Fig. 9.

Um den näheren Verlauf der Leitfähigkeitskurve kennen zu lernen, werden wir die Untersuchung fortsetzen. Wir wollen dann auch versuchen, das Mengenverhältnis der beiden Phasen in dem Mischungsgittergebiet festzulegen.

Folgerungen aus den Resultaten.

Durch die vorliegende Experimentaluntersuchung der Mischkristallreihe Au-Cu sind die Gittertypen der Verbindungen

Cu_3Au und CuAu festgelegt worden. Es hat sich ferner ergeben, daß auch beiderseits der Zusammensetzung einfacher Proportionen die für die Verbindung charakteristischen Überstrukturlinien vorkommen, nur werden sie mit der Entfernung von den Spitzen in Kurnakows Diagramm allmählich schwächer. Es ist daraus zu schließen, daß die überschüssigen Atome, sei es Cu oder Au, die andere Atomart durch Zufall im Gitter der Verbindungen vertreten. Inzwischen bleiben die Überstrukturlinien ersichtlich, auch wenn die Ordnung ziemlich unvollständig ist. Es soll bemerkt werden, daß die unvollständige Ordnung entweder durch nicht hinreichendes Tempern oder durch Überschuß einer Atomart erreicht werden kann.

Legierungen, die außer den Spitzengebieten liegen, zeigen trotz sorgfältiger Wärmebehandlung selbst nicht bei einfachen Atomverhältnissen (z. B. 75 At.-Proz. Au) Extramaxima im Röntgenbild. Wir finden daher durch diese Untersuchung noch mehr bestätigt, daß in Mischkristallen eine Tammannsche Ordnung gewöhnlich nicht vorkommt.

Von Höjendahl[1]) ist eine Theorie der Elektrizitätsleitung in Mischkristallen neulich entworfen worden. Er nimmt an, daß die Leitungselektronen von Atom zu Atom übergehen. Die gute Leitfähigkeit der reinen Metalle gegenüber Mischkristallen will er dadurch erklären, daß die Elektronen beim Übergang zwischen Atomen gleicher Art ihre freie Weglänge beibehalten, die aber beim Übergang zwischen Atomen verschiedener Art gebrochen wird. Borelius[2]) hat diese Theorie weiter entwickelt, wobei er darauf hinweist, daß diese Theorie die spitzenförmigen Abweichungen der Leitfähigkeitskurve einiger Mischkristalle im Konzentrationsdiagramm gut erklären kann, wenn eine mehr oder weniger vollständige Ordnung der Atome in diesen Gebieten angenommen wird.

Daß die anomale große Leitfähigkeit nicht mit einer Änderung des Gittertypus notwendig zusammenhängt, zeigen die Verhältnisse bei 25 At.-Proz. Au in der Au-Cu-Reihe mit großer Deutlichkeit. Durch die vorliegende Untersuchung ist es dagegen erwiesen worden, daß eine Erhöhung der Leit-

---

1) K. Höjendahl, Phil. Mag. 48. S. 349. 1924.

2) G. Borelius, Ann. d. Phys. 77. S. 109. 1925.

fähigkeit mit einem Ordnen der Atome (wenigstens der einen Phase) verbunden ist, und umgekehrt. Es scheint uns daher, daß die obengenannte Anschauung hier eine gute Stütze erhalten hat.

Die Untersuchung ist in dem Phys. Institut der Königl. Techn. Hochschule, Stockholm, ausgeführt. Dem Direktor des Instituts, Prof. G. **Borelius**, wollen wir hier unseren herzlichsten Dank für seine wertvollen Anweisungen und Ratschläge aussprechen. Ferner danken wir ihm für sein liebenswürdiges Entgegenkommen, um die experimentelle Arbeit zu ermöglichen und das rege Interesse, mit dem er unsere Arbeit verfolgt hat.

Stockholm, den 10. September 1925.

Nachtrag zur Korrektur.

Bei der Besprechung des tetragonalen Gitters auf S. 450 wurde angegeben, daß die drei Proben mit 45, 50 und 55 At.-Proz. Au alle das Achsenverhältnis 1,07 hatten. Eine Nachprüfung hat gezeigt, daß dies nur einem Zufall zuzuschreiben ist. Es liegen jetzt Messungen des Achsenverhältnisses an mehreren Proben vor und zwar mit den folgenden Resultaten:

At.-Proz. Au	Achsenverhältnis
38,1	1,028
42,0	1,068
45,0	1,072
50,0	1,069
50,0	1,078
55,0	1,071

Der Wert 1,07 bei 50 At.-Proz. wurde an einer Probe erhalten, wo die Ordnung der Atome nicht vollständig war, was sowohl aus dem elektrischen Widerstande (vgl. Fig. 2) als auch aus den Intensitäten der Überstrukturlinien hervorging. Der Wert 1,078, der an derselben Probe nach neuer

Wärmebehandlung erhalten wurde, gehört aller Wahrscheinlichkeit nach auch nicht zur vollständigen Ordnung. Stereometrische Berechnungen, wobei die Atome als Kugeln betrachtet werden, führen bei idealer Ordnung der Atome zum Wert 1,133.

Die fortschreitende Einordnung der Atome gibt sich also sowohl in einer Zunahme der Intensität der Extralinien als auch in einer Zunahme der elektrischen Leitfähigkeit und wenn die Ordnung, wie der Fall bei 50 At.-Proz. ist, einen Übergang zum tetragonalen Gitter veranlaßt, in einer allmählichen Zunahme des Achsenverhältnisses.

(Eingegangen 17. September 1925.)

4. *Bemerkungen über die Arbeit von Hrn. van Cittert*[1]: *„Zur Messung der Feinstruktur der Wasserstofflinien mit der Lummer-Gehrcke-Platte“*; *von E. Gehrcke.*

1. Die Intensitätsverteilungen breiter Linien sind im Stufengitter mit erheblichen Korrektionen behaftet, nicht aber im Interferenzspektroskop. Die Richtigkeit dieses Satzes leugnet Hr. van Cittert. Seine eigene Rechnung ergibt aber auf Seite 375 für den ungünstigen Fall $\tau = 0{,}883$, entsprechend einem Austrittswinkel von 88° aus der planparallelen Platte, eine Korrektur von nur 5 Proz. für den Abstand der beiden Komponenten von H_α. Die Korrektur wird kleiner, wenn man, wie es bei praktischen Messungen der Fall ist, zu *größeren* Austrittswinkeln als 88° und damit zu größeren Werten von τ übergeht; andererseits ist diese Korrektur bei den Stufengittern der praktisch vorkommenden Dimensionen erheblich größer als 5 Proz. und wird, wie auch Hr. van Cittert angibt, noch mit weiteren Korrektionen, wie z. B. dem Einfluß der Spaltbreite, die bei den Interferenzapparaten überhaupt wegfällt, behaftet. Unter diesen Umständen möchte ich bei der Untersuchung breiter Linien den Interferenzapparaten vor dem Stufengitter den Vorzug geben, schon deshalb, weil die Anbringung einer großen Korrektion, die genau bestimmt sein muß, für die Messung ungünstiger ist als die Anbringung einer kleinen Korrektion, welche weniger genau bekannt zu sein braucht. Diese praktischen Rücksichten beachtet Hr. van Cittert nicht und kommt so zu seiner abweichenden Ansicht. Die von Hrn. van Cittert angeführte Übereinstimmung einiger Messungen mit dem Stufengitter, bei denen aber die hier besonders großen photographischen Fehler unberücksichtigt geblieben sind, kann man wohl nicht als beweisend ansehen.

---

[1] Ann. d. Phys. 77. S. 372. 1925.

2. Für die Intensitätsverteilung einer Spektrallinie sind im Interferenzspektroskop Funktionen maßgebend, die Hr. van Cittert in der Form schreibt:

$$F(\gamma) = \int_0^{\lambda} f(\lambda) \cdot \frac{1 + \tau^{2p} - 2\tau^{p} \cos 2\pi \frac{p\gamma}{\lambda}}{1 + \tau^{2} - 2\tau \cos^{2} \pi \frac{\gamma}{\lambda}},$$

wo $f(\lambda)$ die Gausssche Fehlerkurve ist. Dies habe ich schon vor über 20 Jahren bemerkt¹), und es hat dann auf meine Veranlassung der Mathematiker P. Stäckel sich mit derartigen Funktionen beschäftigt und einen für numerische Berechnung wohlgeeigneten Ausdruck abgeleitet.¹) Die Ausführungen des Hrn. van Cittert über diesen Punkt sind also nicht so neu, wie es nach seiner Darstellung zu sein scheint; es handelt sich um eine schon vor Jahrzehnten erwogene und in der Literatur behandelte Frage.

3. Hr. van Cittert gibt nicht an, wie er die Intensitätsverteilungen seiner Figuren erhalten hat; vermutlich hat er irgendein Näherungsverfahren benutzt. Nun wird aber das wesentliche Ergebnis des Hrn. van Cittert, daß der untere Teil der Intensitätsverteilungskurve im Interferenzspektroskop höher liegt als die wahre Intensitätsverteilung, bereits durch eine Veröffentlichung von Lau und mir²), in der diese Verhältnisse auch durch eine Figur näher erläutert werden, vorweggenommen. So bildet das Ergebnis der Hrn. van Cittert eine erfreuliche Bestätigung des von Lau und mir gemachten Befundes.

4. Hr. van Cittert erläutert die bekannte Inkonstanz des Abstandes verschiedener Ordnungen der Interferenzen und bemerkt zutreffend, daß daraus eine Umformung der Intensitätsverteilungsfunktion folgt, die bei der Ausmessung der Interferenzstreifen zu berücksichtigen sei. Er knüpft daran die Bemerkung, daß „dieses nach aller Wahrscheinlichkeit bei den Messungen Gehrckes und Laus nicht geschehen ist“. Hierzu möchte ich bemerken, daß mir aus der Literatur bisher keine einzige Arbeit bekannt geworden ist, wo jemand so verfahren wäre, wie es Hr. van Cittert „nach aller Wahrscheinlich-

---

1) P. Stäckel, Arch. d. Math. und Phys. 8. S. 245. 1904.

2) E. Gehrcke u. E. Lau, Ann. d. Phys. 74. S. 575. 1924.

keit“ von Lau und mir annehmen zu sollen meint. Die Inkonstanz des Abstandes der verschiedenen Interferenzordnungen beim Interferenzspektroskop Lummer-Gehrcke ist etwas so Gewöhnliches, daß in den meisten Veröffentlichungen darüber kein Wort mehr verloren wird und man berücksichtigt immer, sei es durch Rechnung, sei es graphisch, diese in die Messungen eingehende Ungleichmäßigkeit der Abstände der Interferenzen.

5. In mehreren Figuren einer Arbeit von Lau und mir[1]) ist die Wellenlängenskale im gleichen Verhältnis mit den beigegebenen Abständen auf der photographischen Platte gezeichnet. Hr. van Cittert glaubt daraus auf einen Fehler unsererseits schließen zu sollen, er bemerkt aber nicht, daß durch die experimentelle Anordnung von *zwei* hintereinander gestellten planparallelen Platten die „Dehnung“ der Interferenzen hier aufgehoben wird, so daß die Interferenzen tatsächlich sehr nahezu gleichabständig werden. Dieser Effekt ist unter den Vorzügen der Anordnung ausdrücklich (s. Nr. 3 auf S. 571) genannt worden, und es hätte auch der Anblick unserer Fig. 4 Hrn. van Cittert erkennen lassen, daß wir eine von der gewöhnlichen abweichende Anordnung benutzten, welche besondere Erscheinungen bedingt. Die Gleichabständigkeit der Interferenzen, welche in unseren Figuren eine Wellenlängenskale proportional den Abständen auf der photographischen Platte bedingte, war also wirklich vorhanden.

6. Bezüglich des Abstandes der beiden Komponenten von H_a sei folgendes bemerkt: Dieser Abstand soll nach der Sommerfeldschen Theorie ohne Auswahlprinzip die Größe $\Delta\nu = 0{,}365$, mit Auswahlprinzip $0{,}329\ \mathrm{cm}^{-1}$ betragen, ist aber gemäß den Messungen von Lau und mir kleiner und beträgt rund 0,30; nach den letzten veröffentlichten Ergebnissen von Lau und mir wird $\Delta\nu$ zu 0,293[2]) bzw. 0,296[3]) gefunden. Dieser kleine Wert ist auch nach Janicki[3]), welcher die Beobachtungen von Shrum neu ausgewertet hat, der wahrscheinlichere, während die theoretischen Werte keine Stütze finden. Hr. van Cittert scheint den kleinen Wert von $\Delta\nu$

---

1) E. Gehrcke und E. Lau, Ann. d. Phys. 65. S. 564. 1921.

2) E. Gehrcke und E. Lau, Ann. d. Phys. 67. S. 388. 1922.

3) L. Janicki, Ann. d. Phys. 76. S. 561. 1925.

ebenfalls für den richtigen zu halten, denn er korrigiert an älteren Messungen von uns und schließt sie dem Wert von Janicki: $\Delta\lambda = 0{,}132$ Å.-E., welchem der Wert $\Delta\nu = 0{,}306$ entspricht, an. Wir hätten nach der Meinung von Hrn. van Cittert offenbar früher nur zufällig etwas beinahe Richtiges gemessen.

Ich möchte mich hier weiterer Ausführungen über diesen Punkt enthalten, da kürzlich auf der Physikertagung in Danzig Hr. Hansen Messungen mitgeteilt hat, die mit neuen *Lummer-Gehrcke*-Platten von *Zeiss*, Jena, und mit einem neuen, genau registrierenden Photometer erhalten wurden; ich hatte auf der Tagung den Eindruck, daß hierdurch die experimentellen Mittel zur Förderung dieser Frage wesentlich verbessert worden sind, so daß eine Erörterung der älteren Messungen ohne Berücksichtigung dieser neuen Befunde zur Zeit weniger Interesse hat.

Charlottenburg, Phys.-Techn. Reichsanstalt.

(Eingegangen 26. September 1925.)

5. *Beitrag zur Frage der Verfestigung beim Zug- und Druckversuch;*

von W. Tafel.

Seit ungefähr einem Jahrzehnt verstärkt sich in sehr verschiedenen Zweigen der Wissenschaft das Bedürfnis, die Frage der Verfestigung von Materialien, insbesondere Metallen, die unter Zug oder Druck stehen, zu klären, so in der Physik, der Mineralogie und der Metallkunde. Man bezeichnet dabei als „Verfestigung“ die Erscheinung, daß feste Körper, die bei gewöhnlicher Temperatur über die Fließgrenze hinaus belastet werden, also eine „Kaltreckung“ erfahren, fester werden, d. h. daß man eine um so höhere spezifische Belastung (Belastung je Querschnittseinheit) aufwenden muß, um die Verformung im Gang zu halten oder neu wieder aufzunehmen, je weiter sie fortgeschritten ist.

Am einfachsten läßt sich die Verfestigung aus dem Umstand ableiten, daß ein gezogener Körper, nachdem er eine unendlich kleine Längung erfahren hat, bei Fortdauer der gleichen Zugkraft sich nicht bis zum Zerreißen weiter längt. Denn ohne die Verfestigung würde die Kraft P, welche im Querschnitt F eine spezifische Druckspannung $\frac{P}{F} =$ oder größer s_f (Fließgrenze) bewirkt, bei verkleinertem Querschnitt[1] eine größere spezifische Zugbeanspruchung (P/f) und damit ein beschleunigtes Fließen hervorrufen. Unter ihrer Wirkung müßte die Fläche noch kleiner, die spezifische Belastung also größer und das Fließen wiederum stärker werden, bis der Stab zerreißt. Wo aber ein solcher, von einer konstanten, die ursprüngliche Fließgrenze eben überschreitenden Kraft gezogener Stab nicht zu Bruch geht — und in der Regel ist es nicht der Fall —, da muß eine Verfestigung während der elastischen bzw. plastischen Verformung eingetreten sein.

---

[1] Wenn gemäß unserer Voraussetzung die Länge eines gezogenen Metallstabes größer wird, so muß, da das Volumen annähernd das gleiche bleibt und nur eine praktisch zu vernachlässigende Auflockerung — bei Eisen z. B. etwa 0,2 Proz. — eintritt, der Querschnitt kleiner werden.

Über ihre Ursachen sind mancherlei Hypothesen[1]) entstanden, von welchen am bekanntesten sind:

1a. *Die Theorie von Tammann*: Er hat festgestellt, daß beim Fließen von plastischen, mehrkristallinen Körpern, die einer Formveränderung ausgesetzt werden, ein Gleiten an sogenannten „Gleitflächen“ stattfindet, die an der Oberfläche oder innerhalb der Kristallite entstehen (intergranulares bzw. intragranulares Gleiten). Zur Einleitung dieses Gleitens wird eine um so kleinere Kraft nötig sein, je mehr die Richtung der Gleitflächen mit derjenigen der Kraftlinien, den „Schub- oder Scherkräften“ in dem gezogenen oder gedrückten Körper zusammenfällt. In der Regel verlaufen diese unter 45° zur Hauptkraft. So geneigte Gleitflächen werden also zuerst wirksam werden. Die Formveränderung, das Fließen müßte daher, da die Gesamtmasse ja durch die Kohäsion zusammenhängt, zum Stillstand kommen, wenn an den benachbarten, ungünstiger orientierten Gleitflächen nicht auch ein Gleiten stattfände. Auch diese müssen also mehr und mehr an der Verformung teilnehmen. Die Auslösung der Bewegung an den Ebenen, steiler und flacher als 45°, erfordert aber, wie gesagt, eine größere Kraft, daher die Verfestigung. So einleuchtend diese, aus der Tammannschen Theorie abgeleitete Anschauung ist, so ist gegen sie als Erklärung für die Verfestigung doch einzuwenden einmal, daß sie nur auf mehrkristalline Körper mit verschieden orientierten Kristallen anwendbar ist, während die Verfestigung nach neueren Forschungen auch bei Einkristallen auftritt. Zum anderen, daß, wie errechnet worden ist, aus der verschiedenen Orientierung eine Zunahme der für die Gleitung erforderlichen Kraft um höchstens 100 Proz. möglich ist. Einzelne Metalle weisen aber eine weit größere Verfestigung auf, so Kupfer um 1400 Proz.

---

1) Vgl. auch G. Masing u. M. Polany: „Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften“, Verlag J. Springer, Berlin, S. 12.

1b. Eine ähnliche, auf verschiedener Orientierung der Massenteilchen aufgebaute Theorie hat auch Prandl aufgestellt.

2. *Theorie von Heyn* von verborgenen elastischen Spannungen. — Heyn denkt sich zum Zweck eines anschaulichen Vergleichs Spiralfedern von Plastilin umgeben und diesen Körper gelängt und danach entlastet. Das unelastische Plastilin hat kein Bestreben, die ursprüngliche Länge wieder anzunehmen, wohl aber die Spiralfedern. Sie bleiben, wenn der Widerstand des ersteren gegen die Wiedereinnahme der ursprünglichen Form groß genug ist, in seinem Inneren gespannt, auch wenn die längende Kraft nicht mehr wirkt. So bleiben nach Ansicht Heyns auch in einem plastisch deformierten Stab elastische Spannungen „verborgen“. Auch dieser Vergleich hinkt in einem Punkte, denn bei dem obigen imaginären Versuchskörper entstehen die elastischen Spannungen erst durch die plastische Formänderung, also *zugleich* mit ihr. Dagegen tritt bei elastischen Körpern, wie es z. B. Metallstäbe sind, zuerst die elastische Spannung und erst danach die plastische Formänderung auf. Immerhin liegt kein Grund vor, anzunehmen, daß die erstere restlos verschwindet, wenn die bleibende Formänderung eintritt. Es können darum die verborgenen elastischen Spannungen wohl zur Erklärung der sogenannten „elastischen Nachwirkung“ (Schrumpfen eines kalt gereckten Stabes bei längerem Liegen) und des „Bauchlingerschen Effektes“ (Sinken der Fließgrenze beim Druckversuch, wenn der Körper vorher plastisch gelängt worden ist) herangezogen werden, nicht aber als Ursache der Verfestigung. Denn entweder haben die elastischen Spannungen beim Eintritt des Fließens eine nicht mehr überschreitbare Grenze erreicht, dann könnte oberhalb der Fließgrenze keine Verfestigung mehr stattfinden, wie es tatsächlich der Fall ist. Oder man nimmt an, daß entsprechend dem geschilderten Plastilinkörper elastische Spannungen noch neben der plastischen Formänderung entstehen, dann müßte die Dehnungs–Belastungskurve nach dem Eintritt des Fließens einen gleichen Verlauf, wenn auch mit anderer Neigung, nehmen wie vorher. Das ist aber, wie z. B. aus der bekannten Zugversuchskurve des Eisens hervorgeht, zum mindesten nicht immer der Fall.

3. Unterhalb der Elastizitätsgrenze läßt sich die Verfestigung auch einfach dadurch erklären, daß bei Verkleinerung der Molekularabstände die anziehenden Kräfte weniger abnehmen als die abstoßenden. Diese Theorie ist schon Ende des 18. Jahrhunderts von Boskowith aufgestellt worden.[1])

4. Eine andere Erklärung für die Verfestigung, die ebenfalls von elastischen Spannungen ausgeht, ist von dem Verfasser gegeben worden.[2]) Er wies experimentell nach, daß beim Druckversuch der Kern eines belasteten Stabes die umgebenden Schichten aufweitet, während umgekehrt beim Zugversuch jener stärker schrumpft als diese. Da aber Kern und äußere Schichten miteinander zusammenhängen und da eine Auflockerung des ersteren, wie oben erwähnt, nur in sehr geringem Maße möglich ist, so findet bei einem gezogenen Stab sekundär ein Hereinziehen der äußeren Schichten durch den Kern statt. Der Umfang der letzteren verkleinert sich dadurch, er wird gleichsam gestaucht. Ein Stauchen bedingt aber gemäß unseren Erfahrungen wie auch als Folge der Konstanz des Volumens ein Breiten, in unserem Falle eine Vergrößerung der Höhe der äußeren Schichten, d. h. ein Steigen des Mantels dem Kern entlang. Gleiche sekundäre Bewegungen der Massenteilchen entstehen, wie der Verfasser später[3]) ausgeführt und gemeinsam mit O. Schmidt an aus Kern und Ringen zusammengesetzten Eisenzylindern experimentell nachgewiesen hat[4]), auch in Körpern, die von außen abgekühlt oder angewärmt werden. Es teilt sich also der Energiestrom, den

---

1) Vgl. u. a. M. Born, Aufbau der Materie und A. Eucken, Elemente der physikalischen Chemie, Fig. 17.

2) W. Tafel: „Über das Fließen und die inneren Spannungen bei gedrückten und gezogenen Stäben“, Stahl u. Eisen 1914, S. 480 u. 574.

3) W. Tafel: „Das Entstehen von Spannungen bei der Wärmebehandlung“, Stahl u. Eisen S. 1321, 1921.

4) W. Tafel u. O. Schmidt: „Wärmespannungen und deren Einfluß auf Form und Volumenänderung beim Härten“, Ztschr. d. V. dtsch. Ingenieure, Sonderblatt „Maschinenbaubetrieb“, 4. Heft 12, S. 393/98. — Weiter O. Schmidt: Dr.-Dissertation, Breslau 1921, über das gleiche Thema. Endlich W. Tafel: „Auflockerung des Stahls beim Härten“, Maschinenbaubetrieb 4, Heft 23, S. 649.

wir in Form von Wärme von außen in einen festen Körper geben, zunächst in zwei Äste: einer bildet Spannungsenergie, einer dient zur Temperaturerhöhung.[1]) Demnach muß die letztere um so kleiner ausfallen, je härter und spröder ein Körper ist, dagegen um so größer, je weniger er an inneren Spannungen zu tragen vermag. Das wird durch die Tatsache bestätigt, daß harte Körper eine große, weiche eine geringere spezifische Wärme aufzuweisen pflegen. Wo die Kohäsion die Bewegung hindert, treten an deren Stelle Spannungen, die mit fortschreitender Deformation zunehmen, also mehr und mehr Energie aufstapeln und eine größer und größer werdende spezifische Zug bzw. Druckbelastung erfordern.

Die sehr verwickelten Vorgänge sind im einzelnen hier ohne Belang, es genügt, darauf hinzuweisen, daß im gezogenen Stab durch das Hereinholen der äußeren Schichten relativ zum Kern Druckspannungen sowohl in der Richtung des Umfanges, als auch in axialer entstehen. Dagegen werden beim Druckversuch die gleichen Schichten vom Kern *gezogen*, während dieser durch seine Umgebung zusätzliche Druckbeanspruchung erfährt. Daß solche sekundäre oder „innere“ Spannungen, wie sie vom Verfasser zum Unterschied von den primären, unmittelbar durch äußere Kräfte hervorgerufenen in Ermanglung eines besseren Namens bezeichnet worden sind, sehr groß werden und selbst die bedeutende Materialfestigkeit gehärteten, hochkohlenstoffhaltigen Stahls überschreiten können, hat Heyn[2]) experimentell und rechnerisch an abgeschreckten Stahlstäben, aus denen nach dem Erkalten die Kerne herausgebohrt wurden, nachgewiesen. Wir wissen es außerdem von den Härterissen und von lange nach dem Abschrecken explodierenden gehärteten Stücken.

5. Endlich hat man die Verfestigung und verwandte Erscheinungen auf eine *Störung* zurückgeführt, die angeblich das *Raumgitter* bei Zug- und Druckbelastung erfährt, sei es, daß dessen Kantenlänge, sei es, daß seine Winkel sich ändern.

---

1) Vgl. auch W. Tafel: „Wärme und Wärmewirtschaft in der Industrie“, Aufl. 1 und 2, S. 21, Verlag R. Oldenbourg, München.

2) E. Heyn: „Einige weitere Mitteilungen über Eigenspannungen und damit zusammenhängend Fragen“, Mitt. a. d. Mat.-Prüf.-Amt S. 4, 1917.

Diese Hypothese hat wie die unter 4. den Vorzug, auch auf den Einkristallkörper zu passen, dagegen ebenfalls die Schwäche, auf die plastische Formänderung schwer anwendbar zu sein. Denn wir wissen aus den Fließlinien deformierter Körper, daß bei der Formänderung grob sinnlich erkennbare Bewegungen von Massenteilchen auftreten. Es ist aber nicht anzunehmen, daß sie *gleichzeitig* mit den genannten Gitterdeformationen statthaben, wie es sein müßte, wenn diese die Ursache der auch bei der plastischen Formänderung fortlaufend auftretenden Verfestigung wären. Eine Gitterstörung und makroskopisch erkennbare Fließvorgänge zu gleicher Zeit würden ja zur Voraussetzung Gleichgewicht zwischen den Widerständen beider haben, eine Voraussetzung, deren Wahrscheinlichkeit = Null ist.

Gegen die vorliegende Theorie spricht auch, daß bisher, soweit die Kenntnis des Verfassers reicht, die Änderung der Gitterkonstanten, die selbst nach den größten noch möglichen Drucken nachweisbar waren, sehr geringfügig sind, so daß sie nur schwer als Ursache für Verfestigungen, die bis zu 1400 Proz. gehen, angezogen werden können.

Damit wollen wir nicht etwa die Möglichkeit von Raumgitterstörungen, wie sie insbesondere von Czochralski[1]) verfochten wird, bestreiten, sondern nur der Meinung Ausdruck geben, daß sie nicht die einzige Ursache der Verfestigung sein können. Die Polemik über diese Frage beruht vielfach auf einer verschiedenen Auffassung über den Begriff „Raumgitterstörung". Gegen die Änderung der Gitterkonstanten von Metallen bei der Verformung in einem die Verfestigung bewirkenden Maße sprechen die geringen Schwankungen der Dichte, die bei hohen Bearbeitungsgraden nur erzielt werden können.[2]) Dagegen ist ohne eine Störung in der unten eingehend noch zu behandelnden Weise, *daß die Raumgittermaschen aneinander vorbeifließen und ihre Plätze wechseln*, die Deformation von Einkristallkörpern durch Zug, Druck und

---

1) Vgl. u. a. I. Czochralski: „Moderne Metallkunde", Verlag von J. Springer, Berlin.

2) Vgl. u. a. W. Geiss u. I. A. M. van Liempt: Ann. d. Phys. 77. S. 105. 1925.

Torsion, die nun einmal Tatsache ist, schlechterdings nicht vorstellbar.[1])

Innere Spannungen in weiterem Sinne des Wortes sind auch die *Oberflächenspannungen.* Sie entstehen in einem festen Körper bekanntlich dadurch, daß die Kohäsionskräfte in seinem Inneren sich ausgleichen. Jedes kleinste Massenteilchen wird ringsum von seiner Umgebung angezogen, befindet sich also, soweit es nicht mittelbar vom Rande her durch die Oberflächenspannung Druck erfährt, gleichsam in der Schwebe. Dagegen werden die Randteilchen, von außen unbeeinflußt durch die Kohäsionskräfte, einseitig gegen das Innere und (an Kanten und Ecken) gegeneinander gepreßt und üben ihrerseits einen Druck auf dieses Innere und die Nachbarteile aus. In einem Einkristallkörper würde demnach für die Verlagerung schwebender Teile, wenn sie reibungslos vor sich ginge, keine Arbeit verbraucht, oder exakter ausgedrückt: Es ist zwar (Fig. 1) um das Teilchen 3 eines gleitenden Netzebenenpaketes aus der Stellung unter 1 in die punktierte (4) unter 2 zu bringen, eine Energie aufzuwenden $= Km \cdot a$, wobei Km die mittlere Kohäsionskraft auf dem Wege a ist. Aber die gleiche Energie ist auch frei geworden dadurch, daß Teil 3 den Weg a gegen den Teil 2 hin zurückgelegt hat. Anders bei den Randteilen. Bei einem gezogenen Einkristallkörper, dessen Ausgangszustand Fig. 2a, dessen Endzustand Fig. 2b darstellen, wird zwar bei der Verlagerung der Teile 1 und 8 durch die Kohäsionskräfte zwischen den Paketen I und II wieder

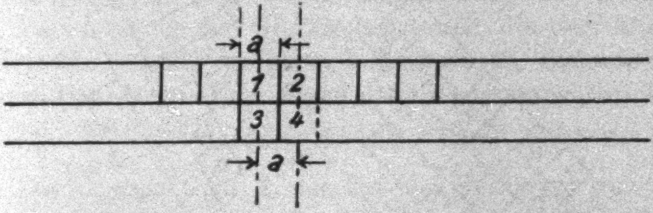


Fig. 1. Energieaufwand im Innern eines Einkristallkörpers.

---

[1]) Vgl. auch P. Ludwik: Kristallgitter und Härtung", Ztschr. d. V. dtsch. Ingenieure 1925, S. 349 und G. Masing u. M. Polany: „Kaltreckung und Verfestigung." — Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften, Berlin 1923, Verlag von J. Springer.

ebensoviel Energie frei, wie zu ihrer Überwindung nötig war. Die Teile 3 und 6 dagegen verzehren an der Berührungsfläche zwischen I und II nur Energie, ohne solche frei zu machen.[1])

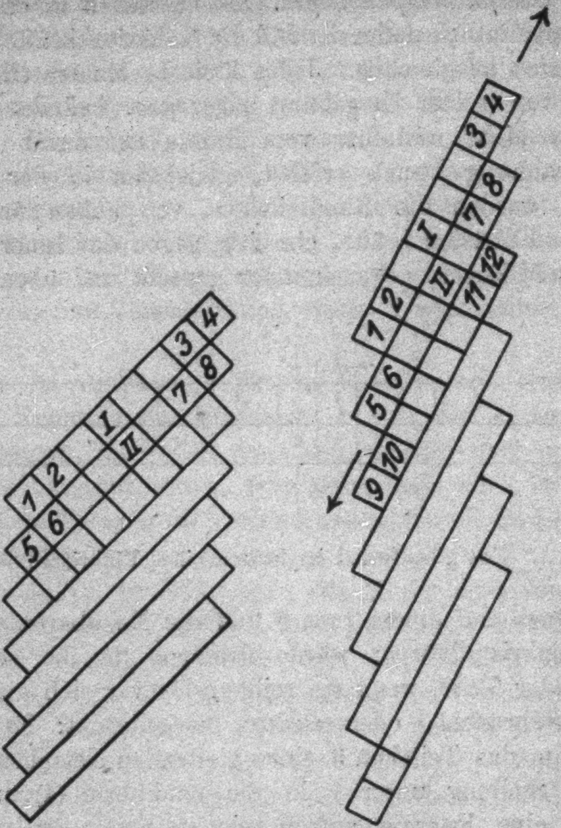


Fig. 2a. Fig. 2b.

Energieaufwand bei den Randteilen.

Im ganzen ist also wegen der Verlagerung der Randteilchen für das Gleiten Energie aufzuwenden. Angenommen, dieser

---

1) In der Wirklichkeit sind die Gleitflächen keine idealen Ebenen, sondern schmale Zonen, welche Zerstörungen des Gefüges aufweisen. Für unsere Betrachtungen, d. h. für die Gesamtheit der aufzuwendenden Energie ist das ohne Belang, wie es für den Vorgang des Übereinanderschiebens zweier Gebirgsschichten gleichgültig ist, ob die Rutschfläche einen glatten Schliff oder eine dünne Schicht von zerriebenem Gestein darstellt.

grob versinnbildlichte Vorgang ginge reibungslos vor sich, so müßte er sich nach obigem bei einem Einkristallkörper, den wir auf Zug oder Druck beanspruchen, in nachfolgender Weise abspielen:

Es sind zu überwinden:

a) die *Kohäsionskräfte der Oberfläche* (W_O) — Diese stellen sich mit fortschreitendem Gleiten immer neu der Verschiebung entgegen, je mehr Netzmaschen freigelegt werden. W_O bleibt also während des ganzen Vorganges wirksam und nimmt bei gleichem Gleitweg zunächst mit größer werdenden Sichelflächen (schraffierte Flächen in Fig. 4) zu, nach Überschreitung eines Maximums, bis zu welchem das Gleiten jedoch selten fortschreiten wird, ab. Zu dieser Vergrößerung der Oberfläche durch Verschiebung der Gleitflächenränder, die dem Auge als Rauhung (Krispelung) erscheint, kommt ein W_O' dadurch hinzu, daß die Oberfläche sich durch die Verformung (nach der Gleichung $\frac{h\,d^2\pi}{4} = \text{konstant}$) ändert. Denn durch eine derartige Deformation wird in der Tat das Verhältnis von Oberfläche zu Volumen ein anderes. Die Art und Größe der Änderung hängt von der Form des Körpers ab.

b) *Die Kohäsionskräfte der inneren Teile* (Wi). Die Kraft, welche zu ihrer Überwindung gebraucht wird, ist, wie gezeigt, nur zur *Einleitung* des Gleitens erforderlich. Sind diese Teile oder Netzmaschen über die Hälfte des Weges a (Fig. 1) hinausgedrückt, so federn sie, da ja die deformierende Kraft weiter wirksam ist, in die neue Maschenstellung und über diese hinaus in die nächste und so fort. Das Gleiten müßte also in unendlich kleinen Schwingungen mit zunehmender Geschwindigkeit sich fortsetzen, bis der Körper reißt, wenn keine Verfestigung einträte und die gemachte Voraussetzung der Reibungslosigkeit zuträfe. Es ist also zu beachten, daß Überwindung der Kohäsionskräfte und innere Reibung keineswegs identisch sind, wie das häufig angenommen wird. Die genannte Voraussetzung trifft aber nicht zu. Wir wissen aus einer Reihe von Beobachtungen beim Fließen insbesondere von Metallen, daß die Verschiebung von Massenteilchen in ihrem Inneren mit sogenannter „innerer Reibung“ vor sich geht, wie wir sie ja auch beim Strömen von Flüssigkeiten kennen. Es sei nur genannt, daß beim Pressen[1]), Ziehen, Walzen[2]) usw. die für die Verformung aufzuwendende Energie mit zunehmender Geschwindigkeit wächst, was nicht wohl anders, als durch das Vorhandensein einer inneren Reibung zu erklären ist.

Somit kommt zu den Widerständen unter a) und b):

c) *die innere Reibung* (W_R). — Diese wächst, wie erwähnt, mit zunehmender Gleitgeschwindigkeit und muß somit die beschleunigte Bewegung nach und nach in eine gleichförmige verwandeln. Zum Stillstand kann sie kommen durch noch zu besprechende Verknüllungen der Gleitflächen, oder auch durch zunehmende innere Spannungen („sekundäre“ oder Oberflächenspannungen). Einmal zum Stillstand gelangt, muß zum Wiedereinleiten des Gleitens eine größere Kraft P_{total} aufzuwenden sein, als vorher zu seiner Unterhaltung nötig war, einmal, weil auch hier die Reibung der Ruhe vermutlich größer ist, als die der Bewegung, und zum anderen, weil nun für die inneren Teile ein neuer Schwingungsstoß gemäß Ziffer b) erforderlich ist.

Diese Betrachtungen geben unserer Annahme nach zunächst eine Erklärung für das eigentümliche ruckweise Verformen von Einkristallkörpern[3]), immer unter der Voraussetzung, daß der Gleitvorgang durch eines der oben genannten

---

[1]) Vgl. u. a. P. **Ludwik**: „Elemente der technologischen Mechanik“, Verlag von J. Springer, Berlin. — Ferner P. **Ludwik**, Z. d. V. dtsch. Ingenieure, 1923, S. 142: „Über die Änderung der Metalle durch Kaltreckung.“ — Hierher gehört auch „der Einfluß der Geschwindigkeit und Probenbreite auf die Kerbschlagprobe“. Vgl. d. Arbeiten von **Skribeck**, **Moser** u. a. m. (St. u. E.)

[2]) W. **Tafel** u. E. **Schneider** (Stahl und Eisen S. 305. 1924) haben in einer Abhandlung über das „Greifen von Walzen“ gezeigt, daß die Greiffähigkeit, die mit der inneren Reibung abnimmt, mit wachsender Walzgeschwindigkeit zuerst langsam, dann plötzlich schroff fällt. Es scheint also bei Metallen eine Art von „kritischer Geschwindigkeit“ zu geben, bei welcher die innere Reibung plötzlich stark anwächst. Eine ähnliche Erscheinung, der sogenannte „starre Schlag“, ist den Schmieden von altersher bekannt.

[3]) Vgl. E. **Hintze**: „Versuche über die Plastizität von Steinsalz in lösungsfähigem Medium usw.“, Zeitschrift „Kali“, 1921. S. 49. 129 und 147 und L. **Milch**: „Über die Abhängigkeit der Plastizität des Steinsalzes von der Temperatur und vom umgebenden Medium.“ Neues Jahrbuch für Mineralogie usw., Beilage Band 48. S. 163 u. a m.

Momente zum Stillstand kommt. Denn es wird, nachdem die Elastizitätsgrenze (Punkt *E* in Fig. 3) überschritten ist, noch ein Ansteigen der Belastung (bis *F*) nötig sein, um die äußeren Teilchen aus der Oberfläche zu ziehen, diese gleichsam *„durchzustoßen“* (Ziffer *a*), weiter, um den Schwingungsimpuls für die inneren Teile gemäß Ziffer *b* zu geben und endlich, um die innere Reibung zu überwinden. Die Belastung im Punkte *F* müßte den Gleitvorgang, abgebremst durch die innere Reibung, fortführen, wenn nicht eine Verfestigung durch sekundäre Spannungen, Oberflächenänderung oder Verknüllungen einträte. Wir nehmen an, daß es der Fall und *G* (Fig. 3) der Punkt sei, wo das Gleiten aufhört. Dann ist dort besagter neuer Impuls für die Verschiebung der inneren Teile erforderlich; die Belastung steigt von *G* auf *H*, bis der Weg *a*/2 (Fig. 1) überwunden ist, worauf die plastische Deformation wieder einsetzt und so fort.

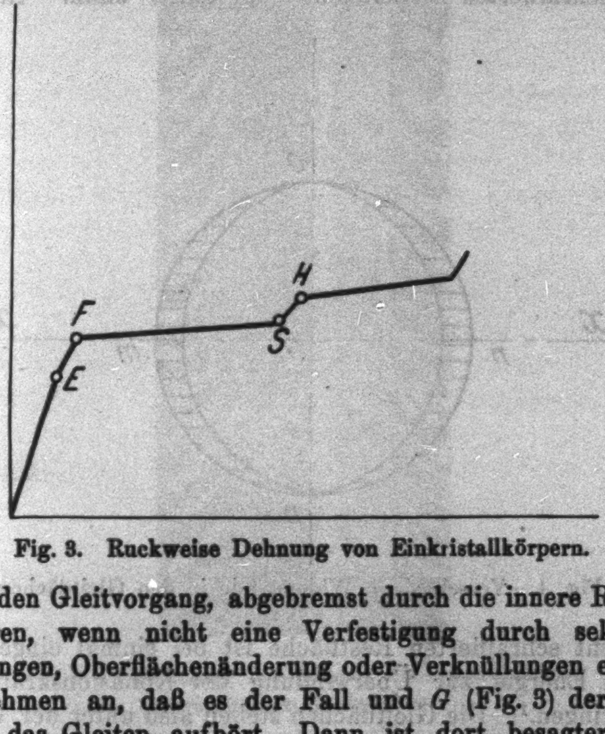


Fig. 3. Ruckweise Dehnung von Einkristallkörpern.

Der Vorgang beim mehrkristallinen Körper soll später betrachtet werden. Wir wenden uns zunächst zu den vorhin erwähnten „Verknüllungen“.

Aus Fig. 1 und 2b und den obigen Betrachtungen geht hervor, daß die Widerstände einer Gleitfläche gegen die Verschiebung verschieden groß sind, am stärksten am Rande (Fig. 4) in der Achse $x\ x'$ (Richtung der Schubkraft) in den Punkten m und n. Die Teilchen bei O und p werden zwar ebenfalls in der Oberfläche bewegt, aber nur von einer Kreishälfte in die andere, sie schieben sich also unter andere Teilchen, d. h. sie gleiten nach Art der Fig. 1. Daraus folgt, daß man die erhöhten Randwiderstände in den Gleitebenen durch die in Fig. 4 schraffierten Sichelflächen darstellen kann. Innerhalb der nicht schraffierten Restfläche ist bei einmal eingeleitetem Gleiten Energie zur Überwindung der Kohäsionskräfte nicht aufzubringen.[1] Die Gleitflächen stehen also unter der Wirkung einer Schubkraft, welcher sich in ihren verschiedenen Zonen gemäß Fig. 4 verschieden große Widerstände entgegenstellen. Das ist relativ das Gleiche, wie wenn wir einzelne Teile eines Körpers von gleichem Widerstand verschieden stark beanspruchen. Der letztere Fall findet sich in der mechanischen Technologie häufig, so beim Pressen von Metall, beim Walzen

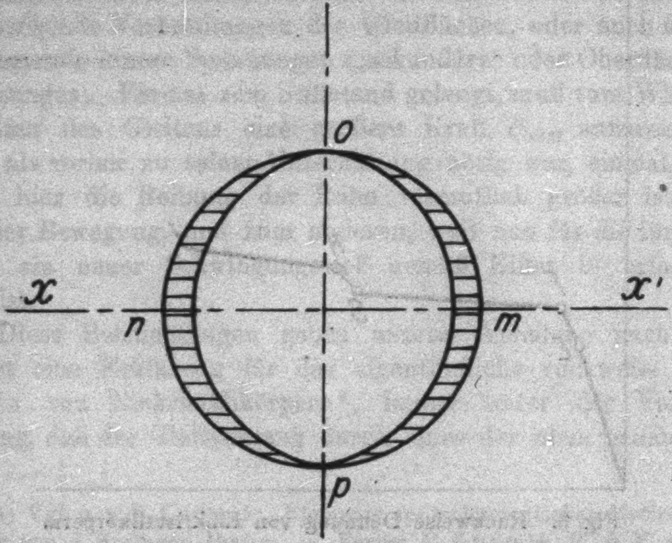


Fig. 4. Verschiedene Widerstände in den Gleitflächen.

---

[1] Auf den verschiedenen Gleitwiderstand der Oberfläche gegenüber dem Inneren haben schon hingewiesen L. Milch (vgl. Fußnote 3, S. 474) und A. Ritzel (vgl. ebendort S. 155).

von sogenannten „irregulären" Profilen, deren Einzelteile verschiedene Abnahme, also (nach Heyn) „natürliche" Längung erfahren, während doch ihre effektive Längung, weil sie zusammenhängen, die gleiche sein muß. In solchen Fällen fließt entweder von dem stärker gedrückten Teil Material in den schwächer gedrückten oder der erstere paßt sich der Längung des letzteren dadurch an, daß er sich krümmt oder Falten

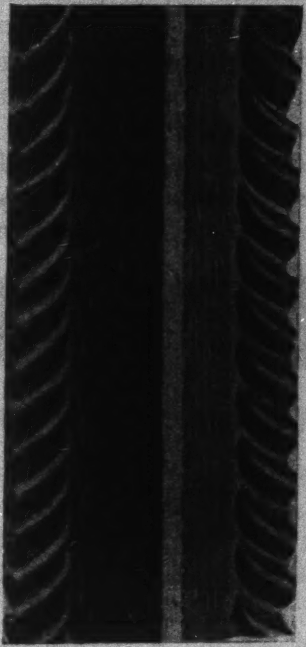


Fig. 5. **Fältelung der Ränder eines verschieden gedrückten Walzstabes.**

bildet. Ein besonders schönes Beispiel dieser Art zeigt Fig. 5. Es handelt sich um einen aus quadratischem Kaliber von etwa 30 mm Quadratseite kommenden Walzstab, dadurch entstanden, daß der eingesteckte Ovalstab, welcher hochkant (ausgezogene Stellung in Fig. 6) durch das Kaliber hätte gehen sollen, umgefallen war und flach durch die Walze ging (gestrichelte Lage in Fig. 6). Dadurch gerieten die Spitzen des Ovals in den kleinen Zwischenraum (*s*) zwischen Oberwalze I und Unterwalze II und mußten zu den schräg schraffierten Rechtecken unter starker Streckung, die im Mittel wohl das 2—3-fache betrug, ausgewalzt werden. Dagegen war die natürliche Streckung des mittleren senkrecht schraffierten Teiles verschwindend. Beide Teile hängen aber zusammen, konnten also nur die gleiche Länge annehmen. Die stärker gedrückten kleineren Randteile haben sich nun der Länge des mittleren, größeren und darum stärkeren Teiles dadurch angepaßt, daß sie sich beim Austritt aus den Walzen in der aus Fig. 5 ersichtlichen Weise kräuselten. Es geschah das nicht etwa nur auf ein kurzes Stück, sondern auf die ganze Länge des Walzstabes, die nach dem Stich *c* 8 m betrug. Solche Fältelungen sind nicht nur im Walzwerk, sondern beim Ziehen (z. B. bei mit ungeeignetem Werkzeug tiefgezogenem Geschirr) und anderen technologischen Vorgängen bekannt und gefürchtet. Sie treten stets dann auf, wenn zusammenhängende Querschnittsteile eines zu verformenden Körpers stärker

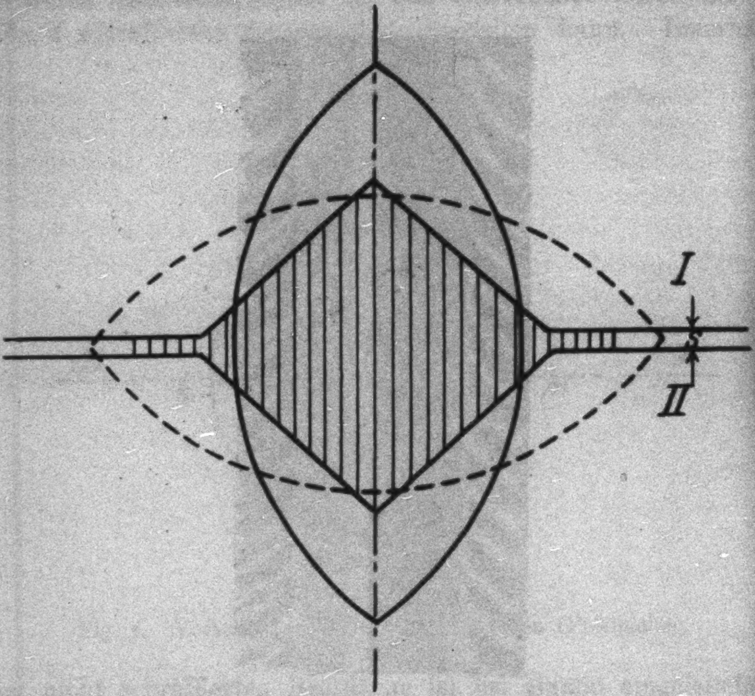


Fig. 6. Beim Walzen umgefallenes Oval.

gedrückt werden als die benachbarten und wenn ein anderer Ausgleich durch Überfließen von Material aus dem stärker in den schwächer gedrückten Teil oder durch Mitziehen des letzteren erschwert ist. Bemerkenswert ist, daß die Fältelung nicht möglich ist, solange die Randteile sich zwischen den Walzen oder dem Ziehwerkzeug usw. befinden, sondern erst beim Austritt, also *nach erfolgter Deformation.* Vorher kann der Ausgleich nur durch gewaltige elastische Druckspannungen in den Rand-, bzw. Zugspannungen in den mittleren Teilen stattgefunden haben.

Ein zweites Beispiel zeigt Fig. 7. Bei einem ⊔-förmigen Profil erfahren bei richtiger Walzenstellung alle Querschnittsteile gleiche Abnahme und Längung. Dagegen hat bei dem in der Figur gezeigten Stück die Walze den Grund des Profils weniger gedrückt als die seitlichen Gurtungen. Die letzteren

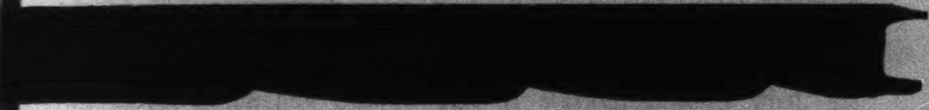


Fig. 7. Geradlinige Faltung eines ungleich gedrückten Profils.

paßten sich der Längung des ersteren durch Faltung an. Ihre Form ist hier besonders bemerkenswert, weil sie nicht in Krümmungen, sondern in der Hauptsache in gebrochenen, geraden Linien verläuft, wie aus dem Querschnitt der Figur ersichtlich ist.

Ein anderes, ad hoc, d. h. für die vorliegenden Untersuchungen herbeigeführtes Beispiel zeigen Fig. 8 und 9. Zwei Säulen von 15 mm Quadratseite sind in der Mitte durch eine dünne Lamelle verbunden (Abmessungen vgl. Fig. 8). Die ersteren vertreten die schraffierten Randteile in Fig. 4 mit stärkerem Widerstand. Die Lamelle dagegen die inneren „schwebenden" Teile, die von jenen mitgenommen werden. Material: Eisen in Handelsqualität. Die Säulen wurden in *vertikaler* Richtung unter einer hydraulischen Presse auf eine Höhe von 33 mm kalt gestaucht. Die Lamelle beulte sich dabei ein, d. h. sie zeigte eine Krümmung nicht nur in der Ebene, die senkrecht zur Zeichenebene durch YY' gelegt ist (diese ist bedingt durch die Vergrößerung der Säulenquerschnitte beim

Stauchen, durch welche die Entfernung *e* kleiner wird), sondern auch in der senkrechten Ebene durch *X X'*.

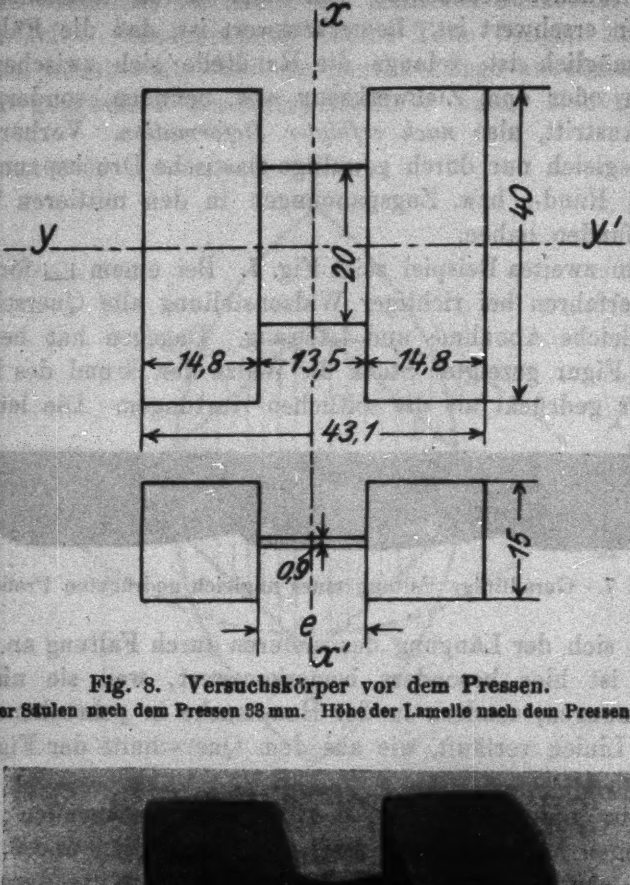


Fig. 8. Versuchskörper vor dem Pressen.
(Höhe der Säulen nach dem Pressen 33 mm. Höhe der Lamelle nach dem Pressen 19,8 mm.)

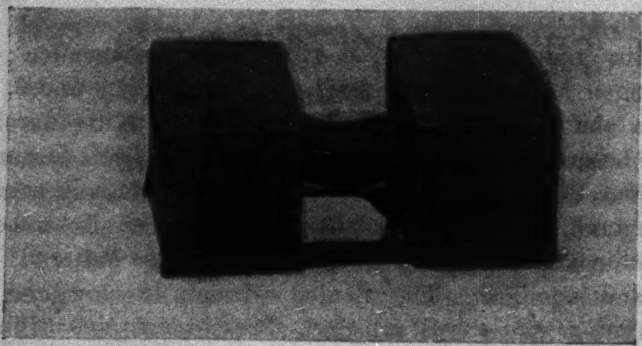


Fig. 9. Ansicht des Versuchskörpers nach dem Pressen.

Ähnlich entstehen nach Ansicht des Verfassers die Krümmungen und Faltungen, die man vielfach in den Gleitebenen gedrückter und gezogener Körper, vor allem Einkristallkörper beobachtet hat. Sie verstärken natürlich den Gleitwiderstand in hohem Maße und „blockieren“, wie die zahlreichen Vertreter dieser neuesten, nach obiger Aufstellung sechsten Verfestigungstheorie es ausdrücken, die plastische Verformung schließlich ganz, so daß bei weiterer Belastung der Bruch eintritt.[1])

Für die oben von uns dargestellten Vorgänge, insbesondere für ein Widerstandsfeld nach Art von Fig. 4 spricht auch, daß Einkristalldrähte aus Aluminium beim Zerreißen nicht, wie mehrkristalline den ursprünglichen runden Querschnitt beibehalten, sondern einen ovalen annehmen. Die zwischen den sichelförmigen Randpartien eingezwängten und eingepreßten, leichter beweglichen („schwebenden“) inneren Teile können, statt Falten zu werfen, auch in Richtung der Höhe des gezogenen Drahtes ausweichen, wenn das Material sehr plastisch ist. Ein solches axiales Abströmen wird durch den Umstand begünstigt, daß infolge der Sekundärbewegungen in einem gezogenen Stab der Kern stärker gelängt wird, als die Schale, wie der Verfasser in der oben angeführten Arbeit über „Innere Spannungen beim Zug- und Druckversuch“ nachgewiesen hat. Es nähern sich dann die sichelförmigen Flächen in dem Maße, als die schwebenden Teilchen zwischen ihnen senkrecht zur Gleitfläche ausweichen, und die Folge wird ein Ovaldrücken des Querschnittes sein. Ähnlich läßt sich auch die verblüffende Erscheinung erklären, daß beim Zerreißversuch mit Einkristalldrähten der runde Querschnitt plötzlich in einen rechteckigen, bandförmigen umspringt. Allerdings ist dazu die Annahme notwendig, die zunächst hypothetisch, nach den obigen Betrachtungen aber immerhin denkbar ist, es sei nicht nur für die Vergrößerung, sondern auch Verkleinerung der Oberfläche, also für das Herausziehen der stärker gepreßten Randteile aus der Oberfläche und Verschieben in die entlastete innere Zone ein Energieaufwand notwendig. Die Erklärung liegt dann darin, daß die Oberfläche bei gleicher Querschnitts-

---

1) Diese sogenannte „Gleitstörungstheorie“, vertreten O. **Mügge** (Neues Jahrbuch für Mineralogie usw. 1898 und 1899); G. P. **Ludwik**: Zeitschr. d. V. dtsch. Ingenieure, 1919; R. **Gross**: Z. f. Metallkunde, 1924, u. a. m.

verminderung sich weniger ändert, wenn der Querschnitt rechteckige oder ovale Form annimmt, als wenn er rund bleibt.

Die Fältelung kann nun unmöglich die einzige Ursache der Verfestigung sein, einfach, weil die letztere auch eintritt, wo erstere nicht zu beobachten ist. Mehrkristalline, gezogene oder gedrückte Körper zeigen sie, soweit die Kenntnis des Verfassers reicht, erst im letzten Stadium der Verformung, verfestigen sich aber trotzdem schon bei ihrem Beginn. Sie zeigen auch nicht den Übergang in den ovalen oder bandförmigen Querschnitt, den wir von Einkristallkörpern berichtet haben. Dennoch muß auch bei ihnen die Oberflächenspannung wirksam sein. Was ist die Ursache des verschiedenen Verhaltens? Wir können sie nur darin sehen, daß die Oberflächenspannung bei kristallographisch gleich orientierten Körpern stärker ist, als bei Haufwerken oder amorphen Massen, eine Annahme, die uns ohnehin als wahrscheinlich erscheint. Denn wie immer man sich die Vorgänge bei der Deformation eines Raumgitters denken mag, so erscheint uns stets die Vorstellung eines solchen an die Voraussetzung gebunden, daß ihm Richtkräfte innewohnen, die zu den Kohäsionskräften eines mehrkristallinen oder amorphen Körpers hinzukommen. Jene müssen sich genau wie diese im Innern des Körpers gegenseitig aufheben; aber in der Oberfläche sind sie neben den Kohäsionskräften wirksam, und beider Widerstand addiert sich.

In dieser höheren Oberflächenspannung des Einkristallkörpers kann also wohl der Grund liegen, warum sich beim Zugversuch die Form seines Ausgangsquerschnittes ändert, beim mehrkristallinen „Haufwerk" dagegen nicht. Dazu kommt, daß bei letzteren sich keine durchgehenden Gleitflächen ausbilden können, sondern nur eine große Menge kleiner von verschiedener Orientierung.

Bei den mehrkristallinen und amorphen Körpern vollzieht sich das Fließen nicht wesentlich anders als beim Einkristall. Nur wird aus dem soeben angegebenen Grund die Bewegungsrichtung nicht von der Neigung einzelner Gleitebenen, sondern vornehmlich durch die Richtung der Schubkräfte bestimmt. Diese können sich unter den unendlich vielen, verschieden orientierten kleinen Gleitebenen gleichsam die ihnen passenden aussuchen oder, wenn solche nicht vorhanden, intergranularen Rutsch zwischen den Kristalliten hervorrufen. Das wesentliche ist aber auch hier, daß das Fließen dadurch zustande kommt, daß *aus stärker gedrückten Zonen Massenteilchen in schwächer gedrückte oder in gezogene übergehen. Spannungsdifferenzen, wie sie z. B. die sekundären inneren Bewegungen in einem Körper hervorrufen, sind also Voraussetzung jedes Fließens.* Ein gezogener, in allen Teilen mathematisch gleich beanspruchter Stab, dessen Elastizität erschöpft ist, würde nicht fließen, sich nicht plastisch längen, sondern einfach *abreißen.* Und der Bruch auf der Zerreißmaschine findet vermutlich dann statt, wenn die letzte Spannungsdifferenz in dem Gebiet der Einschnürung ihren Ausgleich gefunden hat. So betrachtet, würde der Differentialmechanismus der inneren Spannungen *eine Art von Schutzvorkehrung der Natur gegen plötzlichen Bruch* nach Erschöpfung der Elastizität bedeuten.

Der Vorgang beim Zug- und Druckversuch mit mehrkristallinen oder amorphen Körpern, soweit sie imstande sind, merkbare innere Spannungen zu tragen, ist nach unserer Theorie folgender: Während der elastischen Deformation versteifen sich Kern und Schalenteile mehr und mehr gegeneinander, es bilden sich in den Querschnitten Druckzonen, die den Versuchskörper in zunehmendem Maße verfestigen. Nach Überschreiten der Fließgrenze sind an einer Stelle des Stabes die inneren Spannungen, vermutlich vor allem die axialen, größer geworden als der Fließwiderstand. Ihr Gebäude rutscht gleichsam zusammen wie eine Böschung, deren Winkel zu steil geworden ist. Und es rutscht, weil, wie schon bemerkt, die Reibung der Bewegung kleiner ist als die der Ruhe, und weil, wie ebenfalls schon gezeigt, W_R wegfällt, wenn das Fließen einmal im Gang ist (beides ist vermutlich identisch), wiederum wie besagte Böschung *über den Ausgangszustand hinaus.* Die Druckzonen erfahren dadurch kurze Zeit eine Entlastung. Beim Zugversuch sinkt in der Regel die Belastung („untere Fließgrenze"), während sie beim Druckversuch eine Zeitlang ungefähr konstant bleibt. Da die Belastung $= f \cdot \sigma$ ist und f beim Druckversuch zunimmt, so bedeutet diese Konstanz, daß auch beim Druckversuch σ nach Überschreitung der Fließgrenze einen Augenblick abnimmt.

Mit fortschreitender plastischer Verformung steigt durch die relativen Bewegungen zwischen äußeren und inneren Schichten die Pressung in den Druckzonen wieder auf das tragbare Maximum. Zugleich nehmen mehr Massenteilchen an ihr teil. Die Grenze zwischen Druck- und Zugzonen (im Bruch zerrissener Stäbe oft mit bloßem Auge als ausgeprägte Linie erkennbar) verschiebt sich im Augenblick des Fließbeginns. Auf eine ähnliche Ursache ist vielleicht auch die scharfe Randgrenze eines deformierten Drahtes zurückzuführen, dessen Schliff F. Koref in der Zeitschrift für Metallkunde 1925 S. 215 wiedergibt. Die Dinge liegen mit anderen Worten so, daß nach Überschreiten der oberen Fließgrenze die spezifische sekundäre Spannung zwar nicht mehr höher werden kann, wohl aber die *Zahl* der unter Druck stehenden Einheiten. Der Körper lädt sich also mit inneren Spannungen erneut auf, bis sie sich wieder ausgleichen usw.[1])

Zu diesen Vorgängen tritt die Vergrößerung der Oberflächenspannung, die wir oben behandelt haben.

Die Verfestigung oberhalb der Fließgrenze verhindert beim Zugversuch, daß an einer einzelnen Stelle größere Kontraktion auftritt. Denn sobald dieser Vorgang einsetzt, muß sie sich nach obigem verfestigen, so daß die Verformung dort aufhört und auf die dicker, aber weicher gebliebenen Stellen übergeht. Da die Massenteilchen, die neu in die Druckzone gelangen, und die Spannungsdifferenzen mit jedem Ausgleich weniger werden, so werden die Schwingungen zwischen Aufladung und Entlastung immer kleiner; wenn sie ganz aufhören, hört auch die Verfestigung auf und der Weg für die Kontraktion an einer Stelle ist frei. Warum sie normaliter in halber Höhe des Stabs auftritt, ist vom Verfasser in der oben angeführten Arbeit („Fließen und innere Spannungen") gezeigt worden.

Beim Druck- wie Zugversuch ist für unsere Überlegungen Voraussetzung, daß eine Verstärkung der Druckspannungen in einem Körper Verfestigung erwirkt, beim Zugversuch außerdem, daß die sekundären Druckspannungen und unausgeglichenen Spannungsdifferenzen mehr verfestigen, als die primäre

---

1) Eine Bestätigung dieses Vorganges bilden die eigentümlichen Schwankungen, die häufig beim Zugversuch zwischen unterer Fließ- und Bruchgrenze in der Dehnungsbelastungskurve beobachtet werden.

Zugwirkung entfestigt. Wir kommen auf diese Voraussetzungen zurück. Nehmen wir sie zunächst als gegeben an, so scheinen uns alle bekannten Erscheinungen beim Zug- und Druckversuch bis zum Beginn der Kontraktion geklärt. Eine Reihe früher ungeklärter ist in der mehrfach zitierten Arbeit aufgeführt. Hier sei noch bemerkt, daß auch die Feststellung von H. Horst[1]), nach welcher die Wärmeentwicklung beim Zugversuch nicht äquivalent der Deformationsarbeit ist, ihre zwanglose Erklärung findet, wenn man bedenkt, daß die sekundären Spannungen zwischen oberer und unterer Fließgrenze nur zum Teil ihren Ausgleich finden, so daß also der größte Teil dieser Energie latent bleibt. Der Versuch ist noch nicht gemacht worden; trotzdem wagen wir nach obigem zu behaupten, daß das Energiedefizit vor allem unterhalb der Fließgrenze eintritt, dann unmittelbar nach dieser zum Teil wieder in Form von verstärkter Erwärmung zum Vorschein kommt, während danach Verformungsarbeit und freiwerdende Wärme ungefähr im Gleichgewicht sind.

Wir sagten: bis zur Kontraktion schienen die Dinge, soweit wir sehen können, geklärt. Anders in diesem Gebiet oder nach unserer Auffassung nach völligem Ausgleich der sekundären Spannungsdifferenzen. Was sich nachher in dem kleinen, an der Kontraktion beteiligten Volumen vollzieht, scheint noch gänzlich dunkel. Dabei haben die Versuche von Körber[2]) und Rohland[3]) gerade für diese Periode eine denkbar einfache Beziehung für die plastischen Metalle festgestellt, nämlich, daß die „wahre" (auf den wirklichen, statt den Ausgangsquerschnitt bezogene) spezifische Fließspannung direkt proportional zur Querschnittsabnahme zunimmt. Das besagt nichts anderes als die alte Erfahrung, nach der vor dem Eintreten des Bruches trotz immer stärkerer Querschnittsverminderung der Kontraktionsstelle die Belastung der Materialprüfungsmaschine konstant gehalten werden kann. Es ist mehr als unwahrscheinlich, daß die verwickelten sekundären Bewegungen und Spannungen, oder die Oberflächenänderung, die

---

1) **H. Horst**, Mitteilungen über Forschungsarbeiten, Heft 41.

2) **F. Körber**, Eisenforschungs-Institut 1921 S. 1.

3) **W. Rohland**, Dissertation, Aachen 1923.

Verknüllungen oder Heranziehung verschieden orientierter Gleitflächen oder irgend andere schon genannte Ursachen der Verfestigung einzeln oder gar zusammen ein so einfaches Endresultat ergeben können. Vielmehr scheint in dieser Periode ein neuer Faktor die „wahre Spannung" zu bestimmen. Wir vermuten, daß es die Fließgeschwindigkeit ist, d. h. daß mit Eintritt der Kontraktion im Fließkegel eine Art „kritischer Geschwindigkeit"[1]) erreicht wird, die ohne großen Mehraufwand an Energie nicht überschritten werden kann und demnach wie ein Drosselventil den Abfall der Belastung trotz des sich mehr und mehr verkleinernden Querschnitts hintanhält. Mit dem gewöhnlichen Prüfungsverfahren lassen sich diese Vorgänge nicht erfassen. Ein richtiges Bild würden wir nur erhalten, wenn wir die Geschwindigkeit der Prüfmaschine den jeweiligen Fließgeschwindigkeiten anpassen könnten, mit andern Worten, wenn wir die erstere in gleichem Maße verringerten, als die Verkleinerung des an der Einschnürung beteiligten Volumens ein schnelleres Fließen herbeiführt.

Wir fassen die bisherigen Feststellungen wie folgt zusammen: Weder die Änderung der Lage der Gleitebenen, noch „verborgene" elastische Spannungen, noch Raumgitterstörungen und Verknüllungen der Gleitflächen können den gesamten Komplex der Erscheinungen beim Zug- und Druckversuch erklären. Wohl mag all das zeitweise mitwirken. Da jedoch die Verfestigung eine, zwar nicht *gleichmäßig* (sie tritt im Anfang der Deformation stärker, dann schwächer auf), aber meist kontinuierlich verlaufende Erscheinung ist, die bis zum Bruch anzudauern pflegt, so ist unwahrscheinlich, daß voneinander unabhängige Ursachen sich in willkürlicher Folge ablösen. Vielmehr wird man nach einer *gemeinsamen* Ursache unter und über der Elastizitäts- oder Fließgrenze zu suchen haben. Wir glauben sie in den inneren Spannungen im weiteren Sinne des Wortes zu finden; in den „sekundären", vor allem unterhalb, in den Oberflächenspannungen vornehmlich oberhalb der Fließgrenze. Je größer die inneren Spannungen, desto höher die Verfestigungen; oberhalb der Fließgrenze müssen sich sehr weiche, plastische Stoffe prozentual stärker verfestigen, als harte, wenig bildsame, weil das Verhältnis: Oberfläche zu Volumen sich bei ihnen stärker ändert.[1])

---

[1]) Vgl. S. 474, Fußnote 2.

Somit ergibt sich, unbeschadet von Nebeneinflüssen der mehrfach genannten Art bei allen Körpern, ein- und mehrkristallinen oder amorphen, stets folgender Verlauf:

Beim Zugversuch zieht der schrumpfende Kern die Schale an sich heran, beim Druckversuch treibt er sie auf. Im ersteren Falle *längt sie sich,* im zweiten *schrumpft sie relativ* zum Kern. In beiden Fällen entstehen zunächst sekundäre Zug- und Druckspannungen und zwar desto größere, je höher die Fließgrenze des Körpers ist, d. h. die Fähigkeit, Spannungen zu tragen.

Die Druckspannungen machen wir vor allem verantwortlich für die Verfestigung. Sie treten beim Zugversuch bei rundem Querschnitt in der Schale und zwar im Umfang und axial auf, beim Druckversuch, wo auch die primäre Spannung Druck ist, über den ganzen Querschnitt, aber wegen der Sekundärspannungen im Kern stärker als in der Schale.[2])

Schließlich muß auch beim festesten Körper ein Punkt kommen, wo die primären und sekundären Spannungen zusammen stärker werden, als die gesamten Gleit- oder Fließwiderstände (nach obigem $W_O + W_O' + W_i + W_R$, die ersteren wahrscheinlich bei Einkristallen, die letzteren bei mehrkristallinen stärker). Von da ab, d. h. von der oberen Fließgrenze an, vermehren sich die inneren Spannungen je Querschnittseinheit nicht mehr, weil das betreffende Material höhere eben nicht zu tragen vermag. Vielmehr gleicht sich jedes Mehr, das sich auf dem bekannten Weg bilden möchte, durch Fließen aus, oder aber der Körper wird, wenn er diese Eigenschaft nicht besitzt, zertrümmert. Ein solcher, über die Fließgrenze belasteter harter Körper (z. B. Stahl) muß sich ähnlich wie ein sehr weicher verhalten, der wenig oder keine inneren

---

1) Vgl. P. Oberhoffer, „Das technische Eisen", Verlag von Julius Springer, Berlin. Zweite Auflage. S. 388: „Je niederer die Festigkeit der unbeanspruchten Kristalle, je höher die Verfestigung." Zu erwähnen ist hier auch die hohe, etwa 14fache Verfestigung des weichen Kupfers.

2) Es deckt sich das mit der Erfahrung, daß die Verfestigung beim Druckversuch stärker als beim Zugversuch auftritt.

Spannungen zu tragen vermag, also eine eigentliche Elastizitäts- und Fließgrenze nicht aufweist, wie z. B. Blei oder Kupfer.

Die vorliegende Verfestigungstheorie, die schon vor 12 Jahren vom Verfasser in den Grundlinien umrissen, danach aber weiter ausgebildet und seit Kriegsende laufend mit den eigenen und mit den ungezählten im Schrifttum mitgeteilten neueren Beobachtungen verglichen worden ist, ohne daß Widersprüche gefunden wurden, *haben zur Voraussetzung, daß Druckspannungen einen Körper überhaupt zu verfestigen vermögen und daß die Festigkeit schon auf geringe Druckänderungen empfindlich reagiert.*

Das erstere war von vornherein wahrscheinlich und ist auch schon mehrfach[1]) behauptet, aber unseres Wissens bisher nicht bewiesen worden. Zu dem Zweck wurde eine Reihe von Versuchen, wie unten wiedergegeben, angestellt. Es sind absichtlich sehr geringe Druckunterschiede gewählt worden, wie der höhere oder niedere Wasserdruck bzw. Auftrieb sie darstellen. Der Gedanke zu den Versuchen und zu manchem hier Ausgeführten kam dem Verfasser am Meeresstrand, als er, mit den vorliegenden Problemen beschäftigt, beim Wandern unwillkürlich die Zonen des halbtrockenen Sandes suchte. Die Versuchsergebnisse zeigten, daß, wie so oft, das Gefühl rascher war als die Überlegung: die Füße fanden instinktiv die Lösung, um die das Hirn sich vergeblich mühte.

Ehe wir zu den Versuchen übergehen, soll noch 3 Einwendungen begegnet werden, die man vielleicht gegen unsere Darlegungen erheben wird: Ähnliche sekundäre Spannungen in axialer Richtung und senkrecht dazu wie beim Zug- und Druckversuch entstehen auch in jedem von außen angewärmten oder abgekühlten Körper (vgl. die oben angeführte Arbeit des Verfassers über „Wärmespannungen usw.“). Sie sind von Anderen als Ursache der Härtung beim Abschrecken von Stahl angesprochen worden. Gegen die Ansicht wendet sich **P. Oberhoffer** in seinem schon angeführten Werk „Das technische Eisen“ S. 65 mit folgenden Worten:

---

1) So schreibt O. **Ruff**, „Plastizität“, Zeitschr. f. anorg. u. allgemeine Chemie 1924. S. 189: „Formbeständigkeit ist abhängig (neben sonstigen Faktoren) von dichter Lagerung z. B. durch stärkere Pressung.“

Die Annahme, die Steigerung der Härte sei ausschließlich auf die Entstehung von Wärmespannungen zurückzuführen, kann nicht ernst genommen werden, weil sie dann auch in jedem beliebigen Metall ohne Umwandlungen, wie Kupfer oder Gold entstehen würde. Ferner sind Spannungen in diesem Sinne nur möglich, wenn ein Stück ungleichmäßig abgekühlt wird. Ein dünner Draht wäre nach dieser Theorie nicht härtbar.

Ohne daß wir hier für die genannte Härtungshypothese eintreten wollen (sie ist zum mindesten bislang ungenügend belegt), soll doch gesagt werden, daß obige Einwendungen unserer Ansicht nach nicht stichhaltig sind. Einesteils müssen zwar bei gleicher mittlerer Abkühlungsgeschwindigkeit des ganzen Körpers die Wärmespannungen mit abnehmender Wandstärke kleiner werden. Auf der anderen Seite nehmen sie mit der mittleren Abkühlungsgeschwindigkeit zu und diese mit abnehmender Wandstärke. Auch bei dem dünnsten Draht kann sich darum die Schale infolge ihrer rapiden Zusammenziehung („Zusammenkrampfen“ nannten wir es früher) ein Differential von Zeit über den Kern spannen und dadurch eine Aufweitung erfahren. Ja, es liegt kein Grund vor, sich nicht auch *molekulare* Spannungen und Bewegungen dieser Art vorzustellen. Daß die letzteren unterhalb der Fließgrenze in weichen Körpern, wie Kupfer, die wenig Spannungen zu tragen vermögen, nur in geringerem, dagegen in harten, wie Stahl, in hohem Maße entstehen, ist schon erwähnt worden. Es kommt hinzu, daß Kupfer und Gold weit höhere Wärmeleitzahlen aufweisen als Eisen, was der Entstehung der inneren Spannungen abträglich sein muß. Die Änderung der Oberfläche oberhalb der Fließgrenze wirkt bei weichen Körpern, wie oben gezeigt, mehr als bei harten, aber sie kommt für die geringen Verformungen durch Wärmespannungen nicht in Frage. Bei Haufwerken kann außerdem der Härtung bzw. Verfestigung förderlich sein, daß beim Stahl die harten Zementitkristalle in weiche Ferritmasse eingelagert sind. Die angestellten, unten mitgeteilten Versuche sprechen dafür. Die Verfestigung ist größer (Differenz der Neigungswinkel in den Fig. 10—14), wo die Körner eine weiche Zwischenmasse, das Wasser, haben, als wo sie unmittelbar aufeinanderliegen. Es ist nicht beabsichtigt, auf die Härtungshypothesen einzugehen, sondern wir haben uns mit den genannten Einwendungen nur befaßt, weil sie, als richtig vorausgesetzt, auch der vorliegenden Verfestigungstheorie entgegengehalten werden könnten.

Zum anderen mag vielleicht Bedenken erwecken, daß Ausglühen die Verfestigung aufhebt, während vor allem die Oberflächenspannungen auch nach einer Wärmebehandlung bestehen bleiben. Zunächst ist zu sagen, daß bei Erreichung einer bestimmten Temperatur sekundäre innere Spannungen sich in der gleichen Weise durch Fließen ausgleichen müssen, wie wir es beim Überschreiten der oberen Fließgrenze kennengelernt haben. Jeder Stoff hat eben für jede Spannung eine bestimmte Grenztemperatur, bei der sie nicht mehr getragen werden kann, und für jede Temperatur eine Grenzspannung. Die Fließgrenze ist die Grenzspannung bei Zimmertemperatur und die Grenztemperatur für eine Spannung von praktisch gleich Null ist diejenige, bei der wir einen Körper ausglühen müssen, um ihn spannungsfrei zu machen. Daß wegen des geringeren Widerstandes der Bewegung und anderer Gründe der Übergang sich nicht allmählich, sondern plötzlich vollzieht, ist mehrfach gezeigt worden. Derart entspannte Körper müssen, je härter sie sind, desto langsamer abgekühlt werden, weil sie sich sonst wieder mit Spannungen aufladen (vgl. die oben angeführten Arbeiten des Verfassers über Wärmespannungen).

Schwieriger liegt die Frage bei der Oberflächenänderung. Hier kann unter Umständen die Umkristallisierung nach dem Glühen einen Einfluß ausüben. Wir wissen aus einer Menge von Beobachtungen — und auch die nachfolgenden Versuche erweisen es —, daß bei sonst gleichen Verhältnissen ein Material bei kleiner Korngröße härter ist, als bei grobem Korn. Vergrößerung des Korns muß also die verfestigende Wirkung der Oberflächenspannung vermindern. Sodann ist eine Entlastung der Oberfläche beim Glühen dadurch denkbar, daß bei Erreichung der wie oben definierten Grenztemperatur Massen aus den stark gedrückten äußeren Zonen in die weniger gedrückten inneren überströmen, so daß nach dem Erkalten die Oberfläche eine Druckentlastung aufweist.

Endlich: die Versuche sind mit losen Massen grober Körner gemacht worden. Man kann einwenden, es sei nicht berechtigt, Beobachtungen an diesen auf die Massenteilchen eines festen, in Verformung begriffenen Körpers zu übertragen. Richtig ist allerdings, daß eine ins Fließen kommende Sandmasse (auch das Verdrängen durch die Kugelkalotte ist Fließen, d. h. Bewegen der Sandkörner gegeneinander) und fließende Massenteilchen in einem festen Körper nicht etwa gleiche, sondern nur ähnliche Verhältnisse darstellen. Der Unterschied ist, daß diese unter der Wirkung von Reibungs- und vermutlich auch von Kohäsionskräften stehen, jene aber nur unter der Wirkung der Reibung. Da aber die letztere zweifellos auch bei den fließenden Massenteilchen eines verformten Körpers vorliegt, so ist unseres Erachtens der Schluß voll berechtigt, eine Verfestigung, die unter dem Einfluß verschieden großer Reibung im Innern einer fließenden Sandmasse beobachtet wird, müsse auch zwischen den Massenteilchen eines fließenden festen oder teigförmigen Körpers eintreten.

Die genannten Versuche wurden wie folgt vorgenommen:

Versuchsanordnung.

Die Stelle der Kristallite oder Netzmaschen vertraten folgende feste Stoffe:

1. gewaschener, von allen tonigen Bestandteilen durch sorgfältiges Schwemmen befreiter Flußsand von 0,1—1 mm Korngröße.
2. Flintenschrott aus Hartblei in verschiedener Korngröße (1,5, 2,5 und 4 mm).
3. Eisenfeilspäne von einer Korngröße von etwa 0,1 bis 0,5 mm.

Als Zwischenmasse diente Wasser, durch welches zu gleicher Zeit die Druck- und die Oberflächenverhältnisse (nasse und trockene Körner) variiert werden konnten.

Die Versuche zerfielen in 3 Gruppen gemäß den obengenannten drei festen Stoffen. Immer wurden die letzteren in eine Glaswanne von 23 cm Durchmesser und 15 cm Höhe derart eingefüllt, daß die Schichthöhe etwa 5 cm betrug.

a) Danach wurde zunächst im Zustand der Trockenheit unmittelbar nach der Einfüllung die Härte an der Oberfläche mit einem untenstehend beschriebenen, zu dem Zweck besonders gebauten Apparat festgestellt und zwar bei Gruppe 3 ohne und mit Einschaltung der Magnete. Bei Gruppe 1 und 2 wurde danach Wasser in drei verschiedenen Höhen zugegeben und zwar:

b) derart, daß Oberkante Wasser mit Oberkante fester Stoff zusammenfiel,

c) daß noch eine Wassersäule von einigen Zentimetern (bei Gruppe 1 4 bzw. 6,5 cm, bei 2 1,5—2,5 cm) über der Wasseroberfläche lag. Die Höhe der Wassersäule wurde variiert, um festzustellen, ob sie von Einfluß sei. Da ein solcher nicht erkennbar war, fallen die betreffenden Kurven in den Schaubildern zusammen.

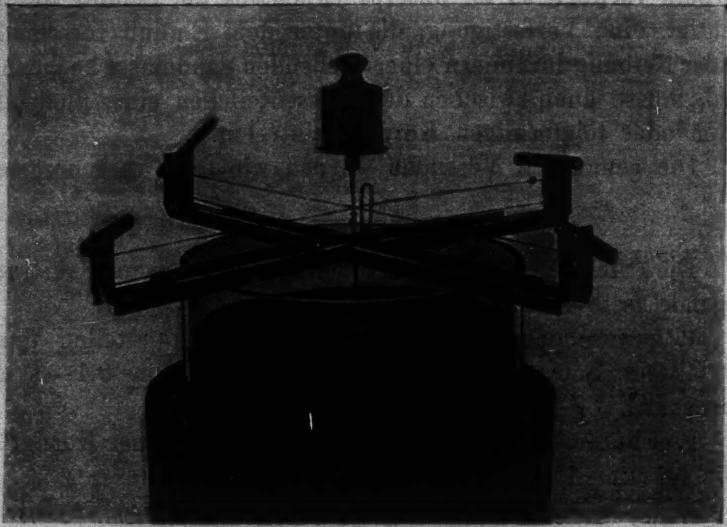
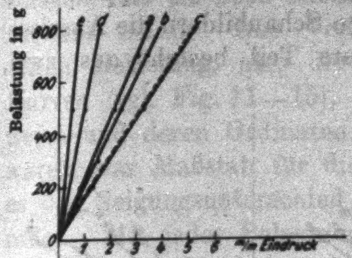


Fig. 10. **Härteprüfapparat.**

d) Zuerst wurde der Zustand nach b) hergestellt, danach das Wasser möglichst bis zum Grund der Wanne mittels eines Hebers abgesaugt und unmittelbar danach die Härtemessung vorgenommen.

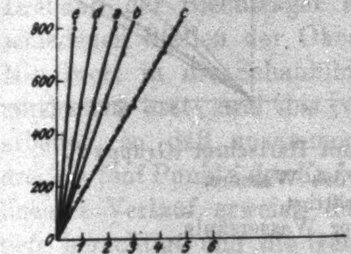
e) Bei Gruppe 1 wurde außerdem noch so verfahren, daß der Sand nach dem Absaugen des Wassers 48 Stunden lang in der Atmosphäre stehen gelassen wurde, so daß seine Oberfläche wieder völlig trocken war, worauf die Härtemessung vorgenommen wurde, sonst wie unter c).

Der Härteprüfer, welchen Fig. 10 zeigt, war der Brinellpresse nachgeahmt. Eine Kugelkalotte von 25 mm Radius trägt eine Säule aus Rundeisen, an deren oberem Ende ein Teller zur Aufnahme der Gewichte befestigt ist. Dieser beweg-



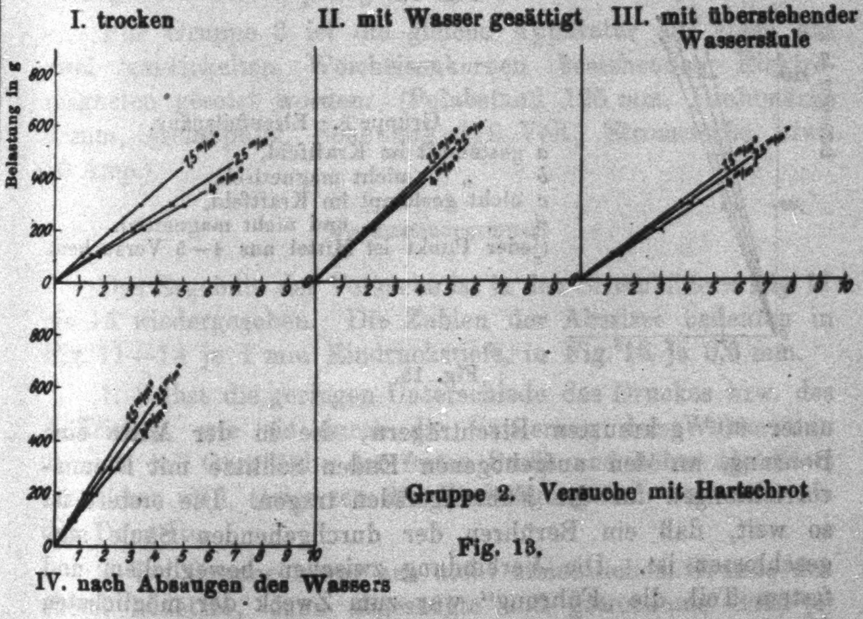
Gruppe 1. Sand von 1 mm Körnung
a trocken
b bis zur Sandoberfläche mit Wasser gesättigt
c Härte bei 1,5 bis 6,5 cm überstehender Wassersäule
d nach Absaugen des Wassers
e nach 48stünd. Verdunstung

Fig. 11.



Gruppe 1. Sand von $^1/_2$ mm Körnung
a—e wie oben

Fig. 12.


I. trocken

II. mit Wasser gesättigt

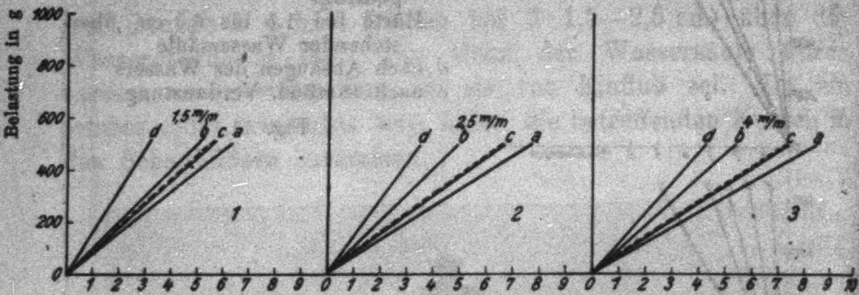
III. mit überstehender Wassersäule

IV. nach Absaugen des Wassers

Gruppe 2. Versuche mit Hartschrot

Fig. 13.

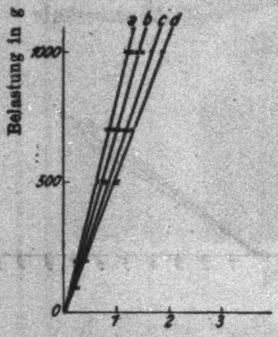
liche Teil des Apparates ist so leicht gehalten, daß ein Einsinken in die Oberfläche von Sand, Schrott und Feilspänen beim Aufsetzen vor dem Auflegen der Gewichte nicht erkennbar war. Die Säule trägt eine Skala, der feste auf den Rändern der Wanne aufliegende Teil einen Visierapparat, so daß die Tiefe des Einsinkens (in den Schaubildern die Abszisse) einvisiert werden kann. Der feste Teil besteht aus zwei, unter 90° gekreuzten Blechträgern, die in der Mitte eine Bohrung, an den aufgebogenen Enden Schlitze mit Klemmvorrichtungen für die Führungsfäden tragen. Die erstere ist so weit, daß ein Berühren der durchgehenden Säule ausgeschlossen ist. Die Verbindung zwischen beweglichem und festem Teil, die „Führung“ war zum Zweck der möglichsten Herabsetzung der Reibungswiderstände folgendermaßen angeordnet: je vier, unter rechten Winkeln gekreuzte dünne



Zusammenfassung der Versuche mit Hartschrot (Gruppe 2).

d Härte nach Absaugen des Wassers,
b Schrot mit Wasser gesättigt,
c Härte bei überstehender Wassersäule,
a Schrot trocken.

Fig. 14.



Gruppe 3. Eisenfeilspäne.

a gestampft im Kraftfeld,
b „ nicht magnetisch,
c nicht gestampt im Kraftfeld,
d „ „ und nicht magnetisch
(jeder Punkt ist Mittel aus 4—5 Versuchen).

Fig. 15.

Zwirnfäden gingen in zwei Horizontalebenen von der Säule bis zu den aufgebogenen Blechträgern, wo sie so festgeklemmt wurden, daß sie eben leicht gespannt waren und daß die Säule vertikal stand. Das Verhältnis: lineare Eindringungstiefe durch Belastung, also die Neigung der linear verlaufenden Kurven (vgl. Fig. 11—15), deren Abszissen die Eindringungstiefen und deren Ordinaten die Belastungen der Kugelkalotte waren, war Maßstab für die Härte. Für die Verfestigung ist es der Neigungsunterschied (Differenz der Winkel) zweier Geraden. Mit jeder Belastung wurden unter Verschiebung und Drehung der Blechträger auf dem Wannenrand an drei verschiedenen Stellen der Oberfläche Versuche gemacht und ihr Mittelwert in die Schaubilder eingetragen. Es wurde jeweils mindestens mit zwei bis vier verschiedenen Belastungen gearbeitet, so daß zusammen mit dem Nullpunkt mindestens drei bis fünf Punkte der Kurven bestimmt waren. Ihr annähernd linearer Verlauf erweist, daß der Maßstab der Eindringungstiefe berechtigt und die Genauigkeit des Meßapparates für den vorliegenden Zweck genügend war.

Für Gruppe 3 ist die gleiche Apparatur auf einen aus zwei umwickelten Weicheisenkernen bestehenden Elektromagneten gesetzt worden. (Polabstand 125 mm, Drahtstärke 2 mm, sechsspulig, Spannung 110 Volt, Stromstärke etwa 10 Amp.)

Versuchsergebnis.

Das Ergebnis der Versuche ist in den Schaubildern Fig. 11 bis 15 wiedergegeben. Die Zahlen der Abszisse bedeuten in Fig. 11—14 je 1 mm Eindruckstiefe, in Fig. 15 je 0,5 mm.

1. Selbst die geringen Unterschiede des Druckes bzw. des Auftriebes, wie sie durch die Variierung der Wassersäule (0, eben mit Oberfläche der festen Stoffe und höher als diese) erreichbar sind, steigerten die Eindringungstiefe um mehr als das Doppelte.

2. Bei Gruppe 1 war aus nicht ersichtlichem Grunde der zuerst benetzte, dann abgesaugte und getrocknete Sand (e) stets am härtesten. Bei Gruppe 1 und 2 war immer der nach c) behandelte feste Stoff weicher als bei b). Bei Gruppe 1

war der Sand im Ausgangszustand (trocken) härter als nach b) und c) behandelter, bei Gruppe 2 war das Umgekehrte der Fall.

3. Auch bei den Feilspänen (Gruppe 3) war die Härtung durch das Zusammenpressen, mechanisch wie durch das magnetische Kraftfeld, unverkennbar.

4. Übereinstimmend ist das Ergebnis auch in dem Punkt, daß die Härtung mit Abnahme der Korngröße zunimmt.

Bemerkenswert scheint, wenn wir das Ergebnis im ganzen betrachten, daß die geringen Druckunterschiede zwischen a) und b) oder zwischen b) und c), wo jeder Einfluß der Oberflächenspannung ausgeschaltet war, schon eine merkliche Einwirkung auf die Härte haben. Weiter, daß das Wegsaugen der Flüssigkeit aus dem festen Stoff jedesmal härtend wirkt. Es ist möglich, daß das bei Schmelzen, die allmählich auskristallisieren, also „trocken gelegt“ werden, eine Rolle spielt.

Schlußfolgerung.

Das Ergebnis der Versuche ist, daß die Druckverhältnisse, also die Pressung zwischen den einzelnen Körnern einer Masse ihre Festigkeit beeinflussen und daß selbst sehr geringe Druckänderungen beträchtliche Verfestigung bewirken.

Damit ist die Voraussetzung, die wir für unsere obigen Behauptungen machen mußten, als gegeben erwiesen und zugleich wenigstens für den Druckversuch die Theorie: daß die Verfestigung bei der Verformung eine Folge der sekundären Spannungen und der Änderung der Oberfläche sei, gestützt.[1]

Es ist wahrscheinlich, daß beim Zugversuch die Verfestigung die gleichen Ursachen hat. Die Voraussetzungen, an welche die Vermutung geknüpft ist, sind oben erwähnt worden. Der Beweis muß späteren Versuchen vorbehalten bleiben.

---

[1] Man könnte auf den Gedanken kommen, beim Druckversuch sei die Hereinziehung der inneren Spannungen nicht erst erforderlich, da ja die primären, von der Presse verursachten, schon die Massenteilchen gegeneinander pressen. Das trifft natürlich nur für den *Beginn* des Preßvorganges zu. Sobald aber die Verformung einsetzt, würde ohne Verfestigung nurmehr die *absolute* Belastung entsprechend dem zunehmenden Querschnitt des gedrückten Körpers, aber nicht mehr die *spezifische* zunehmen. Und natürlich kann nur die letztere die Massenteilchen fester zusammenpressen. Der primäre Druck genügt also in der Tat auch beim Druckversuch nicht zur Ableitung des Verfestigungsvorgangs.

Zum Schluß sei Hrn. Dr. Ing. Sedlaczek, dem die Durchführung der obigen Versuche übertragen war, an dieser Stelle für seine Mühe Dank gesagt. Vor allem aber der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft und der Helmholtzgesellschaft. Der ersteren verdankt der Verfasser die hydraulische Presse, der letzteren Meßinstrumente, die bei den Versuchen Verwendung gefunden haben.

Breslau, Technische Hochschule.

(Eingegangen 8. Oktober 1925.)

6. *Perihelbewegung bei veränderlicher Masse*[1]; *von Gerold von Gleich.*

Bei konstanter Masse ist im Zweikörperproblem bekanntlich die Lage der Bahnellipse im Raume fest. Gesucht wird die Bewegung der Ellipsenachse unter folgenden Voraussetzungen:

I. Die Anziehungskraft ist wie bei Newton $f \cdot \frac{Mm}{\varDelta^2}$, worin f die Anziehungskonstante, M die Masse der Sonne, m die des Planeten [beide als kugelförmig behandelt[2]] und $\varDelta$ der Abstand ihrer Mittelpunkte ist. Wenn R und r die Abstände von M und m vom gemeinsamen Schwerpunkt sind, ist wegen $\varDelta = R + r$ und wegen $R : r = m : M$:

$$\varDelta = r\left(1 + \frac{m}{M}\right) \cdot$$

Im Falle des Merkur ist m/M etwa gleich $1{,}5 \cdot 10^{-7}$.

II. Die Kraft wird definiert[3] als Differentialquotient der Bewegungsgröße mv nach der Zeit t. Dabei ist v die Geschwindigkeit des Planeten, bezogen auf ein mit dem Schwerpunkt des Systems verbundenes drehungsfreies („Inertial")-system. Aus I. und II. folgt somit als Grundformel:

---

[1] Es dürfte angebracht sein, das bekannte Merkurproblem einmal streng auf Grund einfacher, durchsichtiger, mit der Erfahrung gut verbundener und ausdrücklich vorangestellter Voraussetzungen zu behandeln und zu zeigen, welche Perihelverschiebung dabei sich ergibt. Es ist dies ein Beitrag zur Klärung der nur allmählich zu lösenden Fragen des Mitwirkens der Äthermassen (Energiemassen) bei den sichtbaren Bewegungen auch der materiellen Körper. Zur Kritik der anderen, in letzter Zeit üblich gewordenen Behandlungsweise des Problems vgl. G. v. Gleich, Ann. d. Phys. 72. S. 221. 1923; Ztschr. f. Phys. 25. S. 230 und 28. S. 329. 1924.

[2] Der Einfluß einer etwaigen Abplattung der Sonne ist wiederholt erörtert und als unerheblich festgestellt worden.

[3] Nach I. Newton, vgl. P. Lenard, Über Äther und Uräther, 2. Aufl. 1922. S. 48 Gl. (3a).

$$\frac{d}{dt}(mv) = -f \cdot \frac{mM}{r^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{m}{M}\right)^2}. \tag{1}$$

III. Die Energie E hat Masse im Betrage von E/c^2 (c Lichtgeschwindigkeit), woraus weiter folgt[1]):

$$m = m_0 (1 - \xi)^{-1/2}, \tag{2}$$

worin $\xi = \frac{v^2}{c^2}$, was von der Größenordnung $2{,}6 \cdot 10^{-8}$ ist, so daß ξ^2 zu vernachlässigen ist. Da v zu der Geschwindigkeit der Sonne relativ zum Schwerpunkt sich wie $M : m$ verhält, ist entsprechend zu (2) strenggenommen:

$$M = M_0 \left(1 - \frac{m^2}{M^2}\,\xi\right)^{-1/2},$$

wofür füglich $M = M_0$ gesetzt werden darf.

Weiter wird nur noch vorausgesetzt, daß für alle vorkommenden Vektorgrößen das Parallelogrammgesetz gilt. Daher folgt aus (1), wenn man nach rechtwinkligen in der Bahnebene[2]) liegenden Achsen zerlegt und da die Komponenten von v, v_x und v_y offenbar gleich dx/dt und dy/dt sind, mit (2):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right) &= m\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dm}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} \\ &= -f \cdot \frac{M_0 m}{r^2} \cdot \frac{x}{r}\left[1 - \frac{2m_0}{M^0}(1 - \xi)^{-1/2} + \ldots\right] \end{aligned}$$

und eine entsprechende Gleichung in y. Aus diesen erhält man, da $\frac{m_0}{M_0}\xi \cong 4 \cdot 10^{-15}$ füglich vernachlässigt werden darf und da das kleine *konstante* Glied $2\frac{m_0}{M_0}$ für die vorliegende Untersuchung keine Rolle spielt[3]), durch Division mit m, wenn man m in Einheiten der Sonnenmasse ausdrückt und wie in der Astronomie üblich $f \cdot M_0 = k^2$ setzt, als Bewegungsgleichungen:

---

[1]) P. Lenard, a. a. O., S. 46—49, besonders Gl. (1c) und (4). m_0 ist die Ruhmasse, die dauernd zum Planeten gehört, auch wenn v = Null ist.

[2]) Daß die Bahn eben sein muß, liegt auf der Hand.

[3]) Ob später k^2 oder $k^2(1 + m)$ oder $k^2(1 + 2m)$ gesetzt wird, ist unerheblich. k ist die Gaussche Konstante.

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{k^2x}{r^3}=-\mu\dfrac{dx}{dt}, \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{k^2y}{r^3}=-\mu\dfrac{dy}{dt}, \end{cases}$$

worin wegen (2)

$$(3\text{a})\qquad \mu=\frac{1}{m}\,\frac{dm}{dt}=\frac{1}{2}(1-\xi)^{-1}\frac{d\xi}{dt}$$

ist.

Daraus folgt in bekannter Weise:

$$x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=\mu\left(y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}\right)$$

oder in Polarkoordinaten[1]):

$$(4)\qquad \frac{d}{dt}\left(r^2\frac{dw}{dt}\right)=-\mu r^2\frac{dw}{dt}$$

und mit (3a), wenn $r^2\dfrac{dw}{dt}=z$ gesetzt wird:

$$\frac{dz}{z}=-\frac{1}{2}\,\frac{d\xi}{1-\xi}.$$

Das Integral hierzu ist $z=\text{Const}\cdot\sqrt{1-\xi}$. Da nun für $\xi=0$ $z_0=k\sqrt{p}$ sein muß[2]), so erhält man als *Flächenintegral*:

$$(5)\qquad \left(r^2\frac{dw}{dt}\right)^2=k^2p(1-\xi).$$

Aus (3) folgt des weiteren auf bekanntem Wege:

$$\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k^2}{r^3}\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)=-\mu\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]$$

oder wegen $v^2=\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2$:

$$\frac{1}{2}d(v^2)+\frac{1}{2}\,\frac{k^2}{r^3}d(r^2)=-\mu v^2\,dt$$

und[3]) mit (3a):

$$d\xi-2\frac{k^2}{c^2}d\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\xi}{1-\xi}d\xi$$

oder mit $\dfrac{1}{r}=u$:

$$(6)\qquad \frac{d\xi}{1-\xi}=2\frac{k^2}{c^2}du.$$

---

[1]) $x=r\cos w,\ y=r\sin w$.

[2]) $p=a(1-e^2)$ der Bahnparameter.

[3]) weil $v^2=c^2\xi$ ist.

Hieraus folgt natürlich ohne weiteres das geschlossene *Energieintegral:*

$$\log \operatorname{nat}(1 - \xi) = \mathrm{const} - 2\frac{k^2}{c^2}u; \tag{7}$$

allein es ist für die weitere Rechnung bequemer und in der hier notwendigen und hinreichenden Annäherung zulässig, zu setzen:

$$\int (1 + \xi + \ldots)\,d\xi = 2\frac{k^2}{c^2}u + \mathrm{Const}$$

oder

$$\xi + \frac{1}{2}\xi^2 + \ldots = \frac{v^2}{c^2}\left(1 + \frac{1}{2}\xi + \ldots\right) = 2\frac{k^2}{c^2}u + \mathrm{Const}$$

oder mit einer anderen Konstanten, die der Halbachse der Ellipse entspricht:

$$v^2\left(1 + \frac{1}{2}\xi + \ldots\right) = k^2\left(2u - \frac{1}{a}\right). \tag{8}$$

Da nun

$$v^2 = \frac{dr^2}{dt^2} + r^2\frac{dw^2}{dt^2}$$

ist, liefert der Übergang zu der unabhängigen Veränderlichen w (statt t) mit Hilfe von (5) an Stelle von (8) die Gleichung:

$$\frac{du^2}{dw^2} + u^2 = \frac{1}{p}\left(2u - \frac{1}{a}\right)(1 + \xi + \ldots)\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\xi - \ldots\right)$$
$$\cong \frac{1}{2}\left(2u - \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\xi\right).$$

Da man in ξ wegen des großen Nenners c^2 in der hier hinreichenden Näherung für v^2 den rein elliptischen Wert $k^2\left(2u - \frac{1}{a}\right)$ setzen darf[1], wird:

$$\frac{du^2}{dw^2} = -u^2 + \frac{1}{p}\left(2u - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{k^2}{2c^2a} + \frac{k^2}{c^2}u\right)$$

oder

$$\frac{du^2}{dw^2} = A + Bu + Cu^2, \tag{9}$$

worin

$$A \cong -\frac{1}{ap}, \qquad B \cong \frac{2}{p}$$

und, worauf es allein ankommt, genau:

$$C = -\left(1 - 2\frac{k^2}{c^2p}\right) \tag{9a}$$

---

[1] *Dieses* a ist von dem obigen um Größen von der Ordnung k^2/c^2 verschieden, was aber hier belanglos ist.

ist. Zählt man die Koordinate w vom Perihel zur Zeit $t = 0$ an, so ist das Integral von (9) nach bekannter Methode:

$$\frac{1}{u} = r = \frac{p_1}{1 + e_1 \cos n w}, \tag{10}$$

d. h. eine leicht modifizierte Ellipsengleichung; p_1 und e_1 weichen vom rein elliptischen Parameter und der rein elliptischen Exzentrizität nur um konstante Größen von der Ordnung k^2/c^2 ab, was hier völlig belanglos ist.

Dagegen ist wegen (9a) und (10):

$$n = \sqrt{-C} \cong 1 - \frac{k^2}{c^2 p} \tag{11}$$

die *für die Perihelbewegung entscheidende* Größe. Diese Bewegung ist nämlich:

$$\Delta \tilde{\omega} = 2\pi \left(\frac{1}{n} - 1 \right) = 2 \frac{k^2}{c^2} \frac{\pi}{p}. \tag{12}$$

Dies gibt für den Merkur 14,4″ im Jahrhundert, also nicht, wie bisher angenommen wurde[1], nur 7,2″.

Den letzteren Betrag erhält man, wenn man nur auf der linken Seite von (1) die Masse als veränderlich gemäß (2) einsetzt, dagegen auf der rechten Seite von (1) die Massen als Konstante behandelt. Hierin liegt nicht nur ein Mangel an Folgerichtigkeit, sondern auch die Beiseitelassung der experimentell wohlbegründeten Kenntnis von der Gravitationswirkung auch der Energiemasse.[2]

In diesem Falle würde nämlich das Glied mit k^2 in (3) den Faktor $(1 - \xi)^{1/2}$ bekommen und man würde durch analoge Rechnung wie oben statt (11) und (12):

$$n \cong 1 - \frac{1}{2} \frac{k^2}{c^2 p}; \qquad \Delta \tilde{\omega} = \frac{k^2}{c^2} \frac{\pi}{p} \tag{13}$$

erhalten. Dasselbe geschieht, wenn in das klassische (d. h. unter Voraussetzung konstanter Massen abgeleitete) Energieintegral nachträglich die kinetische Energie

$$T = c^2 m_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \xi}} - 1 \right)$$

---

[1] Auch von mir selbst; vgl. Ann. d. Phys. 72. S. 229. 1923 im Anschluß an Enc. d. math. Wiss. VI. 2 B. S. 171; vgl. A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, 4. Aufl. S. 408 ff. 1924.

[2] P. Lenard, a. a. O., S. 47, Note 2 (Uranpendel).

eingesetzt wird. Solches erscheint beim Atommodell zulässig, weil dort die *Kernladung* und die *Elektronenladung* als absolute *Konstanten* vorausgesetzt werden, ist aber im Sonnensystem unstatthaft. Die Bemerkungen Hrn. A. Sommerfelds[1]) über die Bewegung des Merkurperihels sind jedenfalls hinfällig. Ebendamit sind auch Hrn. M. v. Laues Äußerungen über die Elektronenbewegung im Atom[2]), die mit dem vorstehend behandelten zusammenhängen, gegenstandslos geworden. Fehlerhaft werden natürlich alle jene Ansätze, die in die alte Formel für die kinetische Energie $T = \frac{1}{2} m v^2$ (die für veränderliche Massen nicht mehr gilt) einfach die Beziehung (2) einsetzen.

Es sei gestattet, das Ergebnis (12) auf folgendem Wege nachzuprüfen. Die linken Seiten von (3) entsprechen genau der rein elliptischen Bewegung, sobald die rechten Seiten verschwinden. Folglich darf man die rechten Seiten als die Komponenten X, Y einer an Stelle der Massenveränderlichkeit gesetzten „Störenden Kraft" nach den Methoden der astronomischen Störungstheorie behandeln. Es ist also:

$$X = -\mu \frac{dx}{dt}, \qquad Y = -\mu \frac{dy}{dt}.$$

Setzt man diese Komponenten durch die Formeln:

$$R = Y \sin w + X \cos w$$

und

$$S = Y \cos w - X \sin w$$

in die Komponenten R und S derselben Kraft um (R in der Verlängerung des Radiusvektors und S in der Bahnebene senkrecht zu ihm), so erhält man:

(14)[3]) $$R = -\mu \frac{dr}{dt}, \qquad S = -\mu r \frac{dw}{dt}.$$

Wegen der Kleinheit von μ darf man hier in der bisher benutzten Näherung die rein elliptischen Werte:

(15) $$\frac{dr}{dt} = \frac{e k \sin w}{\sqrt{p}} \quad \text{und} \quad r \frac{dw}{dt} = \frac{k}{r} \sqrt{p}$$

---

[1]) A. Sommerfeld, a. a. O., S. 413 u. 830.

[2]) Ann. d. Phys. 66. S. 284. 1921.

[3]) Der Einsatz von (2) in den herkömmlichen Ansatz der störenden Kraft, wie auch ich ihn Ann. d. Phys. 72. S. 229. 1923 vornahm, ist unzulässig. Vor allem ist S verschieden von Null.

einsetzen und (3a) wird:

$$\mu = -(1 - \xi)^{-1} \frac{k^2}{c^2 r^2} \cdot \frac{e k \sin w}{\sqrt{p}}, \tag{16}$$

wo der Faktor $(1 - \xi)^{-1}$ offenbar $= 1$ gesetzt werden darf. Die auf die unabhängige Veränderliche w (statt t) transformierte Störungsformel[1]) für das Perihel ist:

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dw} = \frac{r^2}{e k^2} \left[-R \cos w + S \frac{(2 + e \cos w) \cdot \sin w}{1 + e \cos w} \right]. \tag{17}$$

Sie wird mit (14), (15) und (16) nach leichten Reduktionen zu:

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dw} = 2 \frac{k^2}{c^2 p} \sin^2 w.$$

Dies gibt, zwischen 0 und 2π integriert:

$$\Delta \tilde{\omega} = 2 \frac{k^2}{c^2} \frac{\pi}{p},$$

wie oben.

Auf demselben Wege ermittelt man leicht, daß die Bahnelemente a und e nur periodische Störungen erleiden, während Neigung und Knoten selbstverständlich gar keine aufweisen. Es bestätigt sich mithin, daß die eingangs genau formulierten Voraussetzungen eine Bewegung des Merkurperihels von 14,4″ im Jahrhundert bedingen. Für die übrigen Planeten bleibt $\Delta \tilde{\omega}$ erheblich unter der Beobachtungsgenauigkeit.

Von irgendwelchen Anknüpfungen an dieses Ergebnis glaube ich hier absehen zu sollen. Die sonstigen Ursachen, die Beiträge zur Apsidenbewegung liefern müssen oder können, sind schon wiederholt zur Genüge[2]) erörtert worden.

Ludwigsburg, 19. Oktober 1925.

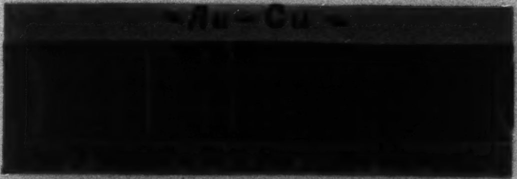
---

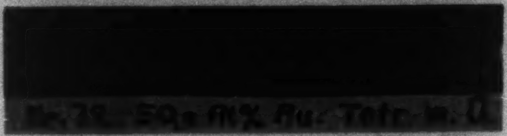
[1]) Vgl. z. B. Enc. Math. Wiss. VI. 2 A. S. 742.

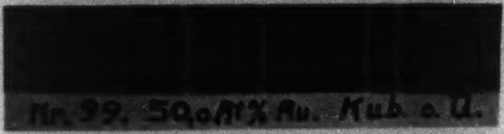
[2]) Vgl. hierzu E. Grossmann, Astr. Nachr. 219. S. 41 u. 195. 1921; E. Anding, Enc. d. Math. Wiss. VI. 2A. S. 14; H. v. Seeliger, Astr. Nachr. 201. S. 272. 1915.

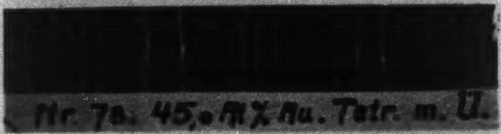
(Eingegangen 26. Oktober 1925.)

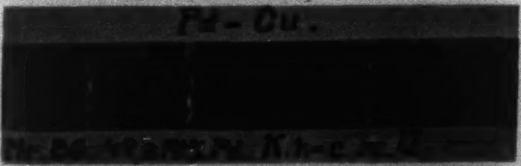
Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.



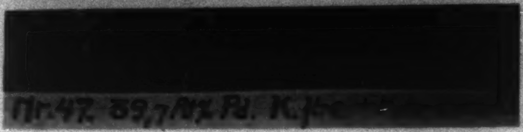

Nr. 72. 50,0 At% Au. Tetr. m. Ü.


Nr. 99. 50,0 At% Au. Kub. o. Ü.


Nr. 78. 45,0 At% Au. Tetr. m. Ü.


Pd – Cu.
Nr. 66. 49,0 At% Pd. K.h-c. m. Ü.

Nr. 65. 45,0 At% Pd. K.h-c. m. Ü.


Nr. 47. 39,7 At% Pd. K.h-c.

C. H. Johansson u. J. O. Linde.

Inhalt.

Seite
1. E. Rupp. Über das magnetische Verhalten der Phosphore . . 505
2. G. Hansen. Die Feinstruktur der Balmerlinien. (Hierzu Tafel VI und VII) 558

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: München, Kolberger Straße 16.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft können die Annalen zu einem Vorzugspreis beziehen.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik" üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

1925. № 22.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 78.

---

1. *Über das magnetische Verhalten der Phosphore;*
von E. Rupp.

(Aus dem Radiologischen Institut der Universität Heidelberg.)

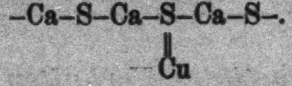
Als Bausteine der in den Phosphoren wirksamen Gebilde liegen auf Grund der Präparationsbedingungen vor: Das Erdalkaliatom, das Gattungsatom und das Schwermetallatom. Bereits die ersten grundlegenden Untersuchungen des Phosphoreszenz durch die Hrn. Lenard und Klatt[1]) zeigten, daß während des Glühprozesses die Moleküle Erdalkaliatom-Gattungsatom sich zu großen Molekülkomplexen zusammenlagern, in die in irgendeiner Weise das Schwermetallatom eingebaut ist. Diese Phosphoreszenzzentren sind die Träger der verschiedenen Erscheinungen, an denen die Phosphoreszenz so reich ist: Die Phosphoreszenzerregung, die Aufspeicherung und Abklingung, die Emission der verschiedenen Phosphorbanden, Ausleuchtung und Tilgung, Änderung der Dielektrizitätskonstanten und der Leitfähigkeit, Druckzerstörung und Zerstörung durch Kanalstrahlen, alle diese Tatsachen sollen in möglichst einheitlicher Weise aus dem Bau des Phosphoreszenzzentrums erklärt werden.

Ein Zentrenmodell, das zusammen mit der Auffassung der Phosphoreszenzerregung als lichtelektrischer Wirkung dieser Forderung in weitgehendem Maße gerecht wird, konnte Hr. Lenard[2]) bereits 1909 entwickeln und in der Folgezeit in vielen Einzelheiten ergänzen. Danach setzt sich der Zentrenkomplex zusammen aus der Verbindung einer großen Zahl einzelner Erdalkalisulfidmoleküle in etwa ringförmiger Anordnung. Innerhalb dieses ringförmigen Gebildes ist an irgendein Schwefelatom das phosphoreszenzfähige Metallatom angelagert, so daß sich schematisch[1]) ein CaCu-α-Phosphor darstellen läßt durch folgende Formel:

---

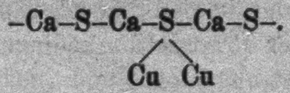
[1]) P. Lenard und V. Klatt, Ann. d. Phys. 15. S. 425. 1904 und sehr eingehend: Ausleuchtung und Tilgung IV. 1918.

[2]) P. Lenard, Über Lichtemission und deren Erregung. Heidelb. Akad. 1909. Ann. d. Phys. 31. S. 641. 1910.



$$-\mathrm{Ca}-\mathrm{S}-\mathrm{Ca}-\underset{\substack{\|\\ \mathrm{Cu}}}{\mathrm{S}}-\mathrm{Ca}-\mathrm{S}-.$$

Die Tatsache, daß ein und demselben Metallatom verschiedene Phosphorbanden zukommen, wird dabei zurückgeführt auf verschiedene Betätigung der Wertigkeit des Metallatoms. Z. B. läßt sich ein CaCu-β-Zentrum darstellen durch die Formel:



$$-\mathrm{Ca}-\mathrm{S}-\mathrm{Ca}-\underset{\substack{\diagup\ \diagdown\\ \mathrm{Cu}\quad \mathrm{Cu}}}{\mathrm{S}}-\mathrm{Ca}-\mathrm{S}-.$$

Die von Hrn. **Lenard** entwickelten Vorstellungen über den Zentrenbau hat in letzter Zeit Hr. **Tomaschek**[2]) ausgehend von der Phosphoreszenz der seltenen Erden noch durch die Annahme zu verfeinern gesucht, daß das Schwermetallatom nicht unmittelbar an ein Schwefelatom des Erdalkalisulfidmoleküls gebunden wird, sondern daß eine Sulfidverbindung des Schwermetallatoms sich bei der Präparation an ein Erdalkaliatom anlagert. Die verschiedenen Phosphorbanden werden dabei auf verschiedene Sulfidverbindungen des Schwermetallatoms zurückgeführt, wodurch unter anderem verständlich wird, wie chemisch so verschiedene Metalle wie Cu, Mn, Bi und Zn, sich ein und derselben Absorptionskantenserie[3]) zuordnen lassen.

Die bisher hauptsächlich bekannten Tatsachen der Erregung und Emission geben nur in indirekter Weise Auskunft über die Bausteine des Phosphorzentrums. Da eine chemische Analyse von vornherein ausgeschlossen erscheint, muß versucht werden, auf Grund physikalischer Eigenschaften der einzelnen Zentrenbestandteile einen Einblick in den Aufbau des Phosphorzentrums zu erlangen. Einen solchen Weg bietet die Untersuchung der magnetischen Eigenschaften der Phosphore. Wie man aus den Präparationsbedingungen weiß, sind die Phosphore magnetisch Gemische des diamagnetischen Grundmaterials, z. B. CaS, und der ebenfalls diamagnetischen Zusätze, z. B.

---

1) P. **Lenard**, a. a. O. S. 25.

2) R. **Tomatschek**, Ann. d. Phys. 65. S. 561. 1924.

3) S. F. **Schmidt**, Ann. d. Phys. 64. S. 713. 1921.

NaCl, in die ein teils diamagnetisches z. B. Cu, teils paramagnetisches (Mn) Schwermetallatom eingelagert wird.

Zur Charakterisierung des magnetischen Verhaltens eines Körpers dient vorteilhaft die Suszeptibilität $\varkappa'$, d. h. das magnetische Moment der Volumeneinheit, wenn im Körper das magnetische Feld 1 Gauß erzeugt wird. Mit der Permeabilität μ steht $\varkappa'$ in der Beziehung

$$\mu = 1 + 4\pi\varkappa'.$$

Bedeutet d das spezifische Gewicht des Körpers, so wird die *spezifische* Suszeptibilität $\varkappa$ definiert als $\varkappa = \varkappa'/d$. In der vorliegenden Untersuchung wird stets diese spezifische Suszeptibilität angegeben, teils in absolutem Maß, teils, da es sich meist um Vergleiche der Suszeptibilität verschiedener Phosphore handelt, die unter gleichen Versuchsbedingungen ermittelt wurden, in relativem Maß (Skalenteile s des Ablesemikroskops). In diesem Fall werde von der relativen spezifischen Suszeptibilität gesprochen. Ferner gibt $\bar{\varkappa} = \frac{\varkappa'}{d} A$, wo A das Atomgewicht — bzw. das Molekulargewicht — den *Atommagnetismus* (Molekularmagnetismus) eines Stoffes an.

Der erste Teil vorliegender Untersuchung beschäftigt sich mit der experimentellen Feststellung des magnetischen Verhaltens der verschiedenen Phosphore und sucht empirische Beziehungen der magnetischen Suszeptibilität zu anderen für den Phosphor charakteristischen Größen, wie zur Ausbildung des Zentrenmoleküls überhaupt, zur Druckzerstörung, zu den verschiedenen Banden ein und desselben Metallatoms, zur Temperaturlage der Zentren, zum Metallgehalt, zur spektralen Lage der Linien der seltenen Erdphosphore und zum Erregungszustand der Zentren. Unter anderem konnte hierbei festgestellt werden, daß das erregte Zentrum sich paramagnetischer verhält als das unerregte. Ein größerer Abschnitt beschäftigt sich mit dem Atommagnetismus des Schwermetalls. Dabei wurde als besonders bemerkenswerte Tatsache gefunden, daß die diamagnetischen Schwermetallatome Cu, Ag, Bi in unternormalem Phosphoren Werte der diamagnetischen Atommagnetismen erreichen, die diejenige des reinen Metalls um das 1000fache übertreffen. Der zweite Teil sucht diese Kenntnisse zur Analyse des Zentrenbaus zu verwerten, wobei das aus spektralen Beobachtungen erschlossene Zentrenmodell weitgehende Bestätigung erfährt, besonders hinsichtlich der Valenzbetätigung des Schwermetallatoms in den verschiedenen Banden. In einem 3. Teil wird das magnetische Moment eines einzelnen Phosphorzentrums ermittelt.

Teil I.

1. Die Untersuchungsmethode.

Ein zylindrischer Stab sei mittels zweier Fäden in horizontaler Lage in einem Magnetfeld aufgehängt. Das eine Ende des Stabes befinde sich im Magnetfeld der Stärke H, das andere im schwächeren Feld H_0, der Querschnitt des Stabes sei q, dann wirkt bei Anschalten des Magnetfeldes eine Kraft k auf den Stab in seiner Längsrichtung

$$k = \frac{\varkappa'}{2}(H^2 - H_0^2)\,q\,.$$

Wird die Abstoßung (Heranziehung) des Stäbchens mit der Schwerkraft als Gegenkraft gemessen und ist der Ablenkungswinkel α, wobei $\sin\alpha = s'/l$ (l = Länge des Aufhängedrahts vom Aufhängepunkt bis zur Skala des Ablesemikroskops, s' = Ausschlag im Mikroskop in Zentimetern), so bestimmt sich die spezifische Suszeptibilität $\varkappa$ nach der Gleichung:

$$\varkappa = \frac{2\,\lambda\,g}{(H^2 - H_0^2)}\,\frac{s'}{l}\,.$$

Hier bedeutet λ die Länge des Stäbchens. Bezeichnet s_g und m_g Ausschlag im Mikroskop und Gewicht des Glasröhrchens, die für sich bestimmt werden können[1]), s' und m' den Gesamtausschlag und die Gesamtmasse von Phosphor und Glasröhrchen, s und m Ausschlag und Masse des Phosphors, so gilt die Beziehung:

$$s'm' = s_g m_g + s \cdot m.$$

Bei Verwendung stets des gleichen Glasröhrchens ist der errechnete Ausschlag s bei gleicher Feldstärke ein unmittelbares Maß der spezifischen Suszeptibilität des Phosphors. Die in diesem Teil angegebenen Werte der Suszeptibilität des

---

1) Unter Berücksichtigung des meist vernachlässigbaren Luftfehlers.

Phosphors sind, wenn nicht besonders bemerkt, in dieser Weise ermittelte Relativwerte der spezifischen Suszeptibilität. Zur Untersuchung stand ein großer Weißscher Elektromagnet zur Verfügung. Die Polschuhe hatten die Form eines Kegelstumpfes, der Durchmesser ihrer Vorderfläche betrug 40 mm, ihr Abstand 10 mm. Die in diesem Abschnitt stets verwendete Feldstärke, gemessen mit Wismutspirale, war 18000 Gauß. Das eine Röhrchenende befand sich in diesem starken Feld, während die Feldstärke[1]) am anderen Röhrchenende etwa 3000 Gauß betrug. Das meist verwendete Glasröhrchen hatte eine Länge von 5,1 cm und einen Durchmesser von 0,51 cm. Die Länge des Aufhängedrahtes, ein Silberdraht von 0,1 mm Durchmesser, betrug 70 cm. Beobachtet wurde meist mit 5—10facher Vergrößerung des Ablesemikroskops.

2. Zentrenmolekül und Phosphorzentrum.

Ehe auf die Untersuchung der verschiedenen Phosphore eingegangen werden kann, ist zunächst notwendig, das magnetische Verhalten von Zentrenmolekül und Phosphoreszenzzentrum zueinander aufzuklären. Bekanntlich bilden sich in geglühtem CaS auch ohne Zusatz eines Schwermetalls große Zentrenkomplexe aus, die durch Druck wieder zerstört werden können. Die bei der Präparation der Phosphore verwendeten Erdalkaliverbindungen (CaS, SrO, auch ZnS) sind sämtlich diamagnetisch, ebenso die als Zusätze beigemischten Verbindungen (NaCl, K_2SO_4, CaF_2). Anders zum Teil die hinzugefügten Schwermetalle, wie Mn und Ni, die stark paramagnetische Eigenschaften haben. Um ungeglühtes und geglühtes Grundmaterial zu vergleichen, wurde elektrolytisch gereinigtes ZnS untersucht, und zwar einerseits gefälltes Zinksulfid und andererseits im Stickstoffstrom bei 1000° C geglühtes ZnS. Die Werte der spezifischen Suszeptibilität waren:

für ZnS gefällt	−28 Sk.
für ZnS geglüht	−22 Sk.

Das *geglühte ZnS* ist also *gegenüber dem ungeglühten* wesentlich *paramagnetischer* geworden. Da für ZnS die Möglichkeit besteht, daß infolge anderer Struktur der Kristallide im

---

1) Vgl. die Feldmessungen im Abschnitt Atommagnetismus.

geglühten ZnS eine Änderung des magnetischen Verhaltens eintritt, wurden weiter variierte Versuche mit CaS durchgeführt. Die Werte der spezifischen Suszeptibilität sind im folgenden zusammengestellt:

CaS geglüht	CaS + Na_2SO_4 geglüht	CaS + N_2SO_4 druckzerstört
−14,0	−13,8	−16,2

CaSCu 1n	CaSCu 1n druckzerstört	CaSMn 1n	CaSMn 1n druckzerstört
−16,8	−17,0	−8,2	−15,0

Wir gehen aus vom elektrolytisch gereinigten und dann geglühten CaS, in dem also Zentrenmoleküle ausgebildet sind. Wird diesem Präparat auf 1 g CaS 0,1 g Na_2SO_4 zugesetzt, so wird es ein wenig (um 0,2 Sk.) paramagnetischer. Wird nun dieses mit Zusatz geglühte CaS druckzerstört, so daß die in ihm ausgebildeten Zentrenmoleküle großenteils zerstört werden, so wird das druckzerstörte Präparat deutlich diamagnetischer (um −2,4 Sk.).

Jetzt wurde die einfach normale Cu-Menge zugegeben und das ganze geglüht[1], also ein richtiger CaCu-Phosphor hergestellt. Dieser Phosphor erwies sich um 3,0 Sk. diamagnetischer als reines CaS mit Zusatz. Das diamagnetische Cu verursacht also trotz der geringen zugesetzten Menge ein Diamagnetischerwerden des ganzen Präparats.[2] In der gleichen Weise wurde ein 1-normaler Mn-Phosphor hergestellt. Hier stieg die Suszeptibilität um 5,6 Sk., wie es für das stark paramagnetische Mn bzw. für die ebenfalls paramagnetischen Mn-Verbindungen zu erwarten ist. Wurden nun diese Phosphore druckzerstört, so zeigten sich beide erheblich diamagnetischer und zwar CaCu um 1,0 Sk., CaMn sogar um 6,8 Sk. Mit dem Rückgang der Zentrenzahl tritt also auch hier wie bei CaS, ohne Metall geglüht, ein Rückgang eines paramagnetischen Gliedes auf. Dieses paramagnetische Glied ist offenbar an das Zentrenmolekül wie an das Phosphorzentrum gebunden, es kann im einfachsten Fall als ein dem Zentrenmolekül zukommender paramagnetischer Summand[3] aufgefaßt werden.

---

[1] Wird dieselbe Cu-Menge ohne Glühen zugemischt, so war keine Änderung der Suszeptibilität nachweisbar.

[2] Vgl. Abschnitt 3.

[3] Wahrscheinlich wird der Paramagnetismus des Gesamtzentrums mit dem Magnetismus der Zentrenbausteine in irgendeiner Weise gekoppelt sein, so daß er nur in erster Annäherung als Summand aufzufassen ist.

Der *Unterschied im magnetischen Verhalten zwischen Zentrenmolekül und Phosphorzentrum* besteht nun darin, daß im Phosphor *zu dem paramagnetischen Summanden des gesamten Zentrenmoleküls ein weiterer durch das magnetische Verhalten des Schwermetallatoms*, bzw. einer Verbindung des Schwermetallatoms, bestimmter diamagnetischer oder paramagnetischer Summand in das Zentrum eingelagert wird. So wird in das Zentrum des CaCu-Phosphor ein diamagnetischer Bestandteil eingelagert, der entweder dem Cu oder einer Cu-Verbindung zukommt. Entsprechend in das Zentrum des CaMn ein paramagnetischer Bestandteil. Bezeichnet s den Wert der Suszeptibilität des gesamten Phosphorzentrums, so kann man diese Gesamtsuszeptibilität für CaCu darstellen durch:

$$-s = -s_{\mathrm{CaS}} - s_{\mathrm{Na_2SO_4}} + s_{\phi} - s_{\mathrm{Cu}} \ldots$$

Dabei bedeuten die 2 ersten Summanden die Suszeptibilität von Grundmaterial und Zusatz, s_{ϕ} die Suszeptibilität der Zentrenmoleküle, die hier mit dem Vorzeichen zu setzen ist, und $s_{\mathrm{Cu}} \ldots$ die Suszeptibilität des Cu bzw. einer noch festzustellenden Cu-Verbindung. CaS ohne Metall enthält die 3 ersten Summanden, während im Phosphorzentrum noch der das Schwermetallatom enthaltende Summand hinzutritt.

3. Suszeptibilität und Metallgehalt.

Es entsteht nun die Aufgabe, näheres über die Einlagerung des Schwermetallatoms in das Phosphorzentrum zu erfahren. Dazu wurde zunächst die relative spezifische Suszeptibilität für eine Reihe einheitlich präparierter Phosphore mit verschiedenem Metallgehalt bestimmt.[1] Die Phosphore CaCu, CaBi, CaMn hatten besonders die angegebene Hauptbande (α) entwickelt, während bei ZnS auch die β- und γ-Bande deutlich war. Fig. 1 enthält die gemessenen Werte. Abszisse ist der Metallgehalt[2] für je 1 g Phosphor in den an der jeweiligen Kurve angegebenen Einheiten. Normaler Metallgehalt ist durch Längsstriche hervorgehoben. Ordinate sind die Werte der relativen spezifischen Suszeptibilität. Betrachten wir zunächst die ZnMn-Phosphore. Der Wert des reinen, geglühten ZnS beträgt -100 Sk., von hier steigt die Kurve mit wachsendem Mn-Gehalt äußerst steil zu größeren Werten der Suszeptibilität an. Erst bei weiter gesteigertem Metallgehalt wird der Anstieg flacher, wie aus der oberen Kurve deutlich zu ersehen. Bei noch erheblich mehr Mn (in der Kurve nicht mehr eingetragen) erhält man schließlich eine Suszeptibilität, die mit der des Mn-Sulfids nahe übereinstimmt (vgl. Abschnitt 8). Nun werden bei geringem Metallgehalt im Phosphor fast ausschließlich große Zentren ausgebildet; mit wachsendem Metallgehalt kommen aber immer mehr mittlere und kleinere Zentren hinzu bis schließlich der Phosphor nur noch ganz überwiegend Momentanleuchten zeigt. Der Anstieg der Suszeptibilitätskurve ist für große Zentren weit steiler als für kleine Zentren. Für ganz großen Metallgehalt, bei dem

---

[1] Von Hrn. Dr. R. Tomaschek zur Verfügung gestellt.

[2] Über die Bestimmung der in den Zentren wirksam verwendeten Metallmenge vgl. S. 540.

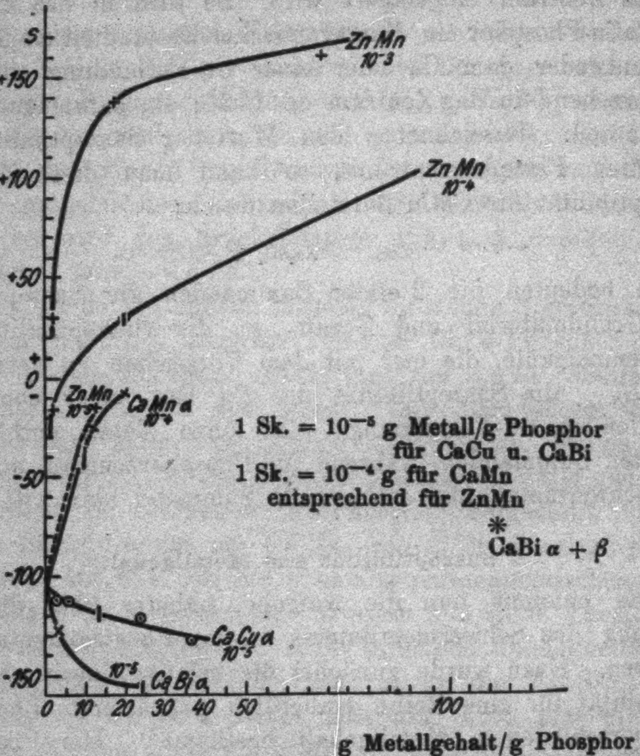


Fig. 1.

keine Zentrenbildung mehr vorliegt, steigt die Kurve mit schwacher Krümmung weiter, wie es etwa einer Zumischung von Mn-Metall zum Phosphor entspricht. Der ZnMn-Phosphor mit dem größten in der Figur eingetragenen Mn-Gehalt ($7 \cdot 10^{-2}$ g) leuchtet nicht mehr und ist dunkelrot gefärbt, ähnlich der Farbe des reinen Mn-Sulfids. Das Anwachsen der Suszeptibilität steht also offenbar in Zusammenhang mit der Zentrengröße; *den großen Zentren kommt ein erheblich größerer Paramagnetismus zu als den kleinen und Momentanzentren.*

Dieselbe Beziehung lehrt auch eine Betrachtung der CaS-Phosphore. Sowohl die Kurve für CaCu und CaBi wie die für CaMn geht aus vom Wert der Suszeptibilität des reinen geglühten CaS (−105 Sk.). CaMn zeigt ein ähnliches Verhalten wie ZnMn, nur ist der Kurvenanstieg flacher, nimmt aber deutlich mit wachsendem Metallgehalt ab. Die Phosphore CaCu und CaBi weisen ein gerade umgekehrtes magnetisches Verhalten auf wie die Mn-Phosphore. Mit wachsendem Metallgehalt wird das ganze Phosphormaterial diamagnetischer. Für kleine Metallgehalte (große Zentren) fallen die Kurven etwas stärker, doch ist dieses Verhalten weit nicht so ausgeprägt wie bei den Mn-Phosphoren, besonders Cu zeigt eine nur geringe Änderung der Steilheit. Zum Paramagnetismus des Gesamtzentrums addiert sich also bei den Mn-Phosphoren ein mit wachsendem Metallgehalt zunehmender paramagnetischer Bestandteil, während bei den Cu- und Bi-Phosphoren ein solcher vom Metallgehalt abhängender Bestandteil zu subtrahieren ist. Dieser diamagnetische Bestandteil in CaCu und CaBi überwiegt offenbar den Paramagnetismus des Gesamtzentrums, so daß die Kurven der Suszeptibilität für diese Phosphore mit wachsendem Metallgehalt fallen.[1])

Der 1-normale CaBi, bei dem die CaBi-Kurve anscheinend ihren unteren Grenzwert erreicht hat, emittiert außer der α-Bande auch, wenn auch schwächer, die β-Bande des Bi. Ein 5n-CaBi, der die β-Bande besonders gut entwickelt hatte, ergab eine viel größere Suszeptibilität, wie der rechts in Fig. 1 eingetragene Wert zeigt. Es ist danach wahrscheinlich, daß

---

1) Eingehende Messungen der Suszeptibilität des vom Metallatom herrührenden Bestandteils vgl. S. 544.

der scheinbare untere Grenzwert der Suszeptibilität, wie ihn der 1n-CaBi-Phosphor aufweist, in Zusammenhang mit der Ausbildung der β-Zentren mit wachsendem Metallgehalt steht, daß also die Zentren der Bi-β-Bande paramagnetischer sind als die der α-Bande. Darüber soll die Untersuchung des nächsten Abschnitts Auskunft geben.

4. Suszeptibilität und Phosphoreszenzbande.

Um das magnetische Verhalten der CaBi-Phosphore zu untersuchen, wurde die spezifische Suszeptibilität einer ausgewählten Reihe Phosphore[2]) gemessen. Die Ergebnisse sind in Tab. 1 zusammengestellt.

Tabelle 1.

Nr.	Metall	Ls_α	s	Bemerkungen
120	0,023 n	843	−122	
119		826	−114	β gut
116		776	−110	β gut
118		587	−112	β mittel
125		425	−110	wenig β
126		242	−100	viel β
128d		215	−96	viel β
129	+ Fe	168	−78	
114a	0,225 n	1995	−142	
114a			−138	lang geglüht
124	1 n	2020	−161	

Die erste Spalte gibt die von Hrn. Lenard verwendete Nummer des untersuchten Phosphor an. Unterstrichen sind diejenigen Nummern, die besonders hell und dauernd leuchten. In der 2. Spalte finden sich die Metallgehalte, wobei 1n = $2{,}10 \cdot 10^{-4}$ g Bi auf 1 g Phosphor. Die in der 3. Spalte verzeichneten Lichtsummen, 1 Minute nach Schluß der Erregung, sind seinerzeit von Hrn. Lenard für eine bestimmte Phosphorschicht ermittelt worden. Die 4. Spalte enthält die hier

---

2) Es sind dieselben Phosphore, die Hr. P. Lenard seinerzeit bei der absoluten Messung der Energieaufspeicherung (P. Lenard und W. Hausser, Heidelb. Akad. 1913) untersuchte. Für die freundliche Überlassung dieses wertvollen Materials möchte ich auch an dieser Stelle Hrn. Geheimrat Lenard meinen besten Dank aussprechen.

gemessenen Werte der spezifischen Suszeptibilität in relativem Maß. Schließlich bringt die letzte Spalte Bemerkungen über das Auftreten der β-Bande. Die Phosphore gleichen Metallgehalts sind in der Reihenfolge abnehmender Lichtsummen geordnet. Betrachten wir die Phosphore mit 0,023-n Metallgehalt.

Der Phosphor 120, der die größte α-Lichtsumme hat, liefert auch den größten diamagnetischen Wert der Suszeptibilität. In dem Maße, wie die *α-Lichtsumme abnimmt*, werden die *Phosphore paramagnetischer*. Aber die Zunahme des Paramagnetismus geht nicht parallel mit der Abnahme der Lichtsumme. Vielmehr muß die mehr oder weniger gute Ausbildung der β-Bande berücksichtigt werden. Die beiden Phosphore 119 und 116, die beide β gut entwickelt haben, sind paramagnetischer als 120, während 118, der β mittel hat, trotz kleinerer α-Lichtsumme wieder diamagnetischer als 116 ist. In verstärktem Maße zeigt 125 diese Beziehung. Trotzdem seine α-Lichtsumme auf nahe die Hälfte von 119 gefallen ist, ist seine Suszeptibilität noch nahe so groß wie die von 119, ein deutlicher Einfluß der bei 125 wenig entwickelten β-Bande. Die beiden Phosphore 126 und 128d haben viel β und sind entsprechend auch die paramagnetischsten der Reihe. Dem Phosphor 129 wurde außer Bi noch $6 \cdot 10^{-6}$ g Fe zugegeben. Über sein Verhalten vgl. S. 530. Die Phosphore 114 und 124 mit mehr Bi-Metall, also auch mehr α-Lichtsumme, sind wieder viel diamagnetischer als die Phosphore der ersten Gruppe. Allgemein sieht man aus Tab. 1: *Der diamagnetische Wert der Suszeptibilität der CaBi-Phosphore steigt mit wachsender α-Lichtsumme;* und ferner: Die *β-Zentren verhalten sich gegenüber den α-Zentren* deutlich *paramagnetischer*. Das Bi-Atom in seiner Bindung im β-Zentrum zeigt also ein erheblich paramagnetischeres Verhalten als in seiner Bindung im α-Zentrum.

Um über diese Beziehungen zwischen Suszeptibilität und Phosphoreszenzbande zu quantitativen Aussagen zu kommen, wurde für eine Reihe CaCu Phosphor, deren einzelne Proben verschieden gut die α- wie die β-Bande entwickelt hatten, einesteils die relative spezifische Suszeptibilität bestimmt, anderenteils die im Phosphore aufgespeicherte Lichtsumme gemessen und zwar gesondert für die α-Bande wie für die β-Bande.

Dazu wurde der zu untersuchende Phosphor mit einer Eisenlampe voll erregt, dann 1 Minute nach Schluß der Erregung mittels lichtelektrischer Zelle, vor die ein passendes Grünfilter gesetzt war, die Lichtsumme der α-Bande bestimmt; darauf wurde der Phosphor in gleicher Weise erregt und jetzt ein Blaufilter vor die Zelle gebracht, das nur das blaue Licht der β-Bande zur Messung kommen ließ. Die erhaltenen Werte der spezifischen Suszeptibilität in relativem Maß und die der Lichtsumme für α- und β-Zentren sind in der Tab. 2 zusammengestellt. s bezeichnet die relative spezifische Suszeptibilität Ls_α und Ls_β die Lichtsumme[1]) der in den verwendeten Phosphoren entwickelten α- und β-Zentren, 1 Minute nach Schluß der Erregung. Dieselben Werte sind in Fig. 2 nochmals graphisch dargestellt. Man erkennt unermittelbar: *Je mehr*

Tabelle 2.

s	Ls_α	Ls_β
−23	28	0
−13	21	12
−10,5	12	32
− 7,2	5	58
− 1,8	0	67

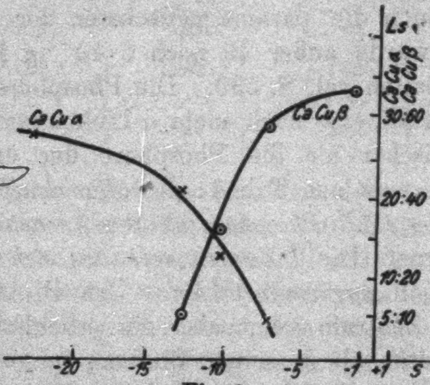


Fig. 2.

---

1) Die Lichtsummenwerte der β-Bande sind infolge der weit größeren Empfindlichkeit der verwendeten K-Zelle für Blau größer als die der α-Bande, in absolutem Maß wahrscheinlich erheblich kleiner.

der Paramagnetismus des Phosphors zunimmt, um so mehr *nimmt die Lichtsumme der α-Bande ab*; *hingegen steigt die Lichtsumme der β-Bande mit zunehmendem Paramagnetismus.* In das Zentrenmolekül wird also bei der Präparation des CaCu-β-Phosphors ein Bestandteil eingelagert, der paramagnetischer ist als der bei der Präparation des CaCu-α-Phosphor in das Zentrenmolekül eingelagerte Bestandteil. Vergleichen wir dieses Verhalten mit bekannten Werten der Suszeptibilität der Cu-Verbindungen, die als Bausteine des Phosphorzentrums mit großer Wahrscheinlichkeit in Betracht kommen, also mit CuS und Cu_2S für Sulfidphosphor. Nach St. Meyer ist der Wert des Molekularmagnetismus für

$$\mathrm{CuS} \quad -0{,}15\cdot 10^{-6} \qquad \mathrm{Cu_2S} \quad -0{,}23\cdot 10^{-6}$$

Die einwertige Cu-Verbindung ist also paramagnetischer als die zweiwertige Verbindung. Bezeichnet man mit s_{CuS} die spezifische Suszeptibilität von CuS bzw. mit $s_{\mathrm{Cu_2S}}$ die von Cu_2S, so ist $s_{\mathrm{Cu_2S}} > s_{\mathrm{CuS}}$.

Vergleichen wir damit das magnetische Verhalten der CaCu-Phosphore. Es sei s_α die spezifische Suszeptibilität von von CaCu α, entsprechend s_β diejenige von CaCu β, dann zeigen die Messungen $s_\beta > s_\alpha$.

Der gesamte Magnetismus des α-Zentrums läßt sich näherungsweise darstellen durch die Summe:

$$-s_\alpha = -s_{\mathrm{CaS}} + s_\Phi - s_{\mathrm{Cu}}\ldots$$
$$-s_\beta = -s_{\mathrm{CaS}} + s_\Phi - s'_{\mathrm{Cu}}\ldots$$

Ebenso für die β-Zentren.

Damit $s_\beta > s_\alpha$ sein kann, muß der dem β-Zentrum zukommende Summand $s'_{\mathrm{Cu}}\ldots > s_{\mathrm{Cu}}\ldots$ sein, größer als der dem α-Zentrum zukommende Summand $s_{\mathrm{Cu}}\ldots$. Diese Bedingung stimmt aber überein mit dem Verhalten von CuS zu Cu_2S, denn es ist $s_{\mathrm{Cu_2S}} > s_{\mathrm{CuS}}$. Hieraus können wir mit großer Wahrscheinlichkeit den Schluß ziehen: *In das Zentrenmolekül des CaS wird bei Präparation des CaCu α-Phosphors das Metallatom in Form der Verbindung CuS eingelagert, in den Zentren des CaCuβ-Phosphors* liegt die *einwertige Verbindung* Cu_2S als Bestandteil vor.

Nun gehört der CaCu α-Phosphor zur Absorptionskantenserie 2. Art in der Bezeichnung von Hrn. **Schmidt**[1]), der CaCu β-Phosphor jedoch gehört zur Serienart 4. Obiger Schluß läßt damit folgende, noch zu verfolgende Erweiterung zu: *In den Zentren der Serienart 2 ist das phosphoreszenzfähige Metallatom in Form seiner zweiwertigen Sulfidverbindung eingelagert* (*CuS*); *in die Serienart 4 ist das Schwermetallatom in Form seiner einwertigen Sulfidverbindung eingeladert* (Cu_2S). Für die Serienart 1 haben wir nach sonstiger Kenntnis eine dreiwertige Verbindung des Metallatoms zu erwarten.[2]) Um hierüber Aufschluß zu erlangen, wurden zwei Nickelphosphore auf ihr magnetisches Verhalten untersucht. Der eine zeigte sehr rein die rote α-Bande. CaNi α gehört seiner Erregungsverteilung nach in die Serienart 2. Der andere hatte die gelbe β-Bande recht gut entwickelt. Wie aus der Erregungsverteilung von β zu ersehen[3]), gehört CaNi β in Serienart 1. Über die in diesem Phosphor verwendete Metallmenge war nur so viel bekannt, daß der CaNi β-Phosphor eine größere Metallmenge enthielt als der α-Phosphor (β erscheint erst bei größeren Metallmengen). Für diese Phosphore fand sich als Wert der relativen spezifischen Suszeptibilität:

CaNi α	$-$ 8 Sk.
CaNi β	$-$ 48 „

Obwohl die in CaNi β zugefügte Metallmenge größer ist als die in α, ist der erstere Phosphor weit diamagnetischer als der letztere; es kann daher in den Phosphoren nicht nur keine in Betracht kommende Ni-Menge als freies Metall vorhanden sein, sondern es muß das Nickel in beiden Fällen jedenfalls in ganz verschiedenen Bindungen vorliegen.

---

[1]) F. **Schmidt**, Ann. d. Phys. **64**. S. 731. 1921.

[2]) R. **Tomaschek**, Ann. d. Phys. **75**. S. 593. 1924.

[3]) S. **Lenard** u. V. **Klatt**, a. a. O., wo als Dauererregungsstellen die Wellenlängen 360 und 250 $m\mu$ angegeben sind. Gehört der Phosphor der Serienart 1 an, so muß das Verhältnis $\frac{360}{250} = 1{,}44$ der Wellenlängen dieser Erregungsmaxima übereinstimmen mit dem für d_1 und d_2 bekannten Verhältnis von CaBi $\frac{113}{77} = 1{,}46$. Die Übereinstimmung der beiden Verhältniszahlen zeigt, daß damit CaNi β ebenfalls in Serienart 1 gehört. Dasselbe läßt sich auch für CaMn β nachweisen.

Nach **St. Meyer** beträgt der Wert des Molekularmagnetismus der in ihrem magnetischen Verhalten den Sulfidverbindungen analogen Oxydverbindungen[1]) des Nickels:

NiO	$+ 3{,}4 \cdot 10^{-3}$,
Ni_2O_3	$+ 1{,}5 \cdot 10^{-3}$.

Mit entsprechenden Bezeichnungen wie oben für CaCu folgt $s_\alpha > s_\beta$ und $s_{\mathrm{NiS}} > s_{\mathrm{Ni_2S_3}}$, so daß man hieraus für CaNi schließen kann: In den α-Zentren des CaNi α-Phosphors liegt Nickel in zweiwertiger Bindung vor und in den β-Zentren in dreiwertiger. Über die CaNi γ-Zentren vgl. nächster Abschnitt.

5. Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität.

Das Temperaturverhalten einer chemischen Verbindung mit diamagnetischen und paramagnetischen Bestandteilen ist im allgemeinen darstellbar durch die Gleichung:

$$\varkappa = A + B\theta + \frac{C}{\theta},$$

wo $\theta = T + \varDelta$ (absolute Temperatur) und A, B, C charakteristische Konstanten. Für rein diamagnetische Stoffe ist im allgemeinen $B = C = 0$, doch gibt es sehr viele diamagnetische Stoffe, bei denen mit steigender Temperatur der Diamagnetismus linear zunimmt, also $B = 0$ wird. Paramagnetische Stoffe befolgen in weitgehendem Maße das **Curie**sche Gesetz $\varkappa\,\theta = \mathrm{const.}$

Ist mit der Ausbildung der Phosphorzentren ein paramagnetischer Summand verbunden, so ist zu erwarten, daß dieser Paramagnetismus in dem Maße abnimmt, wie die Zentren mit steigender Temperatur sich ihrem oberen Momentanzustand nähern, wobei ein Zerfall der Zentren eintritt. Der Ausdruck C/θ würde dann für Temperaturen über dem oberen Momentanzustand verschwinden. Um hierüber möglichst umfassendes Material zu sammeln, wurde eine große Reihe verschiedener Phosphore untersucht: CaBi $\alpha + \beta$, SrBi α, BaBi α; CaCu α, CaCu β, CaCu $\alpha + \beta + \gamma$, BaCu α; CaNi α, CaNi $\gamma + \beta$, CaSm, CaO(Cu); ZnMn, ZnCu. Bei den ZnS-Phosphoren wurde hierbei eine Abhängigkeit des magnetischen Verhaltens vom Erregungszustand des Phosphors festgestellt, derart, daß der erregte Phosphor stets etwas paramagnetischer ist als der unerregte. Schließlich wurde noch die Phosphoreszenz des Eisenatoms einer Untersuchung unterworfen.

---

[1]) Es gilt, soweit das Zahlenmaterial reicht: Ist die zweiwertige Oxydverbindung eines Metalls paramagnetischer als die dreiwertige, so ist auch die zweiwertige Sulfidverbindung desselben Metalls paramagnetischer als die dreiwertige Sulfidverbindung.

Zur Untersuchung der Temperaturabhängigkeit des magnetischen Verhaltens wurde der Phosphor mit Glasröhrchen im Heißluftbad erwärmt. Die Temperatur wurde in unmittelbarer Nähe des Röhrchens mit einem Thermoelement aus Pt–PtRh gemessen, nachdem möglichst Temperaturgleichgewicht eingetreten war. Die möglichen Fehler der Temperaturmessung betragen schätzungsweise 5° unterhalb 300°, darüber bis 10° C. Luftströmungen waren durch Abdecken des den Phosphor umschließenden, elektrisch erhitzten Messingkästchens unmerklich gemacht. Der Polabstand war auf 18 mm vergrößert, die Feldstärke betrug 12000 Gauss. Von Zimmertemperatur angefangen wurden etwa alle 20° C die Ablenkungen des Phosphors nach Einschalten des Magnetfeldes gemessen und daraus, wie oben S. 508, die relativen Werte der spezifischen Suszeptibilität ermittelt, wobei die Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität des Glasröhrchens für sich bestimmt worden war. Die Meßergebnisse sind in den folgenden Kurven niedergelegt. Abszisse ist dabei stets die Temperatur in Celsiusgraden, Ordinate die relative spezifische Suszeptibilität.

Ergebnisse.

CaS und CaO. Reines, nach Art eines Phosphors geglühtes CaS, das bei der Erregung mit der Eisenlampe kaum merklich nachleuchtete, zeigte nur geringe Änderung seines magnetischen Verhaltens. Seine Suszeptibilität fiel fast linear zwischen 20 und 300° von — 58 auf — 61, die geringste Änderung von allen hier untersuchten Stoffen. Die Änderung von geglühtem CaO, das infolge geringer Cu-Beimischung schwach grünlich leuchtete, ist in Fig. 5 eingezeichnet. Auch hier ist der Gang mit der Temperatur gering, erst wenig, dann etwas stärker abnehmend. Diese geringen Änderungen in beiden Grundmaterialien lassen keine eindeutigen Schlüsse über das Verhalten der Zentrenmoleküle allein zu. Es scheint aber, daß die Zentrenmoleküle erst bei Temperaturen gänzlich zerfallen sind, die ziemlich über dem oberen Momentanzustand der meisten Phosphore liegen.

Bi-Phosphore. Die untersuchten Bi-Phosphore hatten normalen Metallgehalt, emittierten hauptsächlich die α-Bande, nur CaBi hatte auch deutlich β-Zentren entwickelt. Für reines Sulfid nimmt die Suszeptibilität ab in der Reihenfolge:

$$BaS \longrightarrow SrS \longrightarrow CaS.^{1)}$$

Daß hier der Magnetismus des CaBi größer ist als der des SrBi, liegt offenbar daran, daß CaBi in stärkerem Maße β-Zentren entwickelt hat, die, wie schon festgestellt werden konnte²), sich paramagnetischer verhalten als die α-Zentren.

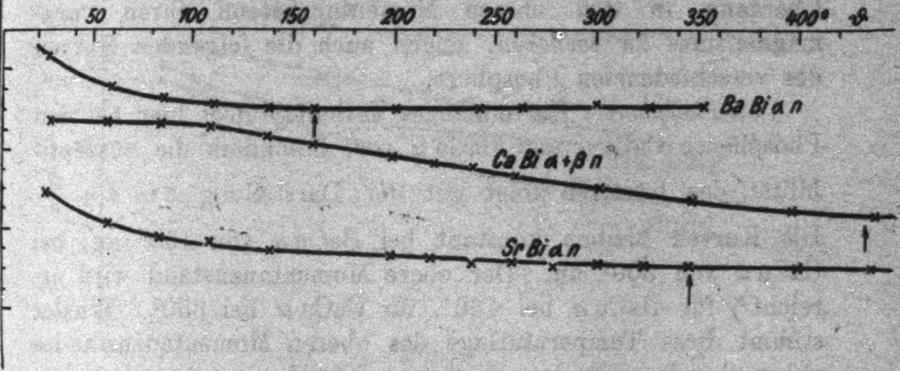


Fig. 8.

Ein besonders einheitliches Verhalten zeigt die Suszeptibilität der Phosphore BaBi und SrBi. Beide Kurven lassen sich darstellen durch Gleichungen der Form $x = A + \frac{C}{\theta}$. Der paramagnetische Bestandteil verschwindet für BaBi bei 160° C, für SrBi bei 350° C, von diesen Temperaturen ab tritt keine merkliche Abnahme der Suszeptibilität mehr auf. Bei CaBi ist der Verlauf der Kurve verwickelter, wohl infolge Auftretens der β-Zentren, doch kann man auch hier feststellen, daß die Suszeptibilität von 430° C aufwärts sich nicht mehr viel ändert. Vergleichen wir diese Temperatur des Verschwindens des paramagnetischen Zentrenbestandteils mit der Temperaturlage des

---

1) Vgl. Abschnitt 6.

2) Vgl. S. 514.

oberen Momentanzustandes dieser Phosphore. Der obere Momentanzustand tritt ein für CaBi α bei 400°, CaBi β 450°; für SrBi α 350°; für BaBi α bei 170° C.[1]) Der Vergleich lehrt, daß das *Verschwinden des paramagnetischen Bestandteils in den Zentren zusammenfällt mit dem Übergang dieser Zentren in ihren oberen Momentanzustand.* Damit ist auch der Beweis gewonnen, daß *dem Phosphorzentrum als Ganzes ein paramagnetisches Verhalten* zukommt, das in dem Maße verschwindet, wie mit wachsender Temperatur immer mehr Zentren zerfallen oder infolge der Wärmebewegung des gesamten Phosphormaterials in ihrem Bestreben, sich zum Magnetfeld zu orientieren, gehindert werden. Diese Eigenschaft der Zentren, mit dem Übergang in den oberen Momentanzustand ihren Paramagnetismus zu verlieren, zeigen auch die folgenden Kurven der verschiedensten Phosphore.

Cu-Phosphore. Ein einfaches Verhalten liegt hier bei den Phosphoren CaCu α und BaCu α vor, besonders die Suszeptibilität des letzteren folgt gut der Darstellung $x = A + \frac{C}{\theta}$. Die Kurven bleiben konstant bei BaCu α von 150° an, bei CaCu α von 300° an. Der obere Momentanzustand wird erreicht[2]) für BaCu α bei 160°, für CaCu α bei 350°. Wieder stimmt diese Temperaturlage des oberen Momentanzustandes nahe überein mit dem Verschwinden des paramagnetischen Bestandteiles in den Phosphorzentren. Die beiden anderen CaCu-Phosphore lassen, soweit die Messungen gehen, noch keine Konstanz der Suszeptibilität erkennen. Fur CaCu β liegt die Temperatur des oberen Momentanzustandes bei 400°, so daß Konstantbleiben der Suszeptibilitätskurve erst von dieser Temperatur ab zu erwarten wäre. Auffallend ist die Gestalt der Kurve von CaCu β gegenüber den Kurven der Cu α-Phosphore. Sie fällt für niedrige Temperaturen langsam und erst für höhere stärker, sie ist also nach oben konvex. Ein ganz entsprechendes Verhalten zeigte auch der schon besprochene CaBi und dieses Verhalten begegnet uns beim CaNi γ-Phosphor wieder. Es ist daher wahrscheinlich, daß hier eine besondere Eigentümlichkeit der β-Zentren in den Phosphoren CaBi und CaCu β vorliegt, bzw. der γ-Zentren in CaNi γ. In allen drei Fällen handelt es sich um sogenannte Hitzebanden, deren oberer Momentanzustand höher liegt als der der Haupt-(α)-Banden. Die Kurven der Suszeptibilität der Hauptbanden haben bei diesen Schwermetallatomen nach oben konkave Krümmung. Der andere CaCu-Phosphor in Fig. 4 emittierte sehr stark die rote γ-Bande, die selbst bei Temperaturen über 400° C noch deutlich zu beobachten war. Dieser Eigentümlichkeit ist es wohl zuzuschreiben, daß er für höhere Temperaturen (über 200°) langsamer als die beiden anderen CaCu-Phosphore, aber doch stetig abfällt.

---

[1]) Vgl. P. Lenard u. V. Klatt a. a. O.

[2]) Vgl. hier wie im folgenden die Angaben des oberen Momentanzustandes: P. Lenard u. V. Klatt.

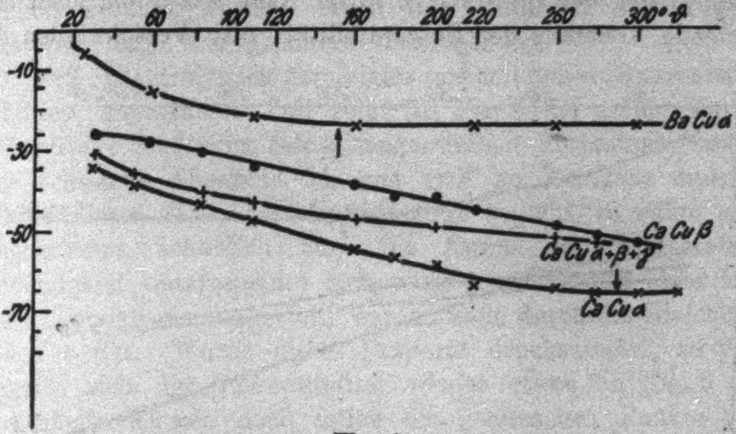


Fig. 4.

Ni-Phosphore. Der Phosphor, in dem zweiwertiges Nickel eingelagert ist, CaNi α, zeigt das analoge Verhalten wie die Phosphore mit zweiwertigem Cu, CaCu α und BaCu α. Auch seine Kurve läßt sich aus einer Hyperbel und einer zur Abszisse parallelen Geraden zusammensetzen. Konstanz der Suszeptibilität tritt ein bei etwa 200°. Die Temperatur des oberen Momentanzustandes wird ebenfalls zu 200° C angegeben, also auch für CaNi α Zusammenfallen des Verschwindens eines paramagnetischen Zentrenbestandteiles mit dem Zerfall der Zentren im oberen Momentanzustand. Der untersuchte CaNi γ-Phosphor hatte außer der Hitzebande γ auch die gelbe Kältebande β sehr stark entwickelt, die zwar bei Zimmertemperatur sich im oberen Momentanzustand befindet und nur im Momentanleuchten sichtbar wird. Der Wert der Suszeptibilität dieses Phosphors bei Zimmertemperatur ist daher wohl auch durch in die β-Zentren[1]) eingelagertes Ni_2S_3 mitbestimmt. Die Ni γ-Bande gehört, wie aus ihren Dauererregungsstellen festgestellt werden kann[2]), in die Serienart 4, also ist wahrscheinlich in die CaNi γ-Zentren eine Verbindung Ni_2S eingelagert. Entsprechend verläuft auch die Kurve der Suszeptibilität in ihrer Temperaturabhängigkeit ganz analog der für CaCu β. Hier kann außerdem noch eintretende Konstanz der Suszeptibilität, also Verschwinden des paramagnetischen Zentrenbestandteiles, nachgewiesen werden, die bei etwa 340° erreicht wird. Die Temperaturlage des oberen Momentanzustandes liegt bei etwa 300°, stimmt also mit dem Verschwinden der Dauerzentren der γ-Bande ziemlich überein.

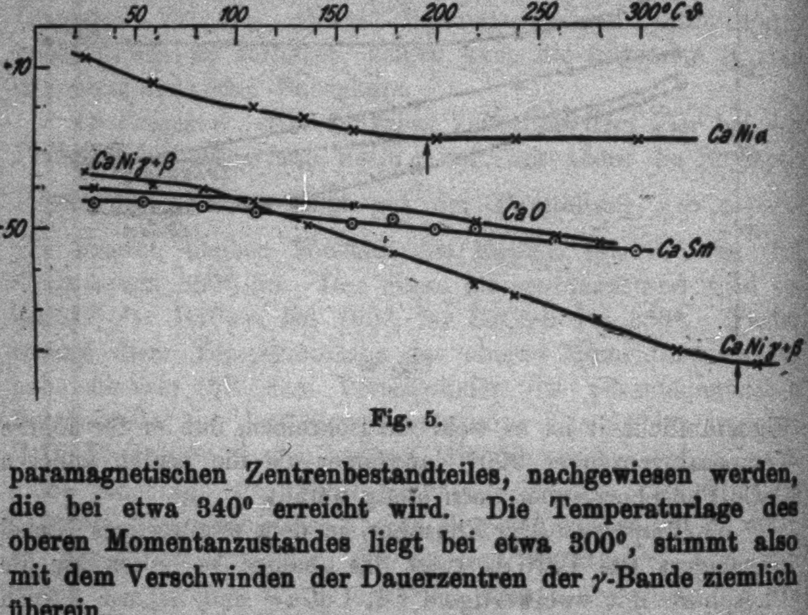


Fig. 5.

CaSm. Das magnetische Verhalten eines sehr gut leuchtenden CaSm-Phosphors ist in Fig. 5 eingezeichnet. Die Temperatur seines oberen Momentanzustandes liegt bei 370°. Die Suszeptibilität dieses Phosphors zeigt eine sehr langsame, fast

---

1) Vgl. vorigen Abschnitt.

2) d_1 bei 385 $m\mu$, d_2 bei 320 $m\mu$, also $\frac{d_1}{d_2} = 1,20$, während die absoluten Wellenlängen der Serienart 4 $d_1 = 121$, $d_2 = 103$, also $\frac{d_1}{d_2} = 1,18$.

geradlinige Abnahme, die keine Aussage über den Einfluß der Sm-Zentren zuläßt. Näheres über die Seltenerdphosphore vgl. Abschnitt 6.

ZnS-Phosphor. Die Untersuchung der ZnS-Phosphore schien dadurch von besonderem Belang, weil in ihnen vielleicht Zentrenformen vorliegen, die von der Struktur der CaS-Zentren abweichen. Hier konnte auch ein Einfluß des Erregungszustandes der Phosphorzentren auf die Suszeptibilität festgestellt werden, eine Erscheinung, die an CaS-Phosphor vergeblich gesucht wurde. Auch das Verhalten bei Druckzerstörung fand hier genauere Untersuchung.

ZnS. Elektrolytisch gereinigtes und mit Schwefelwasserstoff gefälltes, ungeglühtes ZnS zeigt (in Fig. 6 die untere Kurve) nur geringe Änderung seines magnetischen Verhaltens, zuerst eine schwache Abnahme, bis von 160° an Konstanz eintritt. Wurde dieses ZnS unter Luftabschluß geglüht, so nahm sein Magnetismus erheblich zu. Die Kurve der Temperaturabhängigkeit unterscheidet sich nicht merklich von einer Geraden, so daß sie dargestellt werden kann durch die Gleichung $x = A + B\theta$. Wurde dieses Präparat druckzerstört, so verringerte sich die Suszeptibilität wieder etwas (in Fig. 6 die gestrichelte Kurve), doch fallen die gemessenen Punkte von etwa 70° ab vollständig mit den Werten der Suszeptibilität des nicht druckzerstörten ZnS zusammen. *Das geglühte ZnS verhält sich also wie ein diamagnetischer Stoff, dessen Suszeptibilität langsam mit steigender Temperatur abnimmt.* Ein paramagnetischer Bestandteil kann nicht nachgewiesen werden, es sei denn, man will die geringe Abnahme der Suszeptibilität durch Druckzerstörung als Abnahme eines solchen Summanden ansprechen. Die große Änderung des magnetischen Verhaltens von ungeglühtem ZnS zu geglühtem ZnS ist wohl wesentlich durch die Ausbildung von ZnS-Kristalliden während des Glühprozesses hervorgerufen, ist also nicht als Unterschied zwischen reinem Grundmaterial und Grundmaterial, in dem Zentren ausgebildet sind, aufzufassen.

ZnCu-Phosphore. Der fast geradlinige Abfall der Suszeptibilität des geglühten ZnS bestimmt auch in der Hauptsache die Kurve der Temperaturabhängigkeit der ZnS-Phosphore. In Fig. 6 sind die erhaltenen Werte der Suszeptibilität für zwei ZnCu-Phosphore dargestellt. Außer der Hauptbande *α* waren in ihnen auch die Banden *β* und *γ* ausgebildet, wie ja das Herauspräparieren einer bestimmten Bande bei den ZnS-phosphoren viel schwieriger ist als bei den Erdalkaliphosphoren.[1]) Die obere Kurve der Suszeptibilität kommt einem Phosphor zu, der viel Momentanzentren entwickelt hatte und nicht gut nachleuchtete. Er wurde einesteils im unerregten Zustand untersucht, andererseits wurde seine Suszeptibilität auch im erregten Zustand ermittelt. Dazu wurde die zu untersuchende Phosphormenge in dünner Schicht ausgebreitet längere Zeit mit einer Eisenlampe erregt und dann in das Glasröhrchen eingefüllt. 10 Minuten nach Schluß der Erregung begann

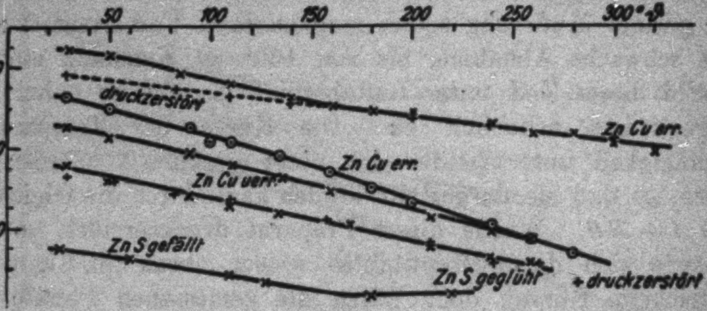


Fig. 6.

die Messung der Suszeptibilität, während der der abklingende Phosphor im Dunkeln allmählich bis zur Temperatur seines oberen Momentanzustandes erwärmt wurde. Nach vollendeter Messung im erregten Zustand blieb der Phosphor an derselben Stelle im Magnetfeld, bis sich die Meßanordnung wieder auf Zimmertemperatur abgekühlt hatte (meist 2 Stunden im Dunkeln). Dann wurde er unter genau gleichen Bedingungen wie vorher im erregten Zustand nun unerregt untersucht. Für den ZnCu-Phosphor mit viel Momentanleuchten konnte dabei kein Unterschied zwischen erregtem und unerregtem Zustand festgestellt werden. Die Kurve seiner Suszeptibilität weicht nur für niedrige Temperaturen bis gegen 160° von einer Geraden ab; die Temperatur von 160° liegt in der Nähe des oberen Momentanzustandes der *α*-Bande (210°), der für diesen Phosphor

---

1) Vgl. R. Tomaschek, Ann. d. Phys. 65. S. 199. 1921.

infolge der stärkeren Ausbildung von Zentren kleiner Dauer zu etwa 150° festgestellt wurde. Es kommt also dem Gesamtzentrum auch hier ein paramagnetisches Verhalten zu von derselben Art, wie es für die Erdalkaliphosphore gefunden wurde. Nach Verschwinden dieses paramagnetischen Bestandteiles wird jedoch bei den ZnS-Phosphoren die Suszeptibilität nicht konstant, sondern fällt linear weiter ab entsprechend dem Temperaturverhalten des Grundmaterials (vgl. oben). Über einen solchen paramagnetischen Zentrenbestandteil geben die Messungen der Suszeptibilität des kräftig druckzerstörten Phosphors weitere Auskunft. Die Werte der Suszeptibilität nach Druckzerstörung sind durch die gestrichelte Kurve (Fig. 6) verbunden. Sie fallen von 160° ab mit den Werten des unzerstörten Phosphors zusammen. Diese Kurve des druckzerstörten Phosphors läßt keine Abweichung von einer Geraden erkennen, sie verhält sich ganz wie die des ohne Metall geglühten ZnS. Die Ordinatendifferenz zwischen unzerstörtem und druckzerstörtem Phosphor ist also im wesentlichen als ein dem Gesamtzentrum zukommender Paramagnetismus anzusehen. Dieser Paramagnetismus ist eine Funktion von Zentrendauer und Zentrenzahl und gibt damit ein gewisses Maß der bei Temperaturerhöhung zerfallenden Zentren.[1])

Der andere in Fig. 6 aufgenommene ZnCu α-Phosphor war ein besonders gutes Präparat mit sehr langem und hellem Nachleuchten. Die Temperatur seines oberen Momentanzustandes wurde zu 250° ermittelt. Das magnetische Temperaturverhalten dieses Phosphors wurde sowohl im unerregten (untere Kurve) als auch im erregten Zustand (obere Kurve) untersucht, in der Weise wie oben beschrieben. Dabei zeigte sich die Tatsache, daß die Werte der Suszeptibilität des erregten Phosphors deutlich größer waren als die des unerregten Phosphors. Die Kurve der Suszeptibilität des unerregten Phosphors ist nur schwach nach oben gekrümmt, diejenige des erregten weist denselben Charakter auf, ist zuerst fast parallel der des unerregten und fällt dann etwas stärker, um bei etwa

---

1) Erhitzung des ZnS-Phosphors über 300° erwies sich als unstatthaft, da hier bereits ein Teil des ZnS zu ZnO oxydiert wurde, was sich einesteils in plötzlichem Knick der Suszeptibilitätskurve, andernteils in verminderter Leuchtfähigkeit des Präparates kundtat.

260° mit der Kurve des unerregten zusammenzutreffen. Die Temperatur des Zusammentreffens beider Kurven für erregten und unerregten Phosphor stimmt nahe überein mit der Temperatur des oberen Momentanzustandes (250°). Die *Phosphoreszenzzentren dieses ZnCu-Phosphors* sind also *paramagnetischer im erregten Zustand als im unerregten.* Dasselbe Verhalten konnte noch an zwei anderen, sehr gut nachleuchtenden ZnCu-Phosphoren nachgewiesen werden, während schlechter leuchtende, besonders mit viel Momentanzentren, keinen Einfluß des Erregungszustandes erkennen ließen. Aus Untersuchungen der Phosphore läßt sich also hier der Nachweis führen, daß Moleküle im Zustand der Erregung ein anderes magnetisches Verhalten zeigen, als im unerregten Zustand, daß *erregte Moleküle sich paramagnetischer verhalten als unerregte.*[1]) Auf die Bedeutung dieser Tatsache wird noch im 2. Teil näher einzugehen sein.

ZnMn-Phosphore. Dieselbe Abhängigkeit der Suszeptibilität vom Erregungszustand konnte auch bei gut nachleuchtenden ZnMn-Phosphoren festgestellt werden. In Fig. 7 gibt die obere Kurve die Werte der Suszeptibilität für den von Hrn. Tomaschek[2]) als bestleuchtenden Phosphor bezeichneten mit hauptsächlicher Ausbildung der α-Bande. Der Phosphor ist bei Zimmertemperatur paramagnetisch im erregten wie im unerregten Zustand. Erst bei etwa 100° wird sein Verhalten diamagnetisch. Die *Suszeptibilität des erregten Phosphors ist deutlich paramagnetischer als die des unerregten und nähert sich mit wachsender Temperatur* erst schneller, dann langsamer *den Werten des unerregten.* Bei etwa 140° fallen die Kurven für erregten und unerregten Phosphor zusammen. Von dieser Temperatur an ist der weitere Abfall geradlinig. Der obere Momentanzustand von ZnMn wird bei 190° erreicht. Es liegt wohl auch hier ein Zusammenhang zwischen dem Verschwinden des paramagnetischen Bestandteiles des erregten Phosphors mit dem oberen Momentanzustand vor, wenn auch der Zusammenhang nicht so deutlich ist wie bei den Cu-Phosphoren.

---

1) Es wäre daraus in Analogie zu schließen, daß auch Atome im Zustand der Verweilzeit sich paramagnetischer verhalten als unerregte Atome.

2) Vgl. R. Tomaschek, Ann. d. Phys. 65. S. 189. Nr. 17. 1921.

Die Ordinate der Suszeptibilität des erregten und des unerregten Phosphors ist ebenso wie für den ZnCu-Phosphor. Funktion der bei der betreffenden Temperatur im Zustand der Erregung befindlichen Zentren.

Die untere Kurve in Fig. 7 zeigt das magnetische Verhalten eines schlecht nachleuchtenden ZnMn mit viel Momentanleuchten. Für diesen Phosphor konnte ähnlich wie für den ZnCu-Phosphor mit viel Momentanzentren kein Unterschied zwischen erregtem und unerregtem Zustand gefunden werden. Die Nachweismöglichkeit verschiedenen magnetischen Verhaltens in erregtem und unerregtem Zustand bei der hier durchführbaren Meßgenauigkeit kommt also nur den gut ausgebildeten Zentren mittlerer und großer Dauer der ZnS-Phosphore zu.

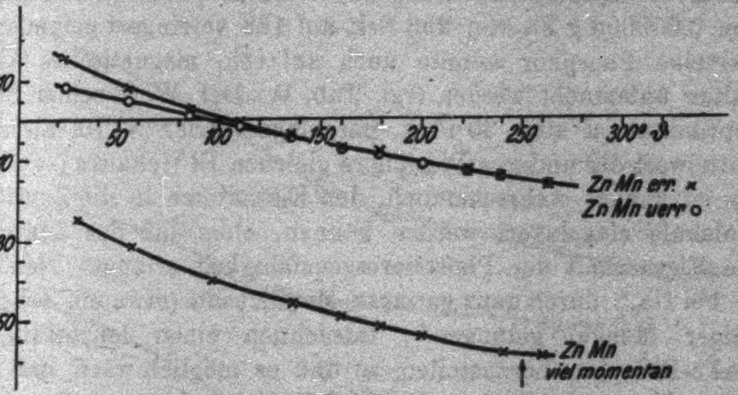


Fig. 7.

Bemerkenswert ist die nach oben konkave Krümmung der Suszeptibilitätskurve der ZnMn-Phosphore gegenüber dem umgekehrten Verhalten der ZnCu-Phosphore. Diese Verschiedenheit rührt wahrscheinlich daher, daß bei den Mn-Phosphoren zum geringen Paramagnetismus des Gesamtzentrums noch ein überwiegender paramagnetischer Summand hinzutritt, welcher in der in das Zentrenmolekül eingelagerten paramagnetischen Mn-Verbindung (MnS in ZnMn α) seinen Ursprung hat.

Für diesen Zentrenbestandteil scheint *Gültigkeit des Curieschen Gesetzes* vorzuliegen, so daß man die Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität für die ZnMn-Phosphore darstellen kann durch $x = A + B\theta + \frac{C}{\theta}$ wobei die ersten zwei Summanden das Verhalten des diamagnetischen Grundmaterials beschreiben, während das Glied C/θ hauptsächlich durch die in das Zentrum eingelagerte Mn-Verbindung bedingt wird.

Zur Phosphoreszenz des Eisenatoms.

Schon aus früheren Phosphoreszenzuntersuchungen war die Tatsache bekannt geworden, daß Eisenverunreinigungen die Phosphoreszenzfähigkeit anderer Atome herabsetzen. So wurde die Lichtsumme eines CaBi-Phosphors durch Zufügung von 0,000006 g Fe von 253 Sek. auf 168 verringert gefunden.[1]) Derselbe Phosphor konnte auch auf sein magnetisches Verhalten untersucht werden (vgl. Tab. 1). Der Wert seiner Suszeptibilität ist etwa 30 Proz. paramagnetischer (— 70) als der Mittelwert der anderen Phosphore gleichen Bi-Gehaltes (— 110). Es ist danach wahrscheinlich, daß Eisenatome in die Zentrenmoleküle eingelagert werden können, ohne daß das Zentrum die Eigenschaft der Phosphoreszenzfähigkeit erlangt. Nun ist es bei Na_2S durch ganz geringen Metallzusatz (etwa ein Zehntel obiger Menge) gelungen[2]), tatsächlich einen leuchtfähigen NaFe-Phosphor herzustellen, so daß es möglich wäre, daß die durch Verunreinigung in den Erdalkaliphosphoren vorhandene Eisenmenge schon verhältnismäßig so groß ist, daß kein Leuchten, auch kein momentanes, mehr auftreten kann. Untersucht man das magnetische Verhalten eines nach Art der gewöhnlichen Erdalkaliphosphore präparierten Fe-Phosphors, so kann man möglicherweise über die bei der Präparation entstehenden Fe-Zentren Auskunft erhalten, wobei diese Zentren nicht leuchtfähig zu sein brauchen.

Es wurden 2 Präparate mit Fe-Zusatz hergestellt:

1. 1 g CaS, 0,05 g Na_2SO_4, K_4FeCy_6, etwa 10^{-5} g,
2. 1 g CaO, 0,05 g Na_2SO_4, $FeCl_3$, „ 10^{-5} g.

Beide Phosphore zeigten weder mit Licht noch mit Kathodenstrahlen erregt irgendein dem Eisen zukommendes Leuchten. Den Wert ihrer Suszeptibilität in Abhängigkeit

---

1) Vgl. **P. Lenard** u. **W. Hausser**, Absolute Messung, S. 25.

2) **E. Tiede** u. **H. Reinicke**, Chem. Ber. **56**. S. 666. 1923.

von der Temperatur zeigt Fig. 8 zusammen mit der Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität des jeweiligen Grundmaterials CaS und CaO, nach Art eines Phosphors ohne Eisenzusatz unter den gleichen Bedingungen wie die obigen Präparate hergestellt. Vergleicht man zunächst die Kurven der beiden CaS- und CaSFe-Präparate, so sieht man, daß bei Zimmertemperatur CaSFe erheblich paramagnetischer (– 38) ist als CaS (– 53), aber doch nicht in dem Maße, wie man für eine Eisenverbindung erwarten[1]) möchte. Dieser Paramagnetismus des CaSFe nimmt mit wachsender Temperatur stark ab, bis er bei 160° C nahe verschwunden ist. Die Kurve läuft von hier ab horizontal, nahe parallel der CaS-Kurve. Man mag dieses plötzliche Absinken des Paramagnetismus bei 160° in Zusammenhang bringen mit etwa vorhandenen Zentren des Eisenatoms, die bei dieser Temperatur ihr paramagnetisches Verhalten einbüßen, also in den oberen Momantanzustand kommen. Dafür spricht auch, daß der Magnetismus von CaSFe durch Druckzerstörung in geringem Maße abnimmt

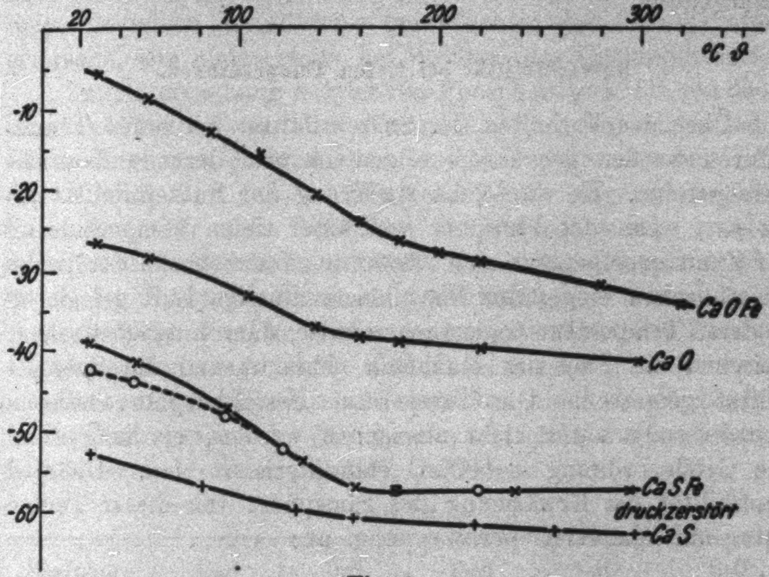


Fig. 8.

---

[1]) ZnMn mit 10^{-4} g Mn ist demgegenüber weit paramagnetischer (– 4) als ZnS (– 200).

(die gestrichelte Kurve in Fig. 8). Es mag daraus der Schluß erlaubt sein, daß Fe in CaS zentrenbildend auftritt und daß diese Eisenzentren bei etwa 160° C zerfallen.

Ein Vergleich der Kurven für CaO und CaOFe hingegen zeigt, daß zwar CaOFe erheblich paramagnetischer ist als CaO, daß aber beide Kurven bei nahe denselben Temperaturen zu flacherem Verlauf umbiegen, so daß ein Anzeichen auf Zentrenbildung daraus nicht abgelesen werden kann; vielmehr verhält sich in diesem Fall das zugefügte Eisenchlorid wie eine reine Beimischung.

Suszeptibilität bei tiefen Temperaturen.

Über das Verhalten der Suszeptibilität bei tiefen Temperaturen wurden nur einige allgemein orientierende Versuche durchgeführt. Es wurde die Änderung der Suszeptibilität gemessen, wenn der Phosphor von einer tiefen Temperatur bis zur Zimmertemperatur sich erwärmte. Dazu wurde der in das Glasröhrchen eingefüllte Phosphor in flüssige Luft gelegt, bis er deren Temperatur angenommen hatte, dann möglichst schnell zwischen die Pole des Magneten gebracht und die Suszeptibilität gemessen. Die Temperatur des Phosphors während der Messung kann nicht angegeben werden, sie mag durch die Größenordnung – 100° C charakterisiert sein. Die Suszeptibilität bei Erwärmung des Phosphors von dieser Temperatur auf Zimmertemperatur nahm ab:

für CaBi von – 30 auf – 34,
„ CaCu „ – 10 „ – 27,
„ ZnMn „ + 107 „ + 33.

Die Suszeptibilität ändert sich also von – 100° bis + 20° C weniger stark für die Phosphore mit diamagnetischem Schwermetallatom, in die also ein diamagnetischer Bestandteil eingelagert ist (BiS, CuS), jedoch ganz erheblich für Phosphor mit paramagnetischem Schwermetallatom wie Mn.[1])

---

[1]) Das Verhalten bei tiefer Temperatur, besonders in Hinsicht auf den Atommagnetismus, soll einer weiteren Untersuchung vorbehalten bleiben.

6. Das magnetische Verhalten der seltenen Erdphosphore.[1]

Die seltenen Erdemetalle zeichnen sich bekanntlich durch einen ganz außerordentlich großen Atommagnetismus aus. Auch ihre Sauerstoffverbindungen weisen Werte der Suszeptibilität auf, die diejenigen der entsprechenden Eisenverbindungen erheblich übertreffen (so Er_2O_3 $x = +212 \cdot 10^{-6}$, Sm_2O_3 $+482 \cdot 10^{-6}$, gegen Fe_2O_3 $+17{,}5 \cdot 10^{-6}$). Da die seltenen Erdphosphore scharfe Linien emittieren, versprach die Untersuchung ihres magnetischen Verhaltens auch Auskunft über Zusammenhänge zwischen Suszeptibilität und spektraler Lage der Emissionslinien desselben Metallatoms bei Wechsel des Erdalkaliatoms einerseits, wie andererseits bei Wechsel des Gattungsatoms.

Zur Untersuchung wurden Sm-Phosphore gewählt, von denen mir eine Reihe von Hrn. Tomaschek unter einheitlichen Glühbedingungen hergestellter zur Verfügung standen. Um den Einfluß der in das Zentrenmolekül eingelagerten Sm-Verbindung für sich feststellen zu können, wurde erst die Suszeptibilität des reinen, nach Art eines Phosphors ohne Metall geglühten Grundmaterials bestimmt. Die Änderung der Suszeptibilität des Phosphorzentrums gegenüber der Suszeptibilität des Zentrenmoleküls wird dabei als einfacher Summand aufgefaßt, verursacht durch Einlagerung einer Sm-Verbindung in das Zentrenmolekül. *Für das Grundmaterial* wurden folgende Relativwerte der Suszeptibilität gefunden:

Tabelle 3.

Phosphor	CaS	SrS	BaS	CaO	SrO
s	– 100	– 87	– 48	– 86	– 76

Die Suszeptibilität des Grundmaterials nimmt also bei ein und demselben Gattungsatom zu in der Reihenfolge von Ca nach Sr nach Ba, d. h. mit höherem Atomgewicht des Erdalkaliatoms. Die Suszeptibilität nimmt ferner zu bei gleichem Erdalkaliatom, wenn man von der Sulfidverbindung zur Oxydverbindung übergeht.[2] Die Werte der *Suszeptibilität*

---

[1] Vgl. zu diesem Abschnitt R. Tomaschek, Ann. d. Phys. 75. S. 109 u. 561. 1923.

[2] Ein solches Verhalten der Suszeptibilität ist aus früheren Untersuchungen der verschiedenen chemischen Verbindungen bekannt.

der untersuchten Sm-Phosphore sind in der folgenden Tab. 4 zusammengestellt. Die den Phosphoren beigeschriebenen Zahlen geben die bei der Präparation verwendete Sm-Menge in Gramm auf je 1 g Phosphor an.

Tabelle 4.

Phosphor	CaOSm	SrOSm	CaSSm	CaSSm	SrSSm	SrSSm	BaSSm
Sm	0,0005	0,0011	0,0005	0,001	0,0009	0,0011	0,0007
s	− 10,2	− 15,2	− 27	− 20	− 26	− 23	− 12,4

Zunächst ist bemerkenswert, daß die Werte der Suszeptibilität aller dieser Phosphore wesentlich kleiner (diamagnetischer) sind als die Werte der Suszeptibilität der Mn-Phosphore gleichen Metallgehaltes (vgl. Abschnitt 3.) Es ist also in die Zentren der seltenen Erdphosphore ein Bestandteil eingelagert, der weit nicht in dem Maße paramagnetisch ist, als z. B. MnS in CaMn.[1]

Der Vergleich der beiden CaS- wie der SrS-Phosphore zeigt, daß mit zunehmendem Metallgehalt der Phosphor paramagnetischer wird. Es liegt also ein ganz entsprechendes Verhalten vor, wie wir es bei den Mn-Phosphoren für die Abhängigkeit der Suszeptibilität vom Metallgehalt gefunden haben (vgl. Fig. 1). Nach der oben dargestellten Auffassung ist die Differenz der Suszeptibilität des Phosphors gegenüber der des Grundmaterials ein Maß der dem Sm bei seiner Einlagerung in das Zentrenmolekül zukommenden Suszeptibilität. Bezogen auf gleichen Metallgehalt betragen diese Werte der *dem Sm zukommenden Suszeptibilität s'* für die Sulfidphosphore:

Tabelle 5.

Phosphor	CaSSm 0,001	SrSSm 0,001	BaSSm 0,001
s'	+ 80	+ 62	+ 33

---

[1] Ist der wirksame Bestandteil in den Sm-Phosphoren, wie Hr. Tomaschek wahrscheinlich macht, die S- bzw. O-Verbindung des dreiwertigen Sm, so wäre ein stark paramagnetisches Verhalten des gesamten Phosphors zu erwarten, denn Hr. St. Meyer gibt z. B. für Mn_2O_3 den Wert der Suszeptibilität $+ 42 \cdot 10^{-6}$ an und für Sm_2O_3 einen 10 mal größeren $+ 482 \cdot 10^{-6}$.

Bei gleichem Gattungsatom nimmt also bei Wechsel des Erdalkalimetalls der den Sm-Zentren zukommende Wert der Suszeptibilität ab: Es gilt

für gleiches Gattungsatom Ca —> Sr —> Ba:
Paramagnetismus nimmt ab.

Eine entsprechende Tabelle läßt sich auch für gleiches Erdalkaliatom bei Wechsel des Gattungsatoms zusammenstellen:

Tabelle 6.

Phosphor	CaSSm 0,005	CaOSm 0,005	SrSSm 0,0009	SrOSm 0,0009
s	+ 73	+ 76	+ 61	+ 64

Diese Tabelle läßt ersehen: *Bei gleichem Erdalkaliatom nimmt der dem Sm zukommende paramagnetische Wert der Suszeptibilität ab, wenn man von Sauerstoffphosphor zu Schwefelphosphor übergeht*: Es wird

für gleiches Erdalkaliatom O —> S:
Paramagnetismus nimmt ab.

Diese Abnahme des Paramagnetismus bei Wechsel des Gattungsatoms steht bei dem Sm-Phosphor nicht in unmittelbarem Zusammenhang mit der Zentrendauer, denn gerade bei diesen Phosphoren ist im Gegensatz zu den gewöhnlichen Erdalkaliphosphoren kein starker Unterschied der Zentrendauer bei Übergang von S nach O bemerkbar geworden.[1])

Vergleicht man den Gang der Suszeptibilität bei gleichem Erdalkaliatom einerseits und entsprechend den bei gleichem Gattungsatom andererseits mit der spektralen Lage der Emissionslinien, so fallen unmittelbar folgende Beziehungen auf:

für gleiches Gattungsatom Ca —> Sr —> Ba:
Violettverschiebung entsprechender Emissionslinien,
Dublettabstand nimmt ab,
Verbreiterung der einzelnen Emissionslinien,

für gleiches Erdalkaliatom O —> S:
Violettverschiebung der Linien,
Verkleinerung des Dublettabstandes,
Linienverbreiterung.

---

1) Vgl. R. Tomaschek, a. a. O., S. 568.

Es weisen also *Violettverschiebung, Dublettabstand und Linienschärfe auf einen Zusammenhang hin mit der Abnahme des dem Sm in den Phosphorzentren zukommenden paramagnetischen Wertes der Suszeptibilität.* Unter Zugrundelegung der von Hrn. Tomaschek angegebenen Daten[1]) gelangt man sogar zu quantitativen Beziehungen zwischen der Suszeptibilität der Sm-Verbindung in den Phosphorzentren und der Violettverschiebung der Emissionslinien dieser Zentren bzw. zum Dublettabstand. Diese empirischen Beziehungen seien in den folgenden Tabellen zusammengestellt. Es bedeutet s' die dem Sm in den Phosphorzentren zukommende relative Suszeptibilität, α_b, α_c die Liniengruppen in der Bezeichnung Hrn. Tomascheks, $\delta\lambda$ den Dublettabstand der beiden Hauptlinien einer Gruppe. Einklammerung bedeutet ungenaue Kenntnis. In Tab. 9 sind die Differenzen der dem Sm zukommenden Suszeptibilität $s_{Ca}' - s_{Sr}' = s$ für CaSSm und SrSSm (bzw. SrSSm und BaSSm) eingetragen zusammen mit den Violettverschiebungen entsprechender Linien $\lambda_{Ca} - \lambda_{Sr} = \Delta\lambda$.

Tabelle 7.

Violettverschiebung bei gleichem Erdalkaliatom.

Phosphor	s'	$\lambda\,\alpha_b$	$\lambda\,\alpha_c$	$s\,\lambda\,\alpha_b$	$s\,\lambda\,\alpha_c$
CaSSm	+78	615	576,2	44,9	42,1
		605,8	568,3	44,2	41,5
CaOSm	+76	605,88	569,50	46,3	43,3
		600,8	565,41	45,7	43,1

Tabelle 8.

Dublettabstand bei gleichem Gattungsatom.

Phosphor	s'	$\delta\lambda$		$s/\delta\lambda$	
		α_b	α_c	α_b	α_c
CaS	+80	5,1	5,1	16,0	19
SrS	+62	4,0	3,6	15,5	17
BaS	+33	(4,5)	(4,0)	(8)	—
CaO	+73	9,7	7,9	7,5	9

---

[1]) Es konnten hierbei die neuen genaueren Ausmessungen der Wellenlängen durch Hrn. Tomaschek verwendet werden.

Tabelle 9.

Violettverschiebung bei gleichem Gattungsatom bei Übergang von CaS → SrS und SrS → BaS.

CaS → SrS	$\lambda_{Ca} - \lambda_{Sr} = \Delta\lambda$	$\bar{s}$	$\bar{s}\sqrt{\Delta\lambda}$
	2,34	18	28
	1,28		20,5
	1,93		25,0
	1,47		22,0
SrS → BaS	1,0	29	29
	(0,5)		20,5
	(0)		—
	(0,5)		20,5

Die letzten Spalten dieser Tabellen weisen auf bemerkenswerte Beziehungen zwischen Suszeptibilität und spektraler Lage der Emissionslinien hin. Tab. 7 zeigt:

$$(s'\lambda)_O = (s'\lambda)_S = \text{const.},$$

d. h.

Für gleiche Liniengruppen ist bei gleichem Erdalkalimetall das Produkt aus der dem Sm zukommenden Suszeptibilität und der Wellenlängen entsprechender Linien eine vom Gattungsatom unabhängige Konstante.

Aus Tab. 8 folgt:

$$\left(\frac{s'}{\delta\lambda}\right)_{Ca} = \left(\frac{s'}{\delta\lambda}\right)_{Sr} = \left(\frac{s'}{\delta\lambda}\right)_{Ba} = \text{const.},$$

d. h.

Für gleiche Liniengruppen ist bei gleichem Gattungsatom das Verhältnis der dem Sm zukommenden Suszeptibilität zum Dublettabstand der Linien einer bestimmten Gruppe eine vom Erdalkaliatom unabhängige Konstante.

Aus Tab. 9 scheint zu folgen, wie durch Klammerung hervorgehoben:

$$(s_{Ca}' - s_{Sr}')\sqrt{\lambda_{Ca} - \lambda_{Sr}} = (s_{Sr}' - s_{Ba}')\sqrt{\lambda_{Sr} - \lambda_{Ba}} = \text{const.},$$

d. h.

Für entsprechende Linien einer Gruppe ist die Differenz der Suszeptibilität eines Erdalkaliphosphors und der des nächst höheren Erdalkaliphosphors multipliziert mit der Wurzel aus der Differenz der Wellenlängen der Emissionslinien derselben Erdalkaliphosphore eine vom Erdalkaliatom unabhängige Konstante.

Auf die Bedeutung dieser hier rein empirisch gefolgerten Beziehungen für unsere Kenntnis des Zentrenbaues wird im zweiten Teil noch näher eingegangen.

7. Abhängigkeit der Suszeptibilität von der Magnetfeldstärke.

Bei diesen Messungen wurde die Feldstärke zwischen 7000 und 20000 Gauss variiert. Die Feldstärke selber wurde mittels Wismutspirale ermittelt.[1] Die folgende Tabelle enthält die gefundenen Relativwerte der spezifischen Suszeptibilität. *H* ist Feldstärke in 1000 Gauss.

Tabelle 10.

H	CaCu	CaSm	CaBi
19,5	6,88	6,80	7,95
17,5	6,88	6,82	7,78
12,5	6,90	6,81	7,80
10,8	6,78	6,78	7,20
7,5	6,99	6,88	7,16
Mittel	6,88	6,81	

Für Erstmagnetisierung, ansteigendes und wiederabsteigendes Feld wurden dieselben Werte gefunden. Wie Tab. 10 zeigt, lassen CaCu und CaSm im untersuchten Feldbereich *keine Änderung ihrer Suszeptibilität mit der Feldstärke* erkennen; ob hingegen bei CaBi eine geringe Zunahme der Suszeptibilität mit zunehmender Feldstärke vorliegt, kann nicht mit Sicherheit entschieden werden. Denn die Werte der beiden anderen Phosphore zeigen gerade bei 7500 und 10800 Gauss die beträchtlichsten Abweichungen vom Mittel, die wohl von der nicht genügend genauen Kenntnis des Gradienten der Feldstärke herrühren.

Von besonderem Belang schien die Untersuchung der Suszeptibilität für die Phosphore mit stark paramagnetischen Bestandteilen ZnMn, CaNi und CaFe. Die Versuche ließen jedoch auch hier keine Abhängigkeit der Suszeptibilität von der Feldstärke erkennen, jedenfalls waren die Änderungen nicht größer als die einzelnen Abweichungen der Werte bei den Phosphoren mit diamagnetischem Schwermetall CaCu und

---

[1] Über Ausmessung des Feldes vgl. nächsten Abschnitt.

CaBi. Auch Remanenz bei mehrmals wiederholten magnetischen Zyklen konnte nicht nachgewiesen werden.

8. Über den Atommagnetismus des Schwermetallatoms.

Zur Bestimmung des Atommagnetismus muß die spezifische Suszeptibilität des mit bestimmtem Metallgehalt präparierten Phosphors und die des nach Art eines Phosphors geglühten Grundmaterials in absolutem Maß ermittelt werden. Zur Auswertung der Suszeptibilität wurde Gleichung (1) zugrundegelegt. Hierbei sind die Maße m von Phosphor und Röhrchen, die Länge λ des Röhrchens, die Ablenkung s und die Länge l des Auffadens der Messung unmittelbar zugänglich.

Zur *Messung der Feldstärke* kam außer der Wismutspirale auch eine absolute Messung mittels Induktion zur Durchführung. Eine Drahtschleife mit zwei Windungen, deren Windungsfläche sich also recht genau aus den Dimensionen bestimmen ließ, wurde plötzlich in Richtung der Ablenkung des zu untersuchenden Glasröhrchens aus dem Magnetfeld herausgezogen und die induzierte Elektrizitätsmenge ballistisch gemessen. Auf diese Weise wurden folgende Feldstärken gefunden:

mit Wismutspirale $H = 18900$ Gauss, $H_0 = 3250$ Gauss,
absolute Messung $H = 19200$ „ , $H_0 = 3200$ „ ,

also weitgehende Übereinstimmung nach beiden Methoden.

An Phosphoren kamen zur Untersuchung: CaMn α, ZnMn α, CaCu α, CaBi α und SrAg β; alle mit unternormalem Metallgehalt. Es wurde eigens festgestellt, daß diese verwendeten Phosphore hauptsächlich die angegebene Bande emittierten. Zur Bestimmung der spezifischen Suszeptibilität des Metallatoms im Phosphor mußte die in den Zentren wirksam vorhandene Metallmenge bekannt sein. Dazu mußte Verdampfungsverlust und Druckzerstörung der verwendeten Phosphore ermittelt werden. Für CaBi α konnten die Ergebnisse der Herren Lenard und Hausser[1]) Verwendung finden, während für CaCu α und SrAg β Hrn. Scheifeles[2]) absolute Messung die Verdampfungsverluste lieferte. Für die Mn-Phosphore wurden eigene Messungen der Verdampfungsverluste durchgeführt, über die im folgenden kurz berichtet sei:

---

[1]) P. Lenard u. W. Hausser, a. a. O., S. 26.

[2]) A. Scheifele, Heidelberger Dissertation, 1924.

Verdampfungsverluste bei Mn-Phosphoren. Die Mn-Menge im Phosphor wurde vor und nach der Präparation *durch Verwandlung in Permanganat kolorimetrisch* festgestellt. Dazu diente ein Spektralphotometer nach **König**, **Martens** und **Grünbaum**, das mit bekannten Mn-Lösungen derart geeicht wurde, daß in den einen Strahlengang des Photometers stets eine Lösung mit bestimmtem Gehalt an $KMnO_4$ (in 1000 ccm 21,8 mg $KMnO_4$) gebracht wurde, während in dem anderen Strahlengang verschiedene, bekannte Verdünnungen der Ausgangslösung zur Untersuchung kamen. Beobachtet wurde im Gebiet der Absorptionsbande von $KMnO_4$ bei zwei verschiedenen Wellenlängen im Gelbgrün und Grün, ein Umstand, der die Meßgenauigkeit gegenüber weißem Licht beträchtlich erhöhte. Das Mn im Phosphor wurde durch Kochen in Salpetersäure und Bleisuperoxyd in Permanganat verwandelt. Zur Herstellung der Phosphore wurden zwei schon ältere $MnSO_4$-Lösungen benutzt. Die eine sollte nach Herstellung und Tropfenwägung im Tropfen enthalten 1,08 mg Mn, die andere 0,048 mg Mn. Die kolorimetrische Bestimmung mit dem geeichten Spektralphotometer ergab in der ersten Lösung 1,16 mg, in der zweiten $0{,}055_4$ mg Mn im Tropfen. Zur Untersuchung, ob die hinzugefügte Mn-Menge auch wieder restlos aus dem Phosphor als Permanganat nachgewiesen werden konnte, wurde reines, geglühtes CaS mit einem Tropfen der ersten Lösung versetzt, das Präparat in Salpetersäure gekocht und filtriert. Nach Zugabe einer Messerspitze Bleisuperoxyd wurde das Filtrat nochmals gekocht und das entstandene Permanganat kolorimetrisch gemessen. Die Messung ergab 1,148 mg Mn gegenüber dem zugefügten 1,16 mg; es wird also praktisch alles hinzugefügte Mn in Permanganat verwandelt. In derselben Weise, wie hier für CaS beschrieben, wurden auch die Phosphore behandelt.

Es wurden zunächst drei Phosphore hergestellt. Die folgenden Metallmengen beziehen sich auf 1 g CaS, 0,05 g Na_2SO_4 und 0,02 g CaF_2.

Vor der Präparation zugegebene Metallmenge in mg Mn	Nach der Präparation kolorimetrisch gefunden in mg	Verdampfungsverlust in Proz.
1,16	0,962	17
0,111	$0{,}88_4$	20
$0{,}055_4$	$0{,}042_2$	24

Man sieht hieraus, daß der *relative Verdampfungsverlust für geringe Mn-Gehalte etwas größer ist als für größere Mn-Gehalte.* Ein Vergleich dieser Verdampfungsverluste mit denen von anderen Metallen (Bi 50 Proz., Cu 30—40 Proz., Ag 30 Proz.) zeigt, daß Mn in seiner Verbindung im Phosphor weit weniger flüchtig ist als diese Metalle.

Damit wäre für Mn-Phosphore eine Methode zur Bestimmung des Verdampfungsverlustes gefunden, die dank der kräftigen Färbung des Permanganats größere Genauigkeit gestattet als die bisher durchgeführten Verlustmessungen an anderen Metallen.[1]) Dieselbe Methode fand auch Anwendung zur Bestimmung des Mn-Gehalts in zwei ZnMn-Phosphore, die in Tab. 11 zur Berechnung des Atommagnetismus aufgenommen sind.

Über eine Methode zur Bestimmung der Suszeptibilität aus der Wanderungsgeschwindigkeit pulverförmiger Stoffe. Von den von Hrn. Scheifele präparierten SrAg-β-Phosphor mit bekanntem Metallgehalt und Verdampfungsverlust standen nur geringe Mengen eines $^1/_4$n- und $^1/_{100}$n-SrAg zur Verfügung. Um diese Mengen doch zur Suszeptibilität benutzen zu können, wurde eine neue Methode der Suszeptibilitätsmessung ausgearbeitet.

Ein möglichst kugelförmiges Körnchen des zu untersuchenden Stoffes fällt in einer reibenden Flüssigkeit, z. B. in Öl, einmal im Schwerefeld allein und einmal im Schwere- + Magnetfeld. Der Unterschied der Wanderungsgeschwindigkeit bei gleichförmiger Bewegung des Teilchens wird mit einem elektromagnetischen Nadelschreiber gemessen. Wir bezeichnen x = spezifische Suszeptibilität des Phosphors bezogen auf Öl, ω_1 = Wanderungsgeschwindigkeit im Schwerefeld, ω_2 = Wanderungsgeschwindigkeit im Schwere- + Magnetfeld, m = Masse,

---

[1]) Eine absolute Messung der Energieaufspeicherung der Mn-Phosphore könnte hieraus Nutzen ziehen.

r = Radius des Teilchens, m_1 = Masse des verdrängten Öls, η = Reibungskoeffizient des Öls. $m' = m - m_1$.

Nach dem Stokesschen Gesetz gilt für das Schwerefeld:

$$\text{a)} \qquad m' g = 6 \pi \eta r \omega_1,$$

für das Schwere- + Magnetfeld:

$$\text{b)} \qquad m' g \pm m' \varkappa \mathfrak{H} \frac{d \mathfrak{H}}{d x} = 6 \pi \eta r \omega_2,$$

also a) : b)

$$\text{c)} \qquad \varkappa = \mp \frac{g\left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right)}{\mathfrak{H} \frac{d \mathfrak{H}}{d x}}.$$

Man erhält so eine einfache Formel zur Bestimmung der Suszeptibilität, in der vor allem die schwer zu messenden Größen m, r und auch η herausgefallen sind. Eine absolute Messung der Suszeptibilität nach Gleichung c) würde genaue Kenntnis des Gradienten der Feldstärke verlangen. Um die hierin liegende Unsicherheit zu vermeiden, wurde die Methode nur zu Relativmessungen in Anspruch genommen, wobei die Meßanordnung mit Zinksulfid, dessen Suszeptibilität nach der früheren Methode der Ablenkung im Magnetfeld absolut ermittelt worden war, geeicht wurde. Es bleibt dann nur noch die Aufgabe, das *Verhältnis der beiden Wanderungsgeschwindigkeiten* ω_1/ω_2 zu bestimmen. Da die Wanderungsgeschwindigkeiten stark von der Suszeptibilität der umgebenden Flüssigkeit abhängt, wurden verschiedene Öle verwendet, so Paraffinöl ($\varkappa = 0{,}48 \cdot 10^{-6}$), Leinöl; Rapsöl ($\varkappa = 0{,}77 \cdot 10^{-6}$).

Die Meßanordnung ist folgende: Ein mit dem Öl gefülltes, nicht zu enges Glasröhrchen wird senkrecht ins Magnetfeld gestellt, einige Phosphorkörnchen oben in das Öl gebracht und zunächst ohne Magnetfeld, mit dem Okularmikroskop der Durchgang eines bestimmten, möglichst kugelförmigen Körnchens durch zwei festgelegte Skalenteile beobachtet, darauf das Magnetfeld angeschaltet und der Durchgang desselben Teilchens durch zwei andere, tiefer liegende Skalenteile wie oben beobachtet. Ein elektromagnetischer Nadelschreiber mit Taster läßt die Durchgangszeiten des Körnchens durch die festgelegten Skalenteile auf einem laufenden Papierstreifen festhalten. Zur Kontrolle des gleichmäßigen Gangs des Papierstreifens markiert außerdem ein Sekundenpendel mit besonderem Nadelstift die Sekunden. Der einer Sekunde entsprechende Abstand auf dem Streifen betrug im Mittel 2,82 cm, so daß $^1/_{200}$ Sek. noch gut bestimmt werden konnte. Zur Übersicht über die Meßgenauigkeit seien einige Zahlen mitgeteilt. So wurde für das Verhältnis ω_1/ω_2 gefunden in Paraffinöl für:

CaBi-α-1n	für CaO
1,08	0,82
1,05	0,80
1,08	0,84
1,06	0,88
1,05	0,84
1,08	

Es lassen sich also leicht Mittelwerte mit unter 1% wahrscheinlichem Fehler erhalten. Nachdem so die Brauchbarkeit der Methode erwiesen war, konnte zur Messung der Suszeptibilität der Silberphosphore geschritten werden. Der Wert der Suszeptibilität für reines Zinksulfid wurde nach der früheren Methode absolut zu $-0{,}24 \cdot 10^{-6}$ ermittelt.[1] Bezogen auf diesen Absolutwert wurde gefunden für:

SrAg $\beta\ ^1/_{100}$ n. $= 0{,}209 \cdot 10^{-6}$ SrAg $^1/_4$ n. $0{,}247 \cdot 10^{-6}$.

Atommagnetismus. Die Suszeptibilität der Cu- und Bi-Phosphore wurde nach der früheren Methode absolut ermittelt. So lagen alle Daten vor zur Berechnung des Atommagnetismus des phosphoreszenzfähigen Metallatoms. Wie Fig. 1 zeigt, ändert sich nur bei geringem Metallgehalt die Suszeptibilität linear mit der Metallmenge; nur bei geringem Metallgehalt sind in der Hauptsache nahe gleichgroße Zentren der Hauptbande ausgebildet. Die gegenseitige Störung der Zentren untereinander ist gering, so daß man hier das magnetische Verhalten des einzelnen isolierten Metallatoms untersuchen kann, ein Vorteil, der am reinen Metall nie zu erreichen ist, da dort stets die Bindung der Atome im Kristallgitter den Magnetismus des einzelnen Metallatoms stark verzerrt. Es kamen daher mit Ausnahme eines ZnMn-Phosphors mit viel Metall *nur unternormale Phosphore* zur genauen Untersuchung, deren Suszeptibilität noch im linearen Anstieg der Kurve Fig. 1

---

1) Zur Demonstration der starken Beeinflussung der Wanderungsgeschwindigkeit im Magnetfeld eignet sich sehr gut ein übernormaler ZnMn-Phosphor, dessen Körner in Leinöl fallen.

liegt. Tab. 11 gibt die für den Atommagnetismus gefundene Werte.

Tabelle 11.

Phosphor	n_{gr}	$x \cdot 10^6$	$\frac{x}{n}$ A	x_{Metall}	$x_{Metallverbindung}$
CaMn-α	$0{,}96 \cdot 10^{-3}$	$+0{,}143$	$+8{,}2 \cdot 10^{-3}$	$+5{,}7 \cdot 10^{-4}$	$3{,}86 \cdot 10^{-3}$ MnS
ZnMn-α	$1{,}08 \cdot 10^{-3}$	$+0{,}18$	$+8{,}3 \cdot 10^{-3}$	$+5{,}7 \cdot 10^{-4}$	
ZnMn	$6{,}9 \cdot 10^{-3}$	$+0{,}7$	$+6{,}5 \cdot 10^{-4}$	$+5{,}7 \cdot 10^{-4}$	
CaBi-α	$1{,}2 \cdot 10^{-5}$	$-0{,}042$	$-73 \cdot 10^{-2}$	$-2{,}78 \cdot 10^{-4}$	$1{,}14 \cdot 10^{-6}$ Bi-Nitrat
CaCu-α	$1{,}7 \cdot 10^{-5}$	$-0{,}013$	$-4{,}9 \cdot 10^{-3}$	$-5{,}7 \cdot 10^{-6}$	CuS $-1{,}54 \cdot 10^{-5}$;
SrAg-β	$5{,}2 \cdot 10^{-5}$	$-0{,}039$	$-0{,}82 \cdot 10^{-3}$	$-11 \cdot 10^{-6}$	$Cu_2S - 2{,}1 \cdot 10^{-5}$ AgJ $- 4{,}9 \cdot 10^{-5}$

Die untersuchten Phosphore zählt Spalte 1 auf. In Spalte 2 sind die um den Verdampfungsverlust und Druckzerstörung[1]) korrigierten, im Phosphor wirksam vorhandenen Metallmengen eingetragen. Die Werte der diesen Metallmengen zukommende spezifische Suszeptibilität x gibt Spalte 3 in absolutem Maß. Diese Zahlen sind stets als Differenzen der Suszeptibilität des Phosphors und der Suszeptibilität des zugehörigen Grundmaterials gewonnen. Spalte 4 gibt den Atommagnetismus $\frac{x}{n} A$. Die Spalte 5 enthält als Vergleich die Atommagnetismen der reinen Metalle und schließlich Spalte 6 die Molekularmagnetismen[2]) der für das Phosphorzentrum in Betracht kommenden Verbindungen MnS, CuS. Da zweiwertige Silberverbindungen nicht rein bekannt sind, ist hierfür AgJ angeführt und als Vergleich dazu das einwertige Cu in Cu_2S. Für das dreiwertige Bi ist Wismutnitrat aufgeführt. Bei den gleich zu besprechenden Besonderheiten der diamagnetischen Atome im Phosphorzentrum ist eine solche Heranziehung anderer Metallverbindungen erlaubt.

Vergleichen wir zuerst den Magnetismus der Mn-Phosphore: Die beiden Phosphore mit geringem Metallgehalt, CaMn und ZnMn, haben nahe den gleichen Atommagnetismus $8{,}2 \cdot 10^{-3}$.

---

1) Der Faktor der Druckzerstörung beträgt für CaBi 1,12, für CaCu 1,05, für SrAg 1,18, für CaMn 1,15, für ZnMn 1,19. Diese Zahlen sind für CaBi den Angaben der Hrn. P. Lenard u. W. Hausser (a. a. O. S. 28), für CaCu und SrAg denen Hrn. Scheifeles entnommen. Für die Mn-Phosphore wurden sie eigens festgestellt.

2) Entnommen den zuverlässigsten, in Landolt-Börnstein aufgeführten Daten.

Es liegt offenbar das Metallatom in gleicher Bindungsart vor in Übereinstimmung mit dem in Abschnitt 4 dargestellten Verhalten der Schwermetallatome gleicher Absorptionskantenserie. Der Atommagnetismus des Mn als Metall ist bedeutend geringer, hingegen ist der *Molekularmagnetismus von MnS von gleicher Größenordnung*, nur etwa um die Hälfte vermindert. Es ist natürlich nicht zu erwarten, daß die Suszeptibilität einzelner MnS-Moleküle, wie sie im Phosphorzentrum vorliegen, mit derjenigen der MnS-Kristallide des reinen Sulfids zusammenfällt, so daß man wohl in der größenordnungsweisen Übereinstimmung beider Werte zusammen mit der Kenntnis der Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität von ZnMn einen Beweis erblicken darf, daß *das Mn in CaMn α und ZnMn α als zweiwertiges MnS eingelagert wird.*

Der ZnMn-Phosphor mit sehr viel Metall (etwa 7$^0/_0$ des Gesamtphosphors) hingegen hat einen erheblich geringeren Atommagnetismus des Schwermetalls, der etwas größer ist als der des reinen Metalls. Das Präparat ist stark rot gefärbt, ganz in der Farbe des reinen Mangansulfids (rotbraune Modifikation), auch leuchtet es nicht mehr bei Erregung mit Eisenlampe. Es scheint danach, daß *mit immer mehr Mn-Zusatz* der Phosphor *schließlich die Suszeptibilität einer höherwertigen Metallsulfidverbindung* annimmt.

Eigenartige Verhältnisse bieten *die Phosphore mit diamagnetischem Schwermetall Cu, Ag und Bi. Ihr Atommagnetismus ist weit größer — um den Faktor 1000 — als der der reinen Metalle* oder als der Molekularmagnetismus ihrer Verbindungen. Die Werte sind sogar *die größten diamagnetischen Atommagnetismen*, die man bis jetzt kennt. Die diamagnetische Suszeptibilität aller bekannten Verbindungen liegt zwischen 10^{-4} und 10^{-7}, eine Verbindung mit der Suszeptibilität 10^{-2} wie hier ist bisher nicht gefunden worden. In diesem starken Diamagnetismus kommt offenbar eine Eigenschaft des isolierten Metallatoms zum Ausdruck, die gerade in der eigenartigen Bindung des Schwermetalls im Phosphorzentrum so deutliche Ausprägung erfahren kann und die vielleicht in einer *Orientierung der einzelnen Metallatome zum äußeren Feld* besteht. Eine solche Orientierung bei diamagnetischen Atomen wird *bei so geringen Metallkonzentrationen* wie im Phosphor am ehesten zum Ausdruck kommen, bei den reinen Metallen und deren Verbindungen wird sie aber infolge der Bindung der Atome im Kristallgitter ganz unterdrückt. Eine Parallele hierzu bieten die Untersuchungen Hrn. A. Glasers[1]) über den *Diamagnetismus verdünnter Gase*, wo auch ein starkes Ansteigen der diamagnetischen Suszeptibilität mit abnehmendem Gasdruck, also mit geringerer Molekülkonzentration, gefunden wurde und dort auch als Orientierungswirkung des äußeren Magnetfeldes erklärt wird. Analog wie für Gase bei Atmosphärendruck ist für Phosphore mit übernormalem Metallgehalt eine vollständige Desorientierung der Atomachsen des Schwermetallatoms im Phosphorzentrum bei angeschaltetem Magnetfeld anzunehmen. Wie aber in Gasen bei niedrigem Druck allmählich eine Orientierung eintritt, so wird man es wohl auch hier bei unternormalen Phosphoren mit einer starken Orientierung der diamagnetischen Metallatome zur Feldrichtung zu tun haben, die bei sehr geringem Metallgehalt zu einer vollständigen Einstellung der Atomhauptachse in Richtung der Magnetkraftlinien führen kann.

Für eine Orientierung des Schwermetallatoms in einem äußeren Feld, die bei geringem Metallgehalt stärker ist, als bei höherem, sprechen auch die Erscheinungen der Ausleuchtung durch elektrische und magnetische Felder.[2])

Eine Erklärung dieser hier für Phosphor gefundene außerordentliche Suszeptibilitätswerte vermag, wie Hr. Glaser bereits hervorhebt, weder die Maxwellsche Theorie noch die Ampèresche Molekulartheorie mit Hinzuziehung der Quantenannahme zu liefern.

Die Zunahme des Diamagnetismus ist am größten bei Bi, dann folgt Ag und schließlich Cu. Bemerkenswert ist, daß der Atommagnetismus des Ag in SrAgβ zu dem des Cu in CaCuα sich nahe so verhält (0,60) wie der Atommagnetismus des Silbers im Metall, zu dem des Cu im reinen Metall (0,52).

Die starke Suszeptibilität des einzelnen Metallatoms erlaubt zwar nicht den hier ins Auge gefaßten Nachweis der Ein-

---

1) A. Glaser, Ann. d. Phys. 75. S. 459. 1924.

2) B. Gudden u. R. Pohl, Zeitschr. f. Phys. 2. S. 192. 1920; F. Schmidt, Ann. d. Phys. 70. S. 162. 1923; E. Rupp, Ann. d. Phys. 75. S. 325. 1924.

lagerung einer Schwermetallverbindung in das Phosphorzentrum unmittelbar durchzuführen, wie es für Mn möglich war. Doch glauben wir in den vorangehenden Abschnitten reichlich Material beigebracht zu haben zu der Annahme, daß auch Cu, Ag und Bi in Form ihrer Sulfidverbindungen in die Phosphorzentren eingebaut sind, zumal der hier gefundene starke Diamagnetismus des einzelnen Atoms nicht mit dieser Auffassung in Widerspruch steht. Um wenigstens bei größeren Metallgehalten zu bestimmten Aussagen über die Bindungsart des Schwermetallatoms zu kommen, wurde ein CaCu-Phosphor mit der 20-fach normalen Metallmenge untersucht. Der Phosphor leuchtet noch schwach momentan im Lichte der β- und α-Bande. Der ihm zukommende Atommagnetismus wurde unter Annahme von $30\,^0/_0$ Verdampfungsverlusten zu $-1{,}9 \cdot 10^{-5}$ bestimmt. Dieser Wert liegt zwischen demjenigen für CuS ($-1{,}5 \cdot 10^{-5}$) und Cu_2S ($-2{,}1 \cdot 10^{-5}$). Aus dieser Übereinstimmung kann man den Schluß ziehen, daß dieser Phosphor CuS in den α-Zentren und Cu_2S in den β-Zentren eingelagert enthält, wie in Abschnitt 4 aus anderen Gründen gefolgert wurde.

Teil 2.

Über den Bau des Phosphorzentrums.

Die im ersten Teil gefundenen Versuchsergebnisse seien hier zusammengefaßt:

Die Zentrenmoleküle des Grundmaterials (–CaS–, –CaO–) sind paramagnetischer als die nicht komplexen Moleküle CaS, CaO. In diese Zentrenmoleküle wird bei der Phosphorbereitung ein teils diamagnetischer (Bi-, Cu- und Ag-Phosphor), teils paramagnetischer (Mn-, Ni-, Sm-Phosphor) Bestandteil eingelagert. Dieser Bestandteil ist bei den Schwefelphosphoren wahrscheinlich mit dem Sulfid des Schwermetalls identisch (bzw. mit dem Oxyd des Schwermetalls in den Sauerstoffphosphoren).

Verschiedenen Banden ein- und desselben Schwermetalls entsprechen verschiedene Sulfidverbindungen dieses Metalls und damit verschiedener Valenzbetätigung des Schwermetallatoms. So liegen vor in den Phosphoren:

CaSCu α — CuS; CaCu β — Cu_2S.
CaSBi α — Bi_2O_3; CaBi β — BiS.
CaSNi α — NiS; CaNi β — Ni_2S_3; CaNi γ — Ni_2S.

Es entspricht den Absorptionskantenserien in der Schmidtschen Benennung:

Art 1: eine dreiwertige Sulfid(Oxyd)verbindung des Schwermetalls
Art 2: eine zweiwertige „ „ „
Art 4: eine einwertige „ „ „

Der dem Gesamtzentrum zukommende Paramagnetismus verschwindet, wenn der Phosphor über die Temperatur seines oberen Momentanzustands erhitzt wird. Das Temperaturverhalten der Suszeptibilität läßt sich im allgemeinen darstellen durch $x = A + B\theta + \frac{C}{\theta}$. Der Summand $\frac{C}{\theta}$ verschwindet bei der Temperatur des oberen Momentanzustands des betreffenden Phosphors.

Bei gutausgebildeten ZnS-Phosphoren verhält sich der erregte Phosphor paramagnetischer als der unerregte.

Für die seltenen Erdphosphore lassen sich quantitative Beziehungen zwischen Suszeptibilität und der Violettverschiebung, bzw. dem Dublettabstand ihrer Emissionslinien feststellen.

Der Atommagnetismus des Mn in CaMn α und ZnMn α mit geringem Metallgehalt ist von derselben Größenordnung wie der des MnS, in Übereinstimmung mit der Zugehörigkeit dieser Phosphore zu Art 2 der Absorptionskantenserien.

Der Atommagnetismus diamagnetischer Metalle (Bi, Cu, Ag) in unternormalen Phosphoren ist weitaus — um das 1000-fache — größer als der Atommagnetismus dieser Metalle im Kristallgitter des reinen Metalls.

Es soll nun versucht werden, aus den experimentellen Ergebnissen heraus Einblicke in den Aufbau des Phosphorzentrums zu erlangen. Dazu ist zunächst zu wissen nötig, was die phänomenologischen Bezeichnungen „Diamagnetismus“ und „Paramagnetismus“ im Bilde eines Atommodells bedeuten. In Übereinstimmung mit bisher bewährten Anschauungen sollen aufgefaßt werden:

Diamagnetismus: Einwirkung eines äußeren Magnetfeldes auf die Elektronenbahnen infolge *Induktionswirkung*, wobei keine oder nur symmetrische Deformationen der Elektronenbahnen entstehen. Eine Orientierung zum äußeren Feld ist nur bei einzelnen isolierten Atomen möglich.

Paramagnetismus: Einwirkung auf (meist schon deformierte) Elektronenbahnen im Atom, wobei Drehmomente auf die Bahnebenen auftreten, die ein nach außen in Erscheinung tretendes *magnetisches Moment* hervorrufen.

Unter Zugrundelegung dieser Anschauungen sei versucht, ein Phosphorzentrum aufzubauen. Im ungeglühten CaS treten gemeinsame Elektronenbahnen nur zwischen einem Ca-Atom und einem S-Atom auf. Wird dieses CaS geglüht, so bilden sich große Molekülkomplexe aus. Zu den Elektronenbahnen zwischen Ca und S (Ca = S) treten außerdem noch Elektronenbahnen zwischen demselben Ca-Atom mit einem anderen S-Atom (S–Ca–S). Die ursprünglichen Elektronenbahnen im Molekül CaS erleiden offenbar bei der Molekülkomplexbildung eine Verzerrung und daraus resultiert ein paramagnetisches Moment des Zentrenmoleküls im geglühten CaS. Wird das geglühte CaS druckzerstört, so gehen die wenig stabilen verzerrten Elektronenbahnen des Zentrenmoleküls wieder in ihre stabilere Lage im CaS-Molekül zurück, der Paramagnetismus nimmt wieder ab in dem Maße wie Zentrenmoleküle zerstört werden.

Nun werde in das Zentrum ein diamagnetischer Bestandteil eingelagert (Bi-, Cu- und Ag-Phosphore). Das paramagnetische Verhalten des Gesamtzentrums bleibt dabei erhalten, während der diamagnetische Bestandteil auch seinerseits seinen Diamagnetismus behält. Dieser Diamagnetismus des Schwermetallatoms ist nun außerordentlich größer als derjenige im Kristallgitter des reinen Metalls. Die Einlagerung des Schwermetallsulfids kann also nur in sehr loser chemischer Bindung (Betätigung von Nebenvalenzen wahrscheinlich des Ca-Atoms) bestehen, wodurch keine erhebliche Deformation der Elektronenbahnen des Zentrums verursacht wird.

Erwärmen des Phosphors wirkt der Ausbildung eines magnetischen Moments der Zentren entgegen infolge der Wärmebewegung der einzelnen Moleküle im Zentrum. Wird schließlich diese Wärmebewegung so stark, daß die chemische Bindung der Metallatome im Zentrum stark gelockert und endlich aufgehoben wird, so wird einesteils das Nachleuchten des Phosphors von immer geringerer Dauer und verschwindet ganz bei der Temperatur des oberen Momentanzustands, anderenteils nimmt der Paramagnetismus der Zentren immer mehr ab und wird unmerklich bei derselben Temperatur des oberen Momentanzustands. Die Deformation der Elektronenbahnen im Zentrum läßt sich so durch Druckzerstörung wie durch Erhitzen über den oberen Momentanzustand wieder rückgängig machen, mit dem Unterschied, daß die Deformation beim Abkühlen des Phosphors sich reversibel wieder zurückbildet, während bei Druckzerstörung erst nach erneutem Glühen des Phosphors wieder Zentren ausgebildet werden. Wird bei der Präparation dem Grundmaterial eine unternormale Metallmenge des diamagnetischen Metalls zugegeben, so bilden sich in der Hauptsache große Zentren ein und derselben Bande des Phosphors, der Hauptbande, aus. Das Metall wird bei Cu und Ag in Form seiner zweiwertigen Sulfidverbindung in Sulfidphosphor eingelagert, bei Bi hingegen als dreiwertiges Bi_2S_3. Der außerordentlich große Atommagnetismus der in dieser Weise gebundenen diamagnetischen Atome überwiegt den Paramagnetismus des Gesamtzentrums und nur unter Heranziehung der Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität kann ein noch vorhandenes paramagnetisches Moment festgestellt werden. Präpariert man den Phosphor mit immer mehr Metall, so treten außer der Hauptbande noch eine Reihe Nebenbanden auf, die anderen Wertigkeitsstufen des Schwermetalls zukommen, so CaBi β einem zweiwertigen BiS, wie aus dem verschiedenen magnetischen Verhalten der α- und β-CaBi-Phosphor folgt. Das dem Gesamtzentrum zukommende paramagnetische Moment nimmt ab in dem Maße wie immer mehr Zentren mittlerer und kleinerer Größe ausgebildet werden; die Zunahme der Zentrenzahl behindert offenbar das einzelne Zentrum in seinem Bestreben, sich zum äußeren Magnetfeld einzustellen. Aus demselben Grunde nimmt auch der Atommagnetismus der einzelnen Metallatome sehr stark mit Zunahme der Metallkonzentration ab und man erhält bei übernormalen Phosphoren wieder Werte für den Atommagnetismus von der Größenordnung des Molekularmagnetismus der für die Phosphorzentren in Betracht kommenden Schwermetallverbindungen.

In ganz entsprechender Weise vollzieht sich der Aufbau eines Phosphorzentrums mit paramagnetischem Metall. Nur addiert sich hier zum paramagnetischen Moment des Gesamtzentrums noch das paramagnetische Moment des einzelnen

Schwermetallmoleküls. Wie aus der Untersuchung des Atommagnetismus für CaMn α und ZnMn α geringen Metallgehalts wahrscheinlich wird, hat man es hierbei mit einer Einlagerung von MnS in die α-Zentren dieser Phosphore zu tun. Der Paramagnetismus dieses eingelagerten MnS bleibt in seiner Größenordnung erhalten, wie aus der ziemlichen Übereinstimmung des Atommagnetismus des Mn dieser Phosphore mit dem Molekularmagnetismus des MnS folgt. Er ist zwar für kleine Metallmengen größer als der Magnetismus des Sulfids, was auf ein stärkeres Richtvermögen der Zentren großer Dauer zum äußeren Magnetfeld schließen läßt, nähert sich aber mit wachsendem Metallgehalt immer mehr dem des Sulfids, wie für ZnMn nachgewiesen. Mit steigendem Metallgehalt werden außer der zweiwertigen Mn-Verbindung noch Sulfide anderer Wertigkeit eingelagert in dem Maße wie die verschiedenen Phosphorbanden in Emission treten, so in CaNi β, Ni_2S_3 und CaNi γ Ni_2S.

Bei ZnS-Phosphoren konnte die bemerkenswerte Erscheinung beobachtet werden, daß Zentren im Zustand der Erregung sich paramagnetischer verhalten als im unerregten Zustand. Wird der Phosphor erregt, so verliert das Metallatom ein Elektron. Die Elektronenbahnen des Metallatoms werden nach dieser Abtrennung eines Elektrons eine gewisse Deformation erleiden und infolge dieser Bahndeformation tritt ein paramagnetischer Moment zum magnetischen Moment des Gesamtzentrums hinzu; das erregte Zentrum ist paramagnetischer geworden. Rückkehr des Elektrons bei der Emission des Phosphorlichtes stellt die ursprüngliche Bahnlage wieder her. Die Deformationen der Elektronenbahnen sind um so größer, je weniger Zentren der Phosphor enthält, denn ein momentan leuchtender ZnMn-Phosphor zeigte keinen Unterschied des magnetischen Verhaltens während intensiver Belichtung und nach Abschalten derselben. Offenbar wird das damit zusammenhängen, daß im Momentanleuchten eines Phosphors das erregte Elektron von seiner Ausgangsbahn nur auf eine weiter außen liegende Bahn gehoben wird, während bei Dauerzentren das erregte Elektron den Elektronenverband des Metallatoms ganz verläßt[1]), wodurch eine längere Zeit währende Deformation der ursprünglichen Elektronenbahnen hervorgerufen wird. Es liegt nahe, den Zustand des erregten Phosphorzentrums mit dem Zustand des erregten Atoms während der Verweilzeit in Analogie zu bringen, so daß hier aus Phosphoreszenzuntersuchungen der Schluß gezogen werden kann: Atome im Zustand der Verweilzeit verhalten sich paramagnetischer als im unerregten Zustand.

---

[1]) P. Lenard, a. a. O. S. 27.

Die bei den seltenen Erdphosphoren gefundenen quantitativen Beziehungen zwischen der Lage der Emissionslinien und der Suszeptibilität lassen bis jetzt noch keine grundlegenden Erklärungen zu. Sie zeigen aber besonders deutlich den engen Zusammenhang zwischen den für die Emission in Betracht kommenden Elektronenbahnen des Sm und der Deformation dieser Bahnen bei Wechsel des Erdalkaliatoms oder des Gattungsatoms. Sie zeigen ferner, daß im Phosphorzentrum Elektronenbahnen ausgebildet sein müssen, die das ganze Zentrum umschließen und daß diese Elektronenbahnen bei der Emission des Phosphors eine Rolle spielen, vielleicht als Endbahnen des aus dem Metallatom ausgelösten Elektrons im Zustand der Erregung. Die von Hrn. Tomaschek[1]) entwickelte Auffassung der Emissionslinien als magnetisch aufgespaltene Multipletts erfährt durch unsere Versuche eine zahlenmäßige Grundlage. In dem Maße wie der Dublettabstand bei Übergang von Ca nach Ba geringer wird, nehmen auch die innermagnetischen Einflüsse auf die Elektronenbahnen ab. Die Elektronenbahnen des Sm in Ca-Phosphor sind also stärker gestört als in Sr- oder gar in Ba-Phosphor. Andererseits wird das magnetische Moment des Sm um so mehr hervortreten, je mehr das als Brückenatom dienende Gattungsatom durch die Zentrenmoleküle selber beeinflußt ist und damit die Elektronenbahnen des Schwermetallatoms deformiert. Dem entspricht die zunehmende Aufspaltung und Violettverschiebung der Emissionslinien der Oxydphosphore gegenüber den Sulfidphosphoren.

Teil 3.

Über das magnetische Moment des Phosphorzentrums.

Zur Bestimmung des magnetischen Moments des Phosphorzentrums muß für einen paramagnetischen Phosphor die den

---

1) S. R. Tomaschek, a. a. O. S. 594.

Phosphorzentren allein zukommende Suszeptibilität in absolutem Maß ermittelt werden und außerdem die Zentrenzahl dieses Phosphors möglichst genau bekannt sein. Die den Phosphorzentren zukommende Suszeptibilität ist dabei gleich der Suszeptibilität des Gesamtphosphors vermindert um die Suszeptibilität des geglühten Grundmaterials.[1] Zur Untersuchung wurden Mn-Phosphore gewählt, deren bei der Präparation zugefügter Metallgehalt genau bestimmt war. Wie aus Fig. 1 zu ersehen, steigt die Suszeptibilität für kleinen Metallgehalt proportional mit dem Metallgehalt an. Die Suszeptibilität ist dabei (vgl. S. 513) Funktion der Zentrendauer; solange nur Zentren großer Dauer in dem Phosphor ausgebildet sind, kann man einen einheitlichen Wert des magnetischen Moments für ein einzelnes Zentrum erwarten. Das Hinzutreten der Zentren kurzer und kürzester Dauer bei größerem Metallgehalt erlaubte nur Messung eines stark vom Metallgehalt abhängigen Mittelwertes des magnetischen Moments aller im Phosphor entwickelter Zentren. Daher wurden solche Phosphore zur Untersuchung ausgewählt, für die der Wert ihrer Suszeptibilität noch im linear ansteigenden Teil von Fig. 1 liegt. Zur Messung gelangten:

ZnSMn 2,0; 10^{-3} g Mn/1 g Phosphor und
$1{,}2 \cdot 10^{-3}$ g Mn/1 g Phosphor.

Die Präparationsverluste wurden nach der oben ausgeführten Methode ermittelt. Beide Phosphore waren aus elektrolytisch gereinigtem Grundmaterial hergestellt, sie zeigten beide im Nachleuchten nahe rein die α-Bande. Das Grundmaterial dieser Phosphore ZnS und CaS, Zusatz 0,05 g Na_2SO_4 + 0,05 g KCl, mußte auch möglichst genau untersucht werden. Es wurde daher in ganz derselben Weise wie die Phosphore hergestellt und im elektrischen Ofen geglüht.

Die Aufgabe ist nun ganz entsprechend wie bei der Bestimmung des Atommagnetismus: Es ist aus einer Differenzmessung der Suszeptibilität von ZnMn bzw. CaS mit ZnS und CaS der absolute Wert der den Mn-α-Zentren dieser Phosphore zukommende Suszeptibilität zu messen und daraus kann das mittlere magnetische Moment eines Phosphorzentrums für die Zentren langer Dauer der Mn-Phosphore berechnet werden.

---

[1] Da für die Messung nur stark magnetische Phosphore in Betracht kommen, mag additives Verhalten der Suszeptibilität weitgehend mit der Wirklichkeit übereinstimmen.

Die Suszeptibilität der Phosphore wurde nach der früheren Methode der Ablenkung im Magnetfeld absolut bestimmt, wobei die bei Messung des Atommagnetismus gefundenen Daten Verwendung fanden.

Die Absolutwerte der spezifischen Suszeptibilität des Grundmaterials betrugen:

ZnS geglüht $-0{,}24 \cdot 10^{-6}$ CaS geglüht $-0{,}19 \cdot 10^{-6}$

und die spezifische Suszeptibilität der Phosphore:

ZnMn α $+0{,}07 \cdot 10^{-6}$ CaMn α $-0{,}05 \cdot 10^{-6}$.

Also der Absolutwert der Suszeptibilität des in die Zentrenmoleküle eingelagerten paramagnetischen Bestandteils für:

ZnMn α $+0{,}31 \cdot 10^{-6}$ CaMn α $+0{,}14 \cdot 10^{-6}$.

Unter der Voraussetzung, daß ein stets vorhandener Diamagnetismus der Moleküle verschwindend klein ist, gegenüber dem Paramagnetismus, ermöglicht die Molekulartheorie des Paramagnetismus zusammen mit der Kenntnis von der Temperaturabhängigkeit desselben die Berechnung des paramagnetischen Moments eines Moleküls:

$$M = \sqrt{3 \theta k x \frac{A}{g} m_H}.$$

Hierbei ist für unseren Fall angewendet: M das magnetische Moment des in die Zentren eingelagerten Schwermetalls, $\frac{x}{g} A m_H$ dessen absoluten Atommagnetismus, A Atomgewicht, g in den Zentren verwertete Gewichtsmenge des Schwermetalls[1], θ absolute Temperatur, k Boltzmannsche Konstante $= 1{,}371 \cdot 10^{-16}$ erg/grad, m_H Masse des Wasserstoffatoms.

Die wirksam verwendete Metallmenge wurde bei Berücksichtigung von 15% Druckzerstörung mit Hilfe der kolorimetrischen Manganbestimmung für ZnMn zu $1{,}2 \cdot 10^{-3}$ g/1 g Phosphor und für CaMn zu $0{,}72 \cdot 10^{-3}$ g/1 g Phosphor gefunden.

---

[1] Ob man hierbei das magnetische Moment unter Zugrundelegung der eingelagerten Mn-Menge oder einer Mn-Verbindung (MnS) berechnet, führt zu gleichen Werten, da stets gilt $A/m = g/G$, m = Molekulargewicht; G = Gewicht einer beliebigen Mn-Verbindung.

Bei der absoluten Temperatur $\theta = 290^0$ ergibt sich hieraus das magnetische Moment eines Zentrums langer Dauer

bei ZnMn α $5{,}16 \cdot 10^{-20}$ cm$^{5/2}$ g$^{1/2}$ sek^{-1}
bei CaMn α $4{,}57 \cdot 10^{-20}$ „ „ „

Diese Werte für zwei so verschiedene Phosphore zeigen bemerkenswerte Übereinstimmung, die wohl darauf zurückzuführen ist, daß in beiden Phosphoren der magnetische Einfluß des Grundmaterials (ZnS und CaS) in den Zentren zurücktritt gegenüber dem Paramagnetismus des wirksamen Mn. Wir nehmen daher den Mittelwert

$$4{,}8 \cdot 10^{-20} \text{ cgs},$$

als das *magnetische Moment eines Mn-Atoms in der zweiwertigen Bindung*, in der es in den Phosphorzentren *der Mn α-Phosphore* vorliegt.

Diese Zahl ist als recht beträchtlich zu bezeichnen; denn als magnetisches Moment des Sauerstoffmoleküls erhält man $0{,}856 \cdot 10^{-20}$ cgs, ferner für MnS $2{,}7 \cdot 10^{-20}$ cgs und schließlich für das besonders stark magnetische Gadoliniumatom in Gadoliniumsulfat $7{,}2 \cdot 10^{-20}$ cgs.[1]

Es fragt sich nun, in welcher Beziehung diese Zahl zur Grundeinheit des Magnetismus steht, als welche das *magnetische Moment einer Dynamide*[2] anzusprechen ist.

Bewegt sich ein Elektron auf einer Kreisbahn vom Radius a mit der Winkelgeschwindigkeit ω, so ist das magnetische Moment dieses rotierenden Elektrons:

$$\mu = \frac{e}{2}\, \omega\, a^2 .$$

Für das magnetische Verhalten eines Atoms kommen mit großer Wahrscheinlichkeit nur seine Valenzdynamiden[3] in Betracht, also seine äußeren Elektronenbahnen.

---

[1] H. R. Woltjer und H. Kammerling-Onnes, Comm. phys. Leiden Nr. 167c. 1923.

[2] P. Lenard, Ann. d. Phys. 12. S. 743. 1903; ferner: Quantitatives über Kathodenstrahlen, Heidelberg 1925. Vorwort und S. 106.

[3] Die Einsicht, daß durchaus nicht alle Dynamiden im Atom am Magnetismus beteiligt sein können, sondern sogar nur wenige — eben in der Hauptsache die Valenzdynamiden — läßt das Weißsche Magneton mit seinen großen Vielfachen als sehr zweifelhaft erscheinen.

Um das magnetische Moment nach obiger Gleichung berechnen zu können, muß man Kenntnis haben über die Radien der betreffenden Elektronenbahnen. Hier versucht die Quantenvorstellung einzugreifen, indem sie die auf spektroskopischen Gebiet bewährte Forderung aufstellt, daß

$$m \omega a^2 = \frac{n h}{2 \pi} \quad (n \text{ eine ganze Zahl})$$

sein soll.[1] Auf diese Weise erhält man für das magnetische Moment einer derart charakterisierten Elektronenbahn

$$\mu = \frac{e}{m} \frac{h}{4 \pi} = 0{,}918 \cdot 10^{-20} \text{ cgs.}$$

Diese Größe auf das Mol bezogen wird *Magneton* genannt.

Man gelangt zu nahe demselben Wert des magnetischen Moments einer Dynamide ohne Zuhilfenahme der Quantenvorstellung, worauf mich Hr. Lenard aufmerksam macht, wenn man ω eliminiert durch Gleichsetzung der Flieh- und Ziehkraft, wodurch

$$\mu = \frac{e e}{2} \sqrt{\frac{a}{m}}$$

wird, und dann als Radius der wirksamen Elektronenbahnen den gewöhnlichen Atomradius der Größenordnung 10^{-8} cm einsetzt, nämlich zu

$$\mu = 1{,}2 \cdot 10^{-20} \text{ cm}^{3/2} \text{ g}^{1/2} \text{ sec}^{-1} .$$

Will man die Zahl der Magnetonen bestimmen, die in dem von uns gefundenen magnetischen Moment $4{,}8 \cdot 10^{-20}$ cgs enthalten sind, so muß eine Annahme eingeführt werden, die die Winkel berücksichtigt, unter dem die magnetischen Achsen der einzelnen Elektronenbahnen zur Richtung des äußeren Magnetfelds sich eingestellt haben.

Die Quantenvorstellung kam auf diesem Wege zur Annahme einer „Richtungsquantelung“. Unter Zugrundelegung dieser Vorstellung (Innere Quantenzahl $\frac{5}{2}$) findet man aus unserem Wert des magnetischen Moments eines Phosphorzentrums, in dem MnS der wirksamste Bestandteil ist,

4,7 Magnetonen.

Bei der bisherigen Unsicherheit in der Annahme der Richtungsquantelung ist auch die einfachste Annahme beliebiger Winkelverteilung der Dynamidenachsen nicht unangebracht, woraus sich ebenfalls rund 5 Magnetonen ergäben.

---

1) A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien. 4. Aufl. S. 643.

Mit der Annahme der Richtungsquantelung berechnet sich für:

zweiwertiges Mn 5 Magnetonen,
dreiwertiges Mn 4 „
einwertiges Mn 6 „

Unser Wert von 4,7 Magnetonen liegt dem des zweiwertigen Mn recht nahe, so daß man hier vielleicht eine Übereinstimmung sehen darf, die aus ganz anderer Grundlage den Schluß bestätigt, daß in die α-Zentren der Phosphore ZnMn und CaMn zweiwertiges Mn eingelagert ist.

Zusammenfassung.

Es werden die Suszeptibilitäten einer Reihe Phosphore mit teils paramagnetischen, teils diamagnetischen Schwermetallatomen gemessen und in Beziehung gebracht zu anderen, den Phosphor charakterisierenden Größen. Dazu gliedert sich die Untersuchung in:

Beziehungen der Suszeptibilität zu: 1. Zentrenmolekül und Phosphorzentrum, 2. Metallgehalt, 3. Phosphoreszenzbande, 4. Temperaturlage des Phosphors, 5. Phosphoreszenz des Eisenatoms, 6. Suszeptibilität bei tiefen Temperaturen, 7. Magnetisches Verhalten der seltenen Erdphosphore, 8. Abhängigkeit der Suszeptibilität von der Magnetfeldstärke, 9. Atommagnetismus des Schwermetallatoms.

Die hauptsächlichsten Ergebnisse sind S. 547 zusammengestellt.

Es wird eine Methode entwickelt zur Messung der Suszeptibilität pulverförmiger Stoffe aus der Wanderungsgeschwindigkeit in reibenden Flüssigkeiten mit und ohne Magnetfeld.

Es werden die Verdampfungsverluste bei der Präparation der Mangan-Phosphore kolorimetrisch ermittelt.

Es wird das magnetische Moment eines einzelnen Phosphorzentrums bestimmt.

Zum Schluß möchte ich Hrn. Geheimrat P. Lenard für mannigfache Förderung und wertvolle Ratschläge auch an dieser Stelle herzlichen Dank aussprechen. Der Notgemeinschaft Deutscher Wissenschaft sei bestens gedankt für den hier benutzten, von ihr dem radiologischen Institut zur Verfügung gestellten Magneten.

Heidelberg, Radiologisches Institut, Juli 1925.

(Eingegangen am 26. Oktober 1925.)

2. *Die Feinstruktur der Balmerlinien*[1]; *von G. Hansen.*

(Hierzu Tafel VI und VII.)

Inhalt. I. Einleitung. — § 1. Problem. — § 2. Die älteren Messungen. — II. Methode und Apparate. — § 3. Lichtquelle. — § 4. Spektroskop. — § 5. Aufzeichnung der Intensitätsverteilung. — § 6. Meßmethode. — III. Fehlerquellen. — § 7. Lichtquelle. — § 8. Lummerplatte. — § 9. Photographische Wiedergabe. — § 10. Messung und Auswertung. — IV. Resultate. — § 11. Gestalt der Intensitätskurve. — § 12. Abstandsmessung. — § 13. Theorie von Sommerfeld-Kramers. — § 14. Prüfung der Theorie durch Variation der Entladungsbedingungen.

I. Einleitung.

§ 1. Problem.

Die Linien der Hauptserie des Wasserstoffs, deren Gesetz von Balmer 1885 als erstes Seriengesetz entdeckt wurde, stellen sich als Doppellinien von sehr geringem Abstand der nahe gleich hellen Komponenten dar. Diese Tatsache wurde zuerst von Michelson 1887 an dem Anfangsglied der Serie, H_α, beobachtet. Michelson schätzte den Abstand der Dublettkomponenten auf $^1/_{60}$ des Abstandes der D-Linien vom Natrium.

Spätere Messungen Michelsons und anderer Autoren ergaben etwas höhere Werte, etwa 0,13 Å.-E. im Mittel. Diese ersten Messungen wurden mit dem Interferometer ausgeführt, die Übereinstimmung zwischen den verschiedenen Ergebnissen war schlecht. Solange aber der Dublettcharakter der Linien theoretisch nicht verständlich war, lag kein besonderes Interesse vor, die Unstimmigkeiten aufzuklären.

Dies änderte sich, als die Sommerfeldsche Theorie der Feinstruktur eine Erklärung für den gefundenen Sachverhalt lieferte und es nun galt, die von der Theorie geforderten Werte für die Größe der Wasserstoffdubletts möglichst genau an der Wirklichkeit zu prüfen. Besonders da die Theorie für den Dublettcharakter der Wasserstofflinien die Abhängigkeit der Elektronenmasse von der Geschwindigkeit als die eigentliche Ursache verantwortlich machte, wurden die Messungen von neuem aufgenommen; es mußte eine Entscheidung zwischen der Abrahamschen Elektrodynamik und der Lorentz-Einsteinschen Relativitätstheorie — in betreff der Massenänderung des Elektrons — auch auf diesem rein spektroskopischen Wege zu erzielen sein; die bis 1916 vorliegenden Messungen waren nicht genügend zuverlässig, um eine solche Entscheidung zu liefern.

---

[1] Zum Teil Jenaer Dissertation.

Trotz der großen Zahl von Untersuchungen, die, ausgeführt nach den verschiedenen Methoden, welche der modernen Spektroskopie zur Verfügung stehen, im Laufe der letzten Jahre (seit 1920) veröffentlicht wurden, konnte die Frage noch immer nicht als geklärt angesehen werden. — Der Dublettabstand der Wasserstofflinien — es wurden von einigen Autoren die ersten fünf Glieder gemessen — ist noch nicht auf 10 Proz. übereinstimmend gesichert. Die Abweichungen der Ergebnisse untereinander sind zum Teil nicht erklärlich, weil die Einzelheiten der Untersuchungen nicht genügend ausführlich beschrieben wurden.

In der vorliegenden Arbeit, welche auf Anregung von Hrn. Prof. K. Försterling unternommen wurde, wird die Feinstruktur der fünf ersten Glieder der Balmerserie untersucht unter möglichster Ausschaltung aller der Fehlerquellen, welche einen großen Teil der bisherigen Messungen gefälscht zu haben scheinen.

Ich lege besonderen Wert darauf, die Apparate und Methoden mit einer Ausführlichkeit zu beschreiben, die einen vollkommenen Einblick in den Gang der Messung gestattet und ein sicheres Urteil über die Zuverlässigkeit der Resultate zuläßt.

§ 2. Die älteren Messungen.

Es befindet sich bei Lau (13) eine ausführliche Kritik der älteren Messungen, ich möchte hier trotzdem auf einige derselben nochmals eingehen, soweit mir nämlich die bezüglich der Bewertung der Resultate bisher vertretene Auffassung nicht ganz zutreffend erscheint.

Michelson und Morley. „On a Method of making the Wave-length of Sodium Light the actual and practical Standard of Length“ (16).

Auf den letzten Zeilen dieser Arbeit befindet sich die Bemerkung, daß bei H_α das Interferenzphänomen im Interferometer bei ungefähr 15000 und 45000 Wellenlängen verschwindet; es sei demnach H_α eine Doppellinie mit einem Komponentenabstand gleich $^1/_{60}$ der Na-Linien. Eine dieser beiden Angaben ist offensichtlich falsch. Bedeuten nämlich die beiden Zahlen 15000 und 45000 tatsächlich Wellenlängen, so erhält man daraus $\Delta\nu = 0{,}508\ \text{cm}^{-1}$, während aus $^1/_{60}$ der D-Linien, also $^6/_{60} = 0{,}10$ Å.-E. folgt:

$$\Delta\nu = 0{,}232\ \text{cm}^{-1}.$$ [1]

H. Ebert. Helligkeit und Interferenz (3).

Ebert bemerkt die Unstimmigkeit in der Michelsonschen Arbeit und sucht vergeblich nach einem Minimum der Sichtbarkeit bei 15000 Wellenlängen. Er findet „als Mittel aus sehr vielen Einstellungen bei Drucken bis zu etwa 14 mm 24500 λ“. Hiernach wäre $\underline{\Delta\nu = 0{,}311.}$ Ferner gibt Ebert seine Extremwerte an, und die daraus berechneten Werte für $\Delta\lambda$. „Aus den beiden extremsten Werten, welche oben für den Gangunterschied des Minimums angegeben sind, würde sich der Unterschied der Wellenlängen der beiden Komponenten zu 0,01322 $\mu\mu$ (bei $\Delta = 24800\ \lambda$ des Minimums) bzw. 0,01328 $\mu\mu$ (bei 24330) also beide Male zu $^1/_{45}$ von demjenigen der beiden Na-Linien ergeben.“ Die Daten 24800 und 24330 finden sich noch an einer anderen Stelle der Arbeit, sind also höchstwahrscheinlich richtig wiedergegeben. Der Wert 0,01328 ist dann aber verdruckt, es muß heißen 0,01348 $\mu\mu$.

Die beiden Grenzwerte sind dann $\Delta\nu$ 0,307 cm^{-1} und 0,313.

A. Michelson, On the Application of Interference Methods to Spectroscopic Measurements (17).

Als Lichtquelle diente hier eine Kapillare bei transversaler Beobachtung. Die Anregung erfolgte durch Funkeninduktor mit schnell laufendem Unterbrecher. Der Druck in der Röhre betrug 1 mm, die Temperatur 50° C(?).

---

[1] Vielleicht ist hier versehentlich als Gangunterschied nur die einfache Verschiebung der Interferometerplatte aus der Nullstellung angegeben, statt der doppelten; dann wäre $\Delta\nu = 0{,}254\ \text{cm}^{-1}$.

Hier wird auf Grund einer genauen Feststellung der Sichtbarkeit der Interferenzen für alle Gangunterschiede mit Hilfe einer analytischen Methode die Intensitätsverteilung der Spektrallinien errechnet. Die Sichtbarkeitskurve für ein symmetrisches Dublett aus zwei homogenen Linien würde eine periodische Kurve von stets gleichbleibender Amplitude sein. Da die Komponenten eine gewisse, im Falle von H_α beträchtliche Breite aufweisen, ist diese Kurve mit einer nach wachsendem Gangunterschied abfallenden Funktion der Form e^{-x} zu multiplizieren. Dadurch werden die Minima der resultierenden Sichtbarkeitskurve nach größeren Gangunterschieden verschoben.[1])

Dies kommt bei den von Michelson wiedergegebenen Kurven deutlich zum Ausdruck. An der gemessenen Sichtbarkeitskurve liegt das erste Minimum bei etwas über 16 mm Plattenabstand, in vollkommener Übereinstimmung mit Ebert (16,2). Das Minimum der punktierten Kurve, die mit Hilfe der errechneten Konstanten konstruiert ist, liegt etwas unter 16, es ist also die Anpassung der Konstanten nicht ganz gelungen. Die Periode der Kurve, wie sie zur Berechnung des Dublettabstandes verwandt wird, ist 30; das Minimum würde also bei unendlich schmalen Dublettkomponenten bei 15 liegen.

Aus der angegebenen Periode ergibt sich hier der ungestörte Dublettabstand zu 0,333 cm^{-1} oder 0,144 Å.-E.

Michelson geht in der zweiten Arbeit auf den ersten Wert mit keinem Wort ein, legt also keinen Wert darauf, die mangelhafte Übereinstimmung aufzuklären. Daher muß man wohl die Angabe von 1887 als durch die bessere Messung überholt betrachten.

---

[1]) Bei den Interferometermessungen können subjektive systematische Fehler nicht in dem Maße auftreten, wie beim Ausmessen eines photographischen Dubletts. Der Schrumpfungseffekt ist jedoch nur dann berücksichtigt, wenn man die Michelsonsche Methode zur Verwertung der Sichtbarkeitskurve verwendet. Die diesbezügliche Bemerkung von E. Lau, Physikal. Ztschr. 25. S. 61. 1924 kann sich nur auf das Fabry-Perôt-Interferometer beziehen, *falls* hier der Ordnungsabstand dem wahren Dublettabstand gleich gemacht wird.

Ch. Fabry und **H. Buisson** (4) benutzten Geisslerröhren „der gewöhnlichen Form“ mit Induktor oder besser Wechselstromantrieb. Die Kapillare wurde quer beobachtet und war in flüssiger Luft gekühlt. H_α konnte ohne Schwierigkeit getrennt gesehen werden. Die langwellige Komponente war die hellere. H_β war nicht als Dublett meßbar. Als Resultat wird angegeben $\Delta\nu = 0{,}307\ \mathrm{cm}^{-1}$, es ist aber nicht zu ersehen, ob der Wert durch Einstellen mit Okularmikrometer oder auf photographischem Wege erhalten wurde.

F. Paschen und **K. W. Meissner** (21).

Die Messung geschah hier gleichfalls mit einem **Perot-Fabry**-Interferometer.[1] „Als Lichtquelle diente ein Geisslerrohr mit Kapillare von etwa 1,5 mm lichter Weite; Füllung: feuchter Wasserstoff; Beobachtung: senkrecht zur Kapillare; Rohr ohne Kühlung; Druck etwa 5 mm; zur Anregung diente ein Induktorium mit Deprezunterbrecher. Bei Verwendung eines Etalons von 3 mm war H_α deutlich in zwei Komponenten zerlegt. Es wurden etwa 5 Aufnahmen gemessen, und das Mittel aus diesen Messungen liegt der **Paschen**schen Angabe $\Delta\nu = 0{,}288$) zugrunde. Die Genauigkeit der Messung von $\Delta\lambda$ ist mit etwa 3 Proz. zu veranschlagen.

Nur die ersten Arbeiten von **Michelson** und **Ebert** wurden mit dem einfachen Interferometer ausgeführt, der Dublettabstand aus der Sichtbarkeitskurve bestimmt.

Zu den übrigen Messungen sei erwähnt, daß der von **A. E. Ruark** (22) angegebene Wert von H_γ aller Wahrscheinlichkeit nach identisch ist mit dem von **Wood** (23).

Was die neuerdings publizierte Messung der Aufnahmen von **Mc Lennan** und **Shrum** durch **Janicki** (9) betrifft, so ist von der Verwertung von Bildern, die nach mehrfacher photographischer Übertragung mit ziemlich grobem Raster als *Positiv* gedruckt wurden, keine erhebliche Genauigkeit zu erwarten, zumal man nicht einmal sicher ist, daß die bei Herstellung des Klischees fast stets angewandte Retusche unterblieb.

---

[1] Ich verdanke diese Angaben einer persönlichen Mitteilung von Hrn. **K. W. Meissner**.

Die bei subjektiver Ausmessung auftretenden Fehlerquellen sind bei **Lau** (13) eingehend behandelt.

Methodisch einwandfrei sind von den bisher vorliegenden Messungen nur die von (5) und (20). Die beiden einzigen vergleichbaren Werte sind also die folgenden:

Oldenberg	$0{,}325 \pm 0{,}02$ cm^{-1},
Gehrcke u. Lau	$0{,}293$ cm^{-1} für H_α.

II. Methode und Apparate.

In der vorliegenden Arbeit wurde der Wasserstoff in einer weiten Entladungsröhre, die in flüssiger Luft gekühlt wurde, durch Gleichstrom zum Leuchten gebracht.

Die Zerlegung des Spektrums geschah mit Hilfe der Lummer-Gehrcke-Platte. Die erhaltenen Aufnahmen wurden mit einem Mikroregistrierphotometer, ähnlich dem von P. P. Koch angegebenen, im Institut ausgewertet.

§ 3. Lichtquelle.

Die *Entladungsröhre* (Fig. 1) bestand aus dem mittleren Teil *M*, der sich in flüssigem Sauerstoff befand und zur Beobachtung diente. Dieser Teil der Röhre besaß eine lichte Weite von 9, später von 7 mm und bestand aus Glas von 0,2—0,3 mm Wandstärke, um eine möglichst gute Wärme-

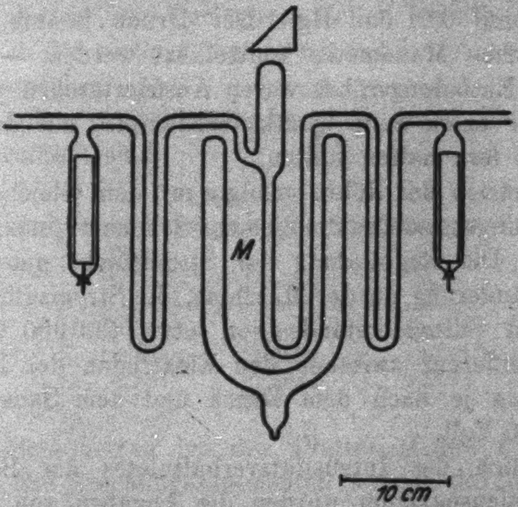


Fig. 1.

leitung zu gewährleisten. Die Längsbeobachtung geschah von oben mit Hilfe eines Reflexionsprismas; die beobachtete Länge der leuchtenden Schicht war 17 cm. Um auch Querbeobachtung zu ermöglichen, war am Dewargefäß ein Streifen unversilbert. Die Zylinderelektroden bestanden aus dünnem Aluminiumblech; um bei Drucken unter 0,04 mm die Entladung aufrechterhalten zu können, erwies sich die Verwendung einer Wehneltglühkathode als notwendig. Die Gesamtlänge des Rohres zwischen den Elektroden betrug 150 cm.

Der Wasserstoff wurde elektrolytisch erzeugt und durchströmte dauernd die Entladungsröhre. Als Strömungswiderstand diente eine Thermometerkapillare von etwa 0,02 mm lichter Weite bei 50 cm Länge. Vor der Kapillare befand sich ein abschließbares Gefäß mit Manometer. Es war also möglich, das Druckgefälle an der Kapillare zu regulieren und dem Wasserstoff in meßbarer Weise Sauerstoff zuzusetzen.

Als Pumpe diente eine rotierende Quecksilberpumpe nach Gaede. Durch Regulierung der Pumpgeschwindigkeit und des Druckes vor der Kapillare ließ sich der Druck in der Entladungsröhre auf mindestens 10 Proz. konstant halten zwischen 0,2 und 0,01 mm Hg. Der Druck konnte an einem Mc Leodschen Manometer kontrolliert werden. — Vor und hinter der Entladungsröhre waren Ausfriertaschen vorgesehen, die auf der einen Seite Quecksilberdämpfe, auf der anderen Fettdämpfe fern halten sollten.

Der Betrieb der Röhre erfolgte mit dem Gleichstrom einer Hochspannungsmaschine von Siemens-Schuckert (max. 5000 Volt, 0,1 Amp.). Die Regulierung der Stromstärke geschah durch Spannungsänderung an der Maschine, die Stromzuführung über Draht- und Silitwiderstände von etwa 200000 Ohm. Die Spannungsdifferenz zwischen den Elektroden der Entladungsröhre betrug je nach dem Druck und dem Sauerstoffzusatz 1200—2000 Volt.

Bezüglich des Intensitätsverhältnisses der Balmerlinien zum Viellinienspektrum wurden die Angaben von Wood (23), Mc Lennan und Shrum (15) bestätigt. Die Glaswand im gekühlten Teil des Rohres wirkt besonders stark katalytisch und verursacht Rekombination der H-Atome. Sorgt man durch Sauerstoffzusatz für Bildung einer Eisschicht an der Rohrwand, so kann die katalytische Wirkung unterdrückt werden. Bei Drucken zwischen etwa 0,01 und 0,2 mm gelang es durch 10—20 Volumproz. Sauerstoff leicht, auch mit Stromstärken von 15 Milliamp. in dem 7 mm weiten Rohr die Farbe der Entladung im gekühlten Teil ebenso rot zu erhalten wie im ungekühlten. Über 0,3 mm aber schien die Eisschicht unter dem Einfluß der Entladung zu verschwinden, so daß einige Sekunden nach dem Einschalten die anfänglich tiefrote Farbe in Weiß umschlug und Schichtung auftrat. (Geschichtete Entladung habe ich nur erhalten, wenn das Viellinienspektrum in merklicher Stärke emittiert wurde.)

§ 4. Spektroskop.

a) Der Abstand der Dublettkomponenten beträgt etwa $^1/_{45000}$ der Wellenlänge der jeweiligen Linie. Da es darauf ankommt, die genaue Form der Intensitätskurve zu erhalten, muß das Auflösungsvermögen des Spektroskops ein Vielfaches von 45000 sein, wenn man zuverlässige Resultate erhalten will. Das Dispersionsgebiet muß so groß sein, daß benachbarte Ordnungen sich nicht mehr beeinflussen können.

Da die Firma Carl Zeiss dem Institut mehrere vorzügliche Planplatten zur Verfügung stellen konnte, wurden die Messungen in der vorliegenden Arbeit mit Lummer-Gehrcke-Platten ausgeführt.

Es wurden drei Platten benutzt, deren Konstanten in Tab. 1 aufgeführt sind.

Tabelle 1.[1])

Bezeichnung	Dicke in mm	*n*		
		$\lambda = 6563$	4861	4341
A	5,002	1,5144	1,5226	1,5270
1	4,954	1,5077	1,5157	1,5201
G	4,984	1,5080	1,5160	1,5205

Die Länge betrug bei den Platten *A* und *1* 17 cm, bei *G* 26 cm. Die Brechungsexponenten wurden durch sorgfältige

---

1) Bei den ersten Messungen (seit November 1923) standen nur die beiden ersten Platten zur Verfügung; Platte *G* wurde erst Februar 1925 fertiggestellt.

Messungen mit dem Refraktometer nach Pulfrich für sechs Wellenlängen festgestellt. Die vierte Stelle ist um 0,2 Einheiten unsicher.

Um die Platten zu prüfen, wurden Aufnahmen von Linien mit Komplexstrukturen, an welchen eine genügende Anzahl von zuverlässigen Messungen vorliegen, hergestellt.

Zunächst wurden die Cd-Linien einer Quarzbogenlampe betrachtet. Es zeigte sich bei keiner der Linien ein Geist, die rote Linie erschien durchaus einfach.

Fig. 2 zeigt Cd 6439 (Platte *G*, Dispersionsgebiet $359 \cdot 10^{-3}$ Å.-E.). Die Halbwertsbreite der Linie beträgt nach dieser Aufnahme $25 \cdot 10^{-3}$ Å.-E. Fig. 3 ist Cd 5086 mit Platte *A*. Der Trabant $+0{,}08$ ist nur in den hohen Ordnungen leidlich getrennt. (Platte *A* hat einen erheblichen Keilfehler, etwa $^1/_2{}''$, so daß nicht alle Ordnungen gleichzeitig scharf werden können, vgl. (6).] Fig. 4 das gleiche mit Platte *G* (Dispersionsgebiet $220 \cdot 10^{-3}$ Å.-E.). Hier ist der Trabant vollsäntdig getrennt. Sein Abstand von der Mitte der Hauptlinie beträgt $78 \cdot 10^{-3}$ Å.-E., seine Halbwertsbreite $14 \cdot 10^{-3}$ Å.-E. Die Hauptlinie zeigt Selbstumkehr, der Trabant auf der kurzwelligen Seite ist kaum zu erkennen. Fig. 5 ist mit geringerer Stromdichte gemacht, hier tritt auch der kurzwellige Trabant gut hervor, die Hauptlinie zeigt keine Verdoppelung mehr.

Die Belichtung war hier relativ schwächer. Die Hauptlinie ist relativ zu den Trabanten erheblich stärker, da sie geringere Selbstumkehr zeigt, der Trabant $+0{,}08$ scheint allerdings auch im Vergleich mit dem anderen Trabanten auf der kurzwelligen Seite an Intensität verloren zu haben, er ist nur ganz schwach zu erkennen.

An der grünen Quecksilberlinie 5461 Å.-E. wurde ebenfalls die von anderen Autoren festgestellte Anordnung der Komponenten beobachtet. Um einen qualitativen Vergleich anzustellen, kreuzte ich Platte *A* mit einer Hilgerschen Platte geringerer Qualität[1]) von 4,5 mm Dicke und stellte eine Aufnahme der blauen Hg-Linie 4359 Å.-E. her. Die aus dem so gewonnenen Punktbild berechneten Trabantenabstände, welche sich über zwei Dispersionsgebiete der einzelnen Platte er-

---

[1]) Die Platte *1*, welche besser ist als *A*, war noch nicht fertiggestellt.

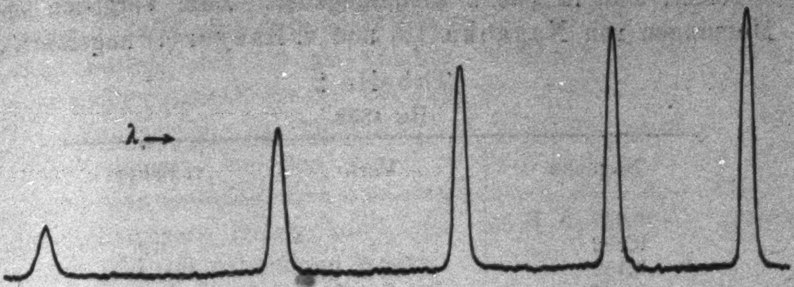


Fig. 2. Cd 6439.

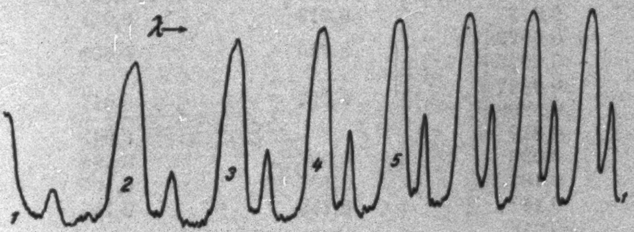


Fig. 3. Cd 5086.

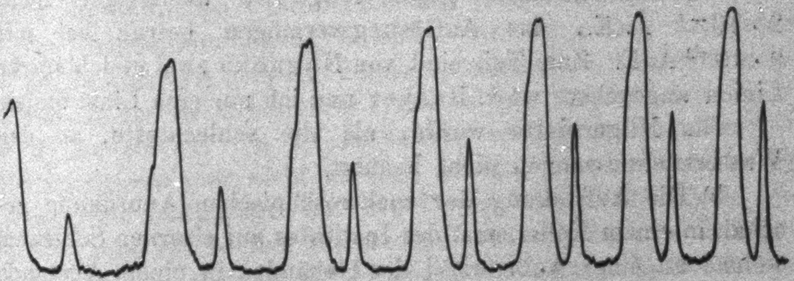


Fig. 4. Cd 5086.

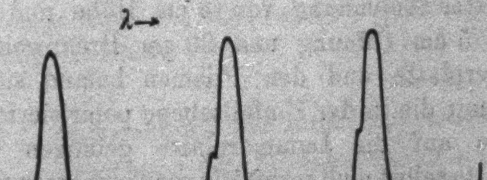


Fig. 5. Cd 5086.

strecken, sind in Tab. 2 wiedergegeben. Zum Vergleich sind Messungen von **Nagaoka** (18) und v. **Baeyer** (1) angeführt.

Tabelle 2.
Hg 4359.

Nagaoka	Verf.	v. Baeyer
+ 0,237 Å.-E.		
0,222		
0,182	0,182 Å.-E.	0,185 Å.-E.
0,157		
0,107	0,107	0,114
0,046	0,044	0,044
0,029	0,027	0,028
0,019	0,019	0,019
+ 0,0029	0,000	0,000
− 0,0029		
0,0087	0,017	0,017
0,0208		
0,047		0,045
0,096	0,096	0,093
0,103	0,107	0,107
0,161	0,159	0,159
0,218		
− 0,239		

Die Abweichungen gegen **Nagaoka** übersteigen nicht $2 \cdot 10^{-3}$ Å.-E., das Auflösungsvermögen betrug bei mir $9 \cdot 10^{-3}$ Å.-E. Zum Teil sind von **Nagaoka** zwei gleich starke Linien angegeben, wo v. **Baeyer** und ich nur eine Linie finden.

Die Hilgerplatte wurde, als die schlechteste, zu den Wasserstoffmessungen nicht benutzt.

b) Die Aufstellung der spektroskopischen Anordnung geschah in einem Kellerraum des Institutes auf eisernen Schienen, welche an einer Außenwand des Gebäudes in einem Abstande von 30 cm und parallel mit ihr befestigt waren. Zur Vorzerlegung diente ein Monochromator mit zwei **Abbeschen** Prismen fester Ablenkung von 4 cm Höhe und einem Kollimator von 5 cm Öffnung und 30 cm Brennweite. Zwischen der Lummerplatte und den Prismen befand sich ein großer Nicol, der nur die in der Einfallsebene polarisierte Komponente des Lichtes auf die Lummerplatte gelangen ließ (6). Die Lummerplatte selbst muß sorgfältig vor Temperaturschwankungen geschützt werden (6). Der Behälter, in dem sich die, im übrigen kreisrunde Platte zur Aufnahme befand, ist ein rundes dosenförmiges Gefäß mit doppeltem Boden und Deckel. Die Seitenwand besteht aus 1,5 mm starkem Messingblech und besitzt zwei rechteckige Öffnungen für Ein- und Austritt des Lichtes Die Lummerplatte ist zwischen vier Filzstücken von je 1 cm Dicke gelagert, wie aus Fig. 6 ersichtlich ist. Boden und Deckel des Gefäßes sind so eingerichtet, daß man Wasser hindurchströmen lassen kann. Es zeigte sich aber, daß es genügt, sie mit ruhendem Wasser zu füllen.

Die Brennweite des Kammerobjektivs wurde so gewählt, daß die Belichtungszeit eine Stunde womöglich nicht überstieg, daß andererseits aber die Breite der Interferenzlinien auf der photographischen Platte unbedingt groß war neben dem Korn der lichtempfindlichen Schicht. Für die ersten drei Linien der Balmerserie gelangte dementsprechend ein Fernrohrobjektiv von 85 cm Brennweite zur Verwendung, während bei H_δ und H_ε ein solches von 50 cm benutzt werden mußte, damit die Expositionsdauer nicht zu lang wurde. Der Abstand der verwerteten Ordnungen auf der Platte betrug im ersten Falle 5—3 mm, im zweiten entsprechend weniger. — Die Einstellung des Kameraauszuges auf größte Schärfe der Interferenzen geschah mit Hilfe der Cd-Linien einer Vakuumbogenlampe. — Die Aufstellung des Spektroskopes war unbedingt erschütterungsfrei, die Temperatur des Raumes hinreichend konstant. Die Hochspannungsmaschine war in einem anderen Raum aufgestellt.

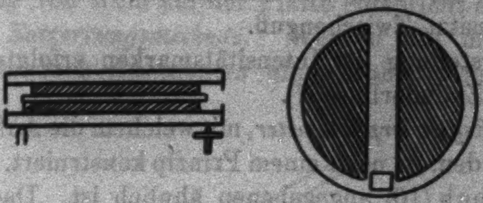


Fig. 6.

§ 5. Aufzeichnung der Intensitätsverteilung.

a) Die *Aufzeichnung* der *Intensitätsverteilung*, wie sie sich in dem Bilde vorfindet, das die spektroskopische Anordnung entwirft, geschah auf dem Wege über die photographische Platte.

Für die blauen und violetten Linien der Balmerserie ist jede Bromsilberplatte sehr empfindlich. Für die rote Linie H_α dagegen muß die Schicht durch Baden in geeigneten Farbstoffen sensibilisiert werden. Es wurden benutzt für H_α: Hauff-Extrarapid in Dicyanin oder Pinachromblau sensibilisiert. Bei manchen Emulsionsnummern waren die Platten auch bei Dicyanin tadellos klar. Agfa-Panchromatisch, Perutz Perchromo B und Panchromatische Rapidplatte besitzen eine ausgezeichnete Empfindlichkeit im Roten bis etwa 7200 Å.-E. und arbeiten einwandfrei klar. Bei Perutz-Panchromatische Rapidplatte traten gelegentlich kleine schwarze Punkte in der Schicht auf, die beim Photometrieren stören können. Perchromo B besitzt Zwischenguß.

Die Herstellung der Intensitätsmarken erfolgte mit Stufenblende und Zylinderlinse (7).

b) Das *Registrierphotometer*, mit welchem die Aufnahmen ausgewertet wurden, ist nach einem Prinzip konstruiert, welches dem von P. P. Koch (10) angegebenen ähnlich ist. Das Instrument wurde nach Angaben von Hrn. Prof. K. Försterling zum Teil in der Institutswerkstatt, zum Teil bei der Firma Carl Zeiss hergestellt. Als Unterbau dient ein Gestell vom Stereokomparator nach Pulfrich. Der einzige prinzipielle Unterschied gegenüber der Kochschen Konstruktion besteht darin, daß an Stelle der sogenannten Kompensationszelle ein Widerstand getreten ist. Diese Zelle vergrößert, wie Koch bereits bemerkt, die Trägheit der Anordnung ganz beträchtlich. Dazu kommt ein anderer Übelstand. Bei jeder Registrierung muß man im allgemeinen den Maximalausschlag des Instrumentes der Schwärzung der betreffenden Platte anpassen. Dies muß bei der Kochschen Schaltung durch Regulierung der Lichtmenge geschehen, welche auf die zweite Zelle fällt. Dadurch verändert man aber gleichzeitig die Einstellungsträgheit. Eine Variation ist aus diesem Grunde praktisch nur in relativ engen Grenzen möglich. Ersetzt man die Zelle aber durch einen Flüssigkeitswiderstand, so geschieht die Einstellung des Maximalausschlages in der einfachsten Weise durch Regulierung der Lampenspannung. Die Helligkeit der Lampe läßt sich ohne besondere Schwierigkeit während der 5 Minuten dauernden Registrierung konstant halten. Als Lichtquelle dient eine 1,5 Wattlampe für 6 Volt. Die Empfindlichkeit des Instrumentes ist so groß, daß bei einem Querschnitt des photometrierenden Lichtbündels von 0,002 mm^2 auf der zu photometrierenden Platte noch starke Schwärzungen ausgewertet werden können. — Das Voltmeter ist ein Einfadenelektrometer nach Wulff mit einem 3 μ Platinfaden von 65 mm Länge, der am unteren Ende an einem Quarzbügel von 10 μ Dicke befestigt ist. Das Instrument wurde in der Institutswerkstatt gebaut. Der Faden wird auf der 6 cm breiten Registrierplatte in 120facher Vergrößerung abgebildet, gleichzeitig läßt sich seine Stellung auch während des Registrierens dauernd auf einer Mattscheibe beobachten. Der Ausschlag von 6 cm auf der Platte entspricht etwa 2 Volt.[1])

c) Die *Entzerrungsmethode.* Werden die mit Lummerplatten gewonnenen Aufnahmen eines Dubletts im Registrierphotometer registriert, so ergeben sich Kurven der Gestalt Fig. 7. Es sind hier die Photometerausschläge P als Funktion der Austrittswinkel ε der Strahlen gegen eine Begrenzungsfläche der Lummerplatte aufgetragen. Entsprechende Punkte an verschiedenen Ordnungen sind durch die Kurven B_1, B_2, B_3, B_4 (Bezugslinien) verbunden (die kurzwelligen Dublettkomponenten durch B_1, die langwelligen durch B_2, die tiefsten Punkte zwischen den Komponenten durch B_3 und die tiefsten Punkte zwischen den Ordnungen durch B_4). Um zu einer unverzerrten Darstellung der Intensitätsverteilungskurve zu ge-

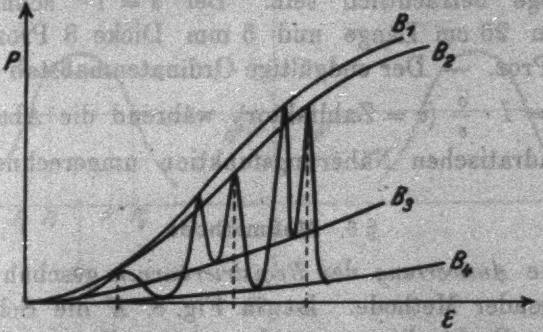


Fig. 7.

---

[1]) Auf Grund der mit dem beschriebenen Instrument gewonnenen Erfahrungen wurde von der Firma Carl Zeiss ein Registrierphotometer konstruiert, das sich jetzt im Handel befindet.

langen, müssen die Photometerkurven so transformiert werden, daß die B-Linien in Parallele zu $P = 0$ übergehen und daß außerdem die Ordnungsabstände, die mit wachsendem ε abnehmen, einander gleich werden. Die Entzerrung wird zunächst mit Hilfe der Intensitätsmarken, welche die Beziehung $P = F(I)$ (I = Intensität) liefern, der Ordinatenmaßstab in I linear gemacht. Die B-Linien bilden nun in erster Näherung ein Geradenbüschel durch den Punkt $P = 0$, da die Intensität der Interferenzstreifen der Winkeldispersion umgekehrt proportional ist und diese in dem benutzten Winkelbereich proportional $1/\varepsilon$ ist. Nur bei genügend langer Lummerplatte, wenn am Ende der Platte kein Licht verloren geht, werden die B-Linien geradlinig verlaufen. Wenn die Ordnungen nahe dem streifenden Austritt benutzt werden sollen, muß die Plattenlänge beträchtlich sein. Bei $\varepsilon = 1^0$ schneidet eine Platte von 26 cm Länge und 5 mm Dicke 3 Proz. ab, bei $1{,}3^0 < 1$ Proz. — Der endgültige Ordinatenmaßstab ergibt sich durch $I' = I \cdot \frac{c}{\varepsilon}$ (c = Zahlfaktor), während die Abszissen mit einer quadratischen Näherungsfunktion umgerechnet werden.

§ 6. Meßmethode.

a) Die *Auswertung* der *Registrierkurven* geschah prinzipiell nach folgender Methode. Ist in Fig. 8 K die Schwärzungskurve einer Spektrallinie, von der wir annehmen, daß die vorhandenen Unsymmetrien allein durch Zufälligkeiten verursacht wurden, so werden parallel zur Abszisse eine Reihe von Linien ($a_1, a_2 \ldots$) gelegt und die Abszissen der Punkte P_1, P_1', P_2, P_2' gemessen. Wenn über eine hinreichend große Anzahl von Punkten das Mittel genommen wird, so ist der resultierende Wert S die Abszisse des Schwerpunktes der von der Kurve umschriebenen Fläche.

Um die Messung möglichst bequem und übersichtlich zu gestalten, wurde die Methode folgendermaßen ausgeführt. In Fig. 8 seien A und B Spiegelbilder an G. Es soll der Abstand des Schwerpunktes S von der Marke M bestimmt werden. Zu diesem Zweck werden die Kurvenbilder parallel zur Abszisse verschoben. Sie werden sich nur dann völlig decken, wenn die Kurve K vollkommen symmetrisch ist. Im anderen

Falle werden sich K und K' in zwei Punkten gleicher Höhe überschneiden. Es ist dann der gesuchte mittlere Abstand dieser beiden Schnittpunkte von M oder M' gleich dem halben Abstande M, M', der sich leicht messen läßt.

Auf diese Weise läßt sich, besonders bei einigermaßen symmetrischen Kurven, die Lage des Schwerpunktes sehr rasch bestimmen, denn es genügt, die Kurven längs eines möglichst langen Stückes zur Deckung zu bringen, um die Lage von S durch *eine* Ablesung zu gewinnen.

Die Ausführung des Verfahrens geschah nun so, daß von der Registrierplatte zwei Kopien auf Diapositivplatten hergestellt wurden. Diese Platten mit den Schichtseiten aufeinandergelegt liefern die beiden Spiegelbilder. In die Gelatineschicht jeder Platte wird eine Linie geritzt, der Abstand der Linien wird gemessen, nachdem zwei korrespondierende Kurvenspitzen zur Deckung gebracht sind.[1])

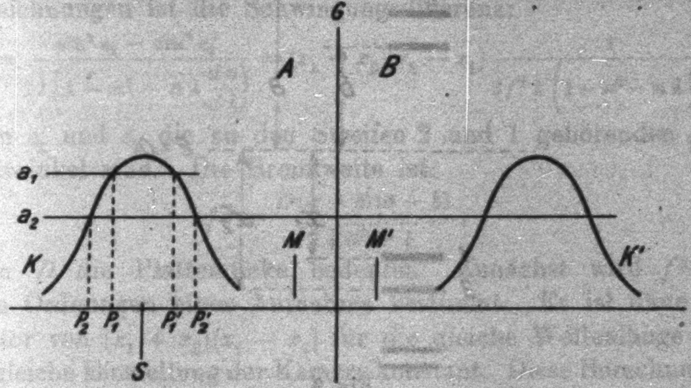


Fig. 8.

---

[1]) Die Platten wurden mit Klammern aneinandergepreßt, so daß die senkrechten und wagerechten Justierlinien, die auf der Wiedergabe der Registrierplatte nich zu erkennen sind, sich genau deckten und dann an der unteren Kante gemeinsam abgeschliffen. Zum Messen wurden dann beide Platten mit den geschliffenen Kanten gegen eine Stahlschiene gelegt, die untere Platte durch Anschläge festgehalten, die obere zur Einstellung verschoben.

Die Messungen wurden mit Hilfe eines Koordinatenmeßapparates nach **Pulfrich** ausgeführt, der mir von der Firma Carl Zeiss zur Verfügung gestellt wurde. Ich möchte besonders Hrn. Prof. **Pulfrich** für die Überlassung des Instrumentes an dieser Stelle herzlich danken.

Die Strichbreite der Registrierkurven betrug in der oberen Hälfte der Dublettkomponenten 0,05 bis 0,08 mm bei einem Komponentenabstand von 10 mm, so daß bei glatten Kurven eine Einstellgenauigkeit von 0,5—1 Proz. erreicht werden konnte.1)

Neben der sicheren Einstellung auf die Maxima bietet dieses Verfahren die Möglichkeit, eine Unsymmetrie der Kurven mit großer Sicherheit zu erkennen. Dies ist von besonderer Bedeutung, da sich an einigen Balmerlinien die eine Komponente als unsymmetrisch erwiesen hat (vgl. Fig. 12, S. 589).

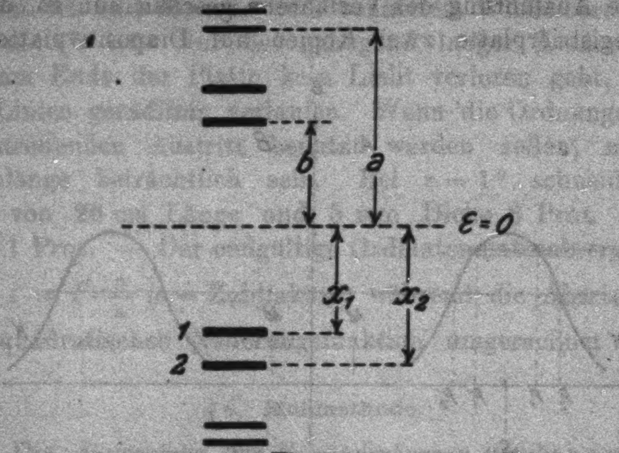


Fig. 9.

b) Die *Umrechnung* der *Schwärzungskurven* auf wahre *Intensitäten* geschah mit Hilfe einer Registrieraufnahme, welche bei gleicher Einstellung des Photometers von den Intensitätsmarken und den dazu gehörenden Interferenzstreifen hergestellt wurde. Die Registrierung geschah hier in natürlicher Größe, es wurden vor und nach den Interferenzstreifen die Marken registriert. Bei der besonderen Wahl der Stufenblende lieferten die Stufen der treppenförmigen Kurve der Intensitätsmarken direkt die Skala der Intensitäten für den Ordinatenmaßstab.

c) Die *Berechnung* der *Dublettabstände* in Wellenzahlen aus den an den Kurven gemessenen Abständen der Ordnungen und Komponenten kann nach zwei verschiedenen Verfahren erfolgen:

---

1) Aus drucktechnischen Gründen mußten in den Figg. 2—5, 11, 12, 17 und Tafel I u. II die Reg.-Kurven nachgezeichnet und verstärkt wiedergegeben werden.

1. durch alleinige Verwendung der gegenseitigen Abstände der Linien auf der photographischen Aufnahme (6).

2. durch Messung der absoluten Winkel, welche die aus der Lummerplatte kommenden Strahlen mit der Plattenebene bilden. Hierzu ist die Kenntnis der Bildweite der Kamera notwendig. Diese Bildweite kann, wenn die verwandte Lummerplatte keine Focaleigenschaft besitzt, der Brennweite des Kameraobjekts gleichgesetzt werden. Wegen der später (S. 588) zu besprechenden Fehler, die hierbei leicht auftreten, ist es besser, nach 1. zu verfahren und die Bildweite aus den Ordnungsabständen zu berechnen. Mit den aus Fig. 9 ersichtlichen Bezeichnungen ist die Schwingungsdifferenz:

$$\Delta\nu = \frac{\sin^2\varepsilon_2 - \sin^2\varepsilon_1}{2\lambda\left(1 - n^2 - n\lambda\frac{dn}{d\lambda}\right)} = (x_1 + x_2)(x_2 - x_1)\frac{1}{2f^2\lambda\left(1 - n^2 - n\lambda\frac{dn}{d\lambda}\right)},$$

wenn ε_2 und ε_1 die zu den Streifen 2 und 1 gehörenden Austrittswinkel sind. Die Brennweite ist:

$$f^2 = \frac{D(a + b)(a - b)}{\lambda\sqrt{n^2 - 1}},$$

wenn D die Plattendicke bedeutet. Zunächst wird f^2 aus allen Ordnungen einer Aufnahme bestimmt. Es ist dann der Faktor von $(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$ für die gleiche Wellenlänge und die gleiche Einstellung der Kamera konstant. Diese Berechnungsweise hat sich als sehr einfach und sicher erwiesen, sie ist im wesentlichen identisch mit der von O. v. **Baeyer** (1) angegebenen.

III. Fehlerquellen.

Bei der mangelhaften Übereinstimmung der von verschiedener Seite gewonnenen Ergebnisse für die Dublettabstände der Balmerlinien ist eine eingehende Untersuchung der möglichen Fehler von besonderer Wichtigkeit. Es sollen im folgenden die Fehlerquellen nur so weit besprochen werden, wie sie im unmittelbaren Zusammenhang mit den in der vorliegenden Arbeit gültigen Versuchsbedingungen einer Diskussion bedürfen.

§ 7. Lichtquelle.

a) Die Komponenten der Wasserstoffdubletts besitzen eine beträchtliche Beute, auch wenn die Entladungsröhre auf 100° abs. abgekühlt wird. Die Halbwertsbreite beträgt auch in günstigen Fällen immer noch $^2/_3$ des Abstandes der Komponenten. Es wird daher die Intensitätsverteilung jeder Komponente durch diejenige der anderen beeinflußt und zwar bewirkt die Überlagerung ein Zusammenrücken der resultierenden Maxima (20). Wenn man voraussetzt, daß die Intensitätsverteilung jeder Komponente einem Gesetz der Form:

$$J = e^{-x^2}$$

folgt, wenn x proportional der Schwingungszahl ist, daß ferner jede Komponente symmetrisch, also tatsächlich einfach ist, so läßt sich der Schrumpfungseffekt leicht berechnen. Die allgemeine Darstellung eines beliebigen Dubletts mit dem wahren Abstand a der ungestörten Einzellinien ist:

$$f(x) = \frac{1}{b_1} e^{-x^2} + \frac{1}{b_2} e^{-(x-a)^2}.$$

b_1/b_2 ist das Intensitätsverhältnis der ungestörten Komponenten. Für ein symmetrisches Dublett vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$f(x) = e^{-x^2} + e^{-(x-a)^2}.$$

Die Verschiebung des Einzelmaximums ist dann in erster Näherung:

$$\Delta = \frac{a}{e^{a^2} + 1 - 2a^2}.$$

Die folgende Tabelle gibt die gesamte Verkleinerung des Dublettabstandes (ausgedrückt in Prozenten des *gemessenen* Abstandes der Maxima) als Funktion der relativen Sattelhöhe für *symmetrische* Dubletts an. Diese ist definiert als $s/m \cdot 100$, wenn s die Sattelhöhe, m die Höhe der Maxima bedeutet.

Tabelle 3.

Rel. Sattelhöhe in %	Korrektion	Rel. Sattelhöhe in %	Korrektion	Rel. Sattelhöhe in %	Korrektion
85	11,6	71	4,1	57	1,45
84	10,6	70	3,8	56	1,35
83	9,8	69	3,6	55	1,25
82	9,1	68	3,4	54	1,15
81	8,4	67	3,1	53	1,10
80	7,7	66	2,9	52	1,0
79	7,1	65	2,7	51	0,95
78	6,6	64	2,5	50	0,90
77	6,2	63	2,3	49	0,8
76	5,8	62	2,1	48	0,75
75	5,4	61	2,0	47	0,7
74	5,0	60	1,85	46	0,6
73	4,7	59	1,70	45	0,55
72	4,4	58	1,55		

Wenn das Dublett unsymmetrisch ist, sind die entsprechenden Verschiebungen der Maxima zu berechnen nach:

$$\varDelta_1 = \frac{a}{b\,e^{a^2} + 1 - 2a^2}\,.$$

$$\varDelta_2 = -\frac{b\,a}{e^{a^2} + b}\,.$$

Die relativen Sattelhöhen, welche bei den verschiedenen Linien der Balmerserie erreicht werden konnten, waren, um ein Beispiel zu geben, für H_α 36 Proz., H_γ 48 Proz., H_ε 65 Proz. Die Messung der Sattelhöhen, auf Grund deren die Korrektion angebracht wurde, geschah mit Hilfe der Intensitätsmarken, welche bei beliebigen Schwärzungen eine einwandfreie Bestimmung gestatten.

b) Gegen die Beobachtung durch dicke Schichten leuchtenden Wasserstoffs läßt sich ein Einwand geltend machen. Es ist denkbar, daß durch Selbstumkehr eine Veränderung der Intensitätsverteilung zustande kommt, wie dies etwa bei Hg-Dampflampen beobachtet werden kann. Eine derartig starke Deformation der Intensitätsverteilung innerhalb einer Spektrallinie kann jedoch nur zustande kommen, wenn durch Unterschiede des Druckes oder der Temperatur innerhalb des beobachteten Gases das Licht auf dem Wege zum Beobachter Schichten durchsetzt, in welchen die Absorptionslinien schärfer sind, als die Emissionslinien in den Schichten, von denen das Licht herkommt. In einer homogenen Schicht leuchtenden Gases ist eine Umkehrung oder eine unsymmetrische Änderung an der Intensitätsverteilung der Spektrallinie auch bei beliebig dicken Schichten nicht zu erwarten.

Bei der Form der benutzten Entladungsröhre, welche, soweit sie zur Beobachtung benutzt wurde, völlig in flüssigen Sauerstoff eingetaucht war, überall den gleichen Querschnitt und die gleiche Wandstärke besaß, ist eine Selbstumkehr der Linien unwahrscheinlich. Daß ein solcher Effekt unter den hier benutzten Versuchsbedingungen nicht in merklichem Maße auftritt, konnte durch Vergleich von Aufnahmen quer und längs zur Rohrachse nachgewiesen werden. Obwohl bei Querbeobachtung das Licht aus der Rohrmitte kommend sicherlich kältere Schichten durchsetzt, konnte kein Unterschied im

Dublettabstand oder der Intensitätsverteilung gegenüber Längsbeobachtung festgestellt werden.

c) Die Aufspaltung der Spektrallinien der wasserstoffähnlichen Spektren im elektrischen Felde ist der Kernladungszahl umgekehrt proportional, daher beim Wasserstoff am größten. Ein elektrisches Feld ist bei der Anregung zur Lichtemission notwendig. Bei der benutzten Anordnung betrug die Feldstärke innerhalb der positiven Säule etwa 10 Volt/cm. Beim Vergleich der Ergebnisse mit der Theorie wird die Wirkung des Feldes besprochen werden.

d) Wie S. 564 bemerkt wurde, tritt die Balmerserie in den Wasserstoffröhren nicht allein auf. Wie störend fremde Linien die Messung beeinflussen können, zeigt die Tatsache, daß McLennan und Lowe (14) eine dritte Komponente feststellten, welche nach Oldenberg (19) sehr wahrscheinlich dem Stickstoff zuzuschreiben war. Da die Dispersion des zur Vorzerlegung dienenden Prismenapparates relativ gering ist, so können noch Linien mit den Interferenzstreifen zusammenfallen, deren Wellenlänge um ein Vielfaches des Dispersionsgebietes von derjenigen der betreffenden Balmerlinie verschieden ist. Fällt eine solche Linie, etwa des zweiten Spektrums, mit einer Dublettkomponente zusammen, aber nicht genau in ihre Mitte, so ist sie von dieser nicht zu trennen, und verursacht eine Verlagerung des Maximums, fälscht also den Dublettabstand. Bei allen meinen Aufnahmen an H_α, H_β und H_γ war die Intensität der Balmerlinien groß neben der des zweiten

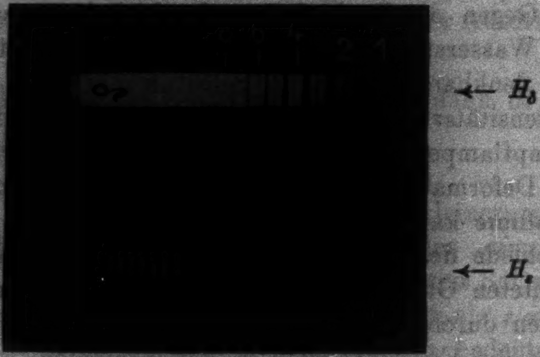


Fig. 10.

Spektrums; bei H_δ und H_ε dagegen ist dies nicht der Fall. Fig. 10 zeigt eine Aufnahme dieser Linien. Man erkennt deutlich die Linien des Viellinienspektrums, besonders zwischen H_ε und H_δ. Bei H_δ halte ich eine Fälschung des Abstandes für unwahrscheinlich, während sie bei H_ε leicht möglich ist.

Bei Aufnahmen mit verschiedenen Lummerplatten muß sich die Wirkung einer fremden Linie zeigen, wenn diese um ein Vielfaches des Dispersionsgebietes von der Balmerlinie entfernt ist; gehören dagegen beide Linien zu derselben Ordnung, so muß sich der gemessene Dublettabstand wie auch das Intensitätsverhältnis der Dublettkomponenten mit der Intensität des zweiten Spektrums ändern.

§ 8. Fehlerquellen bei der Lummerplatte.

a) In der kürzlich in diesen Annalen erschienenen Arbeit des Hrn. van Cittert (2) sind eine Reihe von systematischen Fehlern angeführt, die bei Messungen mit Lummerplatten auftreten können. Es ist daher notwendig, diese Fehlerquellen hier eingehend zu behandeln.

Es ist zunächst S. 373—376 der zitierten Arbeit der Umstand besprochen, daß durch die mangelhafte Auflösungskraft der Lummerplatte, die jede Spektrallinie breiter wiedergibt, als sie von einem idealen Instrument unendlich hohen Auflösungsvermögens gegeben würde, eine verstärkte Verschiebung der Dublettmaxima durch vermehrte Überlagerungswirkung auftreten muß. Abgesehen davon, daß bei dem größten Teil meiner Aufnahmen die Verhältnisse wesentlich günstiger lagen, als in dem Beispiel, das den erwähnten Betrachtungen zugrunde liegt (29 Teilstrahlen statt 15, $\tau = 0{,}918$ statt $0{,}833$), ist der Fehlerquelle nur eine untergeordnete Bedeutung beizumessen, sofern nur auf die normale Oldenbergsche Schrumpfung bei der Verwertung der Aufnahmen Rücksicht genommen wird. Wenn nämlich die vom Spektroskop gelieferte Intensitätsverteilung als richtig angesehen wird, so wird zwar auf eine falsche Halbwertsbreite der Komponenten geschlossen; es wird aber, bei Anbringung der Schrumpfungskorrektion aus der relativen Sattelhöhe, ein wesentlicher Fehler in der Abstandsbestimmung nicht begangen. Bei den Figg. 2 und 3 des Hrn. van Cittert würde nach der resultierenden Intensitätsverteilung entsprechend dem S. 576 meiner Arbeit angegebenen Verfahren bei Fig. 2 eine Korrektion von 1,6 Proz., bei Fig. 3 eine solche von 4,7 Proz. anzubringen sein.

Bei meinen Zahlenwerten ist eine Schrumpfungskorrektion aus später angegebenen Gründen überhaupt nicht angebracht worden. Sie würde bei H_α in keinem Falle 1,5 Proz. übersteigen.

Weitere Fehlerquellen sind denkbar wegen der Abnahme des Reflexionskoeffizienten τ mit wachsendem Winkel der interferierenden Teilstrahlen gegen die Lummerplattenfläche (v. Cittert, S. 377, II). Diese Teilstrahlen haben ja bei der Lummerplatte stets mit wachsendem Gangunterschied abnehmende Intensität; diese Abnahme erfolgt desto langsamer, je kleiner der Ausfallswinkel ist; die Interferenzen werden desto schärfer, je mehr Teilstrahlen wirken und je langsamer die Intensität von Strahl zu Strahl abnimmt. Bei unendlich langer Platte ist die Gesamtintensität, die in jede Ordnung fällt, die gleiche, unabhängig vom Ausfallswinkel; bei kurzen Platten dagegen tritt am Plattenende ein Lichtverlust ein; der nahe dem streifenden Austritt am größten ist, weil bei $\tau \approx 1$ die Intensitätsabnahme der Strahlen langsam erfolgt, also viele Strahlen auftreten. Der Lichtverlust beträgt bei 5 mm Plattendicke, 1,3° Austrittswinkel bei 17 cm Plattenlänge (19 Strahlen) 4 Proz., bei 26 cm (29 Strahlen) < 1 Proz. der Gesamtintensität. (Reflexionskoeffizient $\tau = 0,918$ bei $n = 1,508$). Die Intensität des letzten austretenden Strahles ist 5 Proz. bzw. 0,8 Proz. des ersten. Dieser nach außen abnehmende Lichtverlust würde einen relativen Anstieg der Intensität nach außen bedingen, der eine Verschiebung des Maximums der einzelnen Komponente nach außen zur Folge hätte. Da der Effekt nach außen abnehmen muß, bewirkt er eine *Verengung* des Dubletts. Bei meinen Aufnahmen mit der langen Platte kann der Effekt aber nicht aufgetreten sein, da im allgemeinen von 1,3° bis 2° gemessen wurde, also auch im ungünstigsten Falle der Lichtverlust kleiner als 1 Proz. war.

Eine zweite Wirkung der Abnahme von τ besteht in einer nach außen zunehmenden Unschärfe der Interferenzen (v. Cittert, S. 377, XX I). Wir nehmen an, daß die Lummerplatte so lang ist, daß die Lichtverluste am Ende zu vernachlässigen sind. Wenn dann durch Abnahme von τ die Linien in nach außen zunehmendem Maße verbreitert wiedergegeben werden, so muß sich dies in einer zunehmenden relativen Sattelhöhe äußern. Nehmen wir an, daß sich die verbreiterte Linie noch darstellen läßt durch $e^{-p x^2}$, nur mit größerer Halbwertsbreite, so läßt sich aus der experimentell gefundenen Zunahme der relativen Sattelhöhe die an der einzelnen Linie durch Abnahme von τ bewirkte Unsymmetrie näherungsweise berechnen. Betrachten wir Platte 86 H_α; hier ändert sich S (Sattelhöhe) zwischen zwei Ordnungen um 9 Proz. Sehen wir von Vorgängen in der photographischen Schicht (vornehmlich Lichtdiffusion), welche im gleichen Sinne wirken, ab, so läßt sich die gefundene Änderung verursacht denken durch eine relative Zunahme der Halbwertsbreite $\frac{db}{b} \cdot \frac{1}{A} = 5{,}5$ Proz. (der Ordnungsabstand $A = 7{,}8 \cdot b$; b = Halbwertsbreite) bei einem Dublett von ursprünglich 50 Proz. Sattelhöhe und gleicher Intensität der Komponenten.[1]) Nehmen wir weiterhin an, daß b im Intervall zwischen den beiden Ordnungen linear zunimmt, so ergibt sich $\frac{db}{dx} = 0{,}0083$. Bezeichnen wir als Unsymmetrie $U = 2\frac{b_2 - b_1}{b_2 + b_1}$ (b_1 und b_2 die Halbwertsbreiten der Komponenten zu beiden Seiten ihrer Mittellinie), so wird in unserem Falle $U = 2$ Proz. Eine so geringe Unsymmetrie ist fast immer durch die spontanen Schwärzungsschwankungen in der photographischen Schicht vorhanden. Die an der kurzwelligen Komponente von H_α beobachtete Unsymmetrie beträgt 40 bis 50 Proz., ist also keinesfalls durch die Zunahme von τ zu erklären.

Unter den gleichen Annahmen wie oben läßt sich die Verschiebung abschätzen, die das Maximum einer breiten Einzellinie durch die Zunahme von τ erfährt. Die Intensitätskurve der Linie habe die Gestalt

$$f(x) = h\,e^{-p x^2}; \qquad p = \frac{\ln 2}{b^2}.$$

---

1) Bei einem *Triplett* mit den Komponenten bei 0 (Intensität 0,882), bei $^1/_2$ (Intens. 0,25) und bei 1 (Intens. 1) wird $\frac{1}{A}\frac{db}{b}$ nicht wesentlich anders, nämlich 6,5 Proz. Die Intensitäten der Komponenten sind so gewählt, daß die resultierende Kurve gleich hohe Hauptmaxima und etwa 50 Proz. Sattelhöhe hat. Die Betrachtungen gelten nur angenähert, da die Voraussetzung der e^{-x^2}-Kurven nicht ganz zutrifft.

Es muß bei einer verbreiterten Wiedergabe dèr Linie die Gesamtintensität konstant bleiben:

$$I = h\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-px^2}\,dx = \text{const} = h\cdot b\cdot\sqrt{\frac{\pi}{\ln 2}},$$

so daß folgt:

$$f(x) = \frac{I}{b}\sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{b^2}\ln 2}.$$

Als Verschiebung $d\xi$ des Maximums ergibt sich:

$$\frac{d\xi}{b} = -\frac{\beta}{2\ln 2}; \quad \beta = \frac{db}{dx}.$$

Mit den vorher benutzten Werten folgt $\frac{d\xi}{A} = -8\cdot 10^{-4}$ oder 0,2 Proz. vom Dublettabstand.

Es ist also schon die Verlagerung *eines* Maximums an der Grenze der Meßgenauigkeit, für die Fälschung des Dublettabstandes kommt aber nur die Differenz der Effekte an den beiden Komponenten in Frage.

Platte 86 ist mit 19 Teilstrahlen aufgenommen, ist also ungünstiger als alle späteren Aufnahmen, die mit 29 Strahlen und einer besseren Lummerplatte gewonnen wurden; außerdem war die Belichtung sehr kräftig, so daß photographische Fehlerquellen verstärkt mitwirken.

Betreffs der von Hrn. van Cittert angeführten Fehlerquellen ist nun zu sagen: 1. Verstärkte Schrumpfung durch mangelhafte Auflösung muß, wenn in merklichem Maße vorhanden, durch Gang nachweisbar sein. 2. *Nur* Abnahme von τ bewirkt zu großen Dublettabstand, Effekt nimmt ab, muß also Gang von 1. verstärken. 3. Relative Zunahme der Intensität nach außen ist bei genügend langen Platten nicht möglich; sie würde nach außen *ab*nehmende *Verengung* bewirken. — Die *Unsymmetrie* durch Abnahme von τ ist an der Grenze der Beobachtungsmöglichkeit. Die durch den normalen Intensitätsanstieg nach außen abnehmende Verengung ist leicht zu vermeiden (vgl. S. 586).

b) Bei einer Änderung der Temperatur ändert sich der Brechungsexponent und die Dicke der Lummerplatte. Dies hat eine Verschiebung des gesamten Interferenzstreifensystems zur Folge (6). Es ist also wesentlich, daß die Temperatur der

Planplatten sich während der Versuchsdauer nicht ändert. Durch die große Wärmekapazität des Behälters, in welchem die Lummerplatte sich befand, wurden die Temperaturschwankungen sehr stark verzögert. Die Zimmertemperatur wurde mehrere Stunden vor Beginn der Aufnahme nach Möglichkeit konstant gehalten. Wärmeaustausch durch Konvektion wurde durch Tücher, welche den ganzen Apparat einhüllten, unterdrückt.

Ändert sich trotzdem die Temperatur des Apparates während der Aufnahme, so hat man im allgemeinen eine unsymmetrische Verbreiterung zu erwarten — wenn nämlich die Temperaturänderung nicht gleichmäßig erfolgte oder die Intensität während der Versuchsdauer nicht konstant war — die aber beide Komponenten *gleichmäßig* treffen muß. Eine Änderung des Dublett*abstandes* kann nur dann eintreten, wenn neben der Änderung der Gesamtintensität eine beträchtliche Änderung des Intensitäts*verhältnisses* der Dublettkomponenten einhergeht. Ein solcher Effekt kann bei meinen Aufnahmen nur sehr geringfügig gewesen sein, denn es wurde stets auf Konstanz der Entladungsbedingungen geachtet, so daß eine merkliche Änderung des Intensitätsverhältnisses während einer Aufnahme nicht eintreten konnte.

§ 9. Photographische Wiedergabe.

Bei der *photographischen Wiedergabe* der Intensitätsverteilung sind gleichfalls eine Reihe von Fehlerquellen vorhanden, welche jedoch sämtlich unwirksam gemacht werden können.

a) Bei der *Entwicklung* eines Dublettbildes mit geringer Einsenkung zwischen den Komponenten kann während der Entwicklung durch Konzentrationsgefälle der Entwicklungsflüssigkeit innerhalb der Gelatineschicht, wenn die Aufnahme stark belichtet wurde, vorübergehend die stärkste Schwärzung *nicht* mit den Stellen stärkster Belichtung zusammenfallen (Lau (13) und Gehrcke und Lau (5)). Bei genügend langer Entwicklung müssen sich diese Unterschiede ausgleichen. Ein derartiger Effekt kann auch nur dann auftreten, wenn durch schlechte Trennung der Dublettkomponenten in der unmittelbaren Nähe der schwärzesten Stellen die Schwärzungskurve stark unsymmetrisch verläuft. Da bei den schlechtesten Bildern, welche in der vorliegenden Arbeit Verwendung fanden, die relative Sattelhöhe 70 Proz. beträgt, wird das Auftreten dieser Fehlererscheinung durch ausreichende Entwicklung mit Sicherheit vermieden. Es muß überdies das Vorhandensein des Effektes darin zum Ausdruck kommen, daß die verschiedenen Ordnungen einer Aufnahme, welche stets verschiedene Abstände der Komponenten aufweisen, systematische Unterschiede im Dublettabstand ergeben. Eine derartige Erscheinung konnte in keinem Fall beobachtet werden.

b) Für die richtige Wiedergabe der Intensitätsverteilung durch das Registrierphotometer muß der photometrische Spalt (*pS*), d. h. der Querschnitt des Lichtbündels, welches die zu photometrierende Platte durchsetzt und auf die lichtelektrische Zelle fällt, eine bestimmte Größe besitzen. Ist der *pS* zu klein, so wird das Plattenkorn in der Registrierkurve zum Ausdruck kommen und sich in einer großen Zahl kleiner Zacken und Unregelmäßigkeiten an derselben äußern. Bei den in dieser Arbeit benutzten Platten mußte der *pS* aus der Platte eine Fläche von mindestens 0,1—0,08 qmm ausschneiden, wenn die Wirkung des Kornes unterdrückt werden soll.

Die Breite der *pS* muß so gewählt werden, daß sich innerhalb desselben die Schwärzung auf der zu photometrierenden Platte nur unwesentlich ändert, wenn anders eine unverzerrte Wiedergabe der Schwärzungskurve erfolgen soll. Man erkennt leicht, daß eine beispielsweise rechteckige Intensitätsverteilung mit einem Spalt photometriert, dessen Breite gleich derjenigen der Linie ist, eine Kurve von der Gestalt eines Dreiecks liefert.

Durch zu große Spaltbreite kann auch eine *Verschiebung* des Maximums einer unsymmetrischen Kurve entstehen. — Bei der Registrierung an meinen Platten betrug die Länge des *pS* 2 mm, die Breite 0,05—0,035 mm. An und für sich ist es günstiger, einen längeren Spalt zu verwenden, es ließen sich aber die Interferenzstreifen zum Teil nicht in größerer Länge aufnehmen.

Bei der Photometrierung sind Fehler an der Form der Kurve und der Lage der Maxima zu vermeiden, wenn man dem *pS* die zweckentsprechende Form erteilt.

§ 10. Messung und Auswertung.

Es sind endlich noch die Fehler zu besprechen, welche bei der *Messung* und *Auswertung* der Registrierkurven entstehen können.

a) Da bei jeder Platte mehrere (meist acht) Ordnungen verwertet werden können, so werden sich die Fehler, die durch *Unregelmäßigkeiten der Kurven* und die dadurch bedingte Unsicherheit der Einstellung verursacht sind, in Abweichungen der an einer Platte erhaltenen Werte untereinander äußern. Es ist hier vor allem zu untersuchen, ob *systematische* Fehler zunächst bei der *Einstellung* auf das Maximum denkbar sind.

Bei einer symmetrischen Kurve, die nicht durch Plattenfehler oder andere Störungen deformiert ist, ist die Einstellung vollkommen sicher. Eine Unsicherheit tritt in praxi durch die Unregelmäßigkeiten in der Schwärzung ein, welche jedoch mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf der einen wie auf der anderen Seite des Maximums auftreten können. Wenn die Zahl solcher Störungen an einer Kurve gering ist, so ist es für die Einstellsicherheit nicht von Belang, an welcher Stelle sie auftreten. Ist z. B. die Spitze einer sonst symmetrischen Kurve völlig deformiert, so ist trotzdem die Messung der Schwerpunktsabszisse nach dem S. 573 beschriebenen Verfahren durch eine einzige Einstellung mit unbeeinträchtigter Sicherheit möglich. Anders liegen die Verhältnisse an unsymmetrischen Kurven, an welchen die Lage des Maximums festgestellt werden soll. In einem solchen Falle stimmt die Abszisse des Kurvenschwerpunktes keineswegs mit derjenigen des Maximums überein. Es überdecken sich hier die Spiegelbilder der Kurven nur in dem oberen Teil in unmittelbarer Nachbarschaft der Spitze.

Man müßte, wenn man das früher benutzte Verfahren anwenden will, die Mittellinie der Kurve messen und — wenn dies in der Nähe der Spitze nicht möglich ist — auf das Kurvenmaximum extrapolieren; dazu wäre es aber notwendig, wenn man für die Extrapolation rationelle Gesichtspunkte gewinnen wollte, über die spezielle Form der Kurve gewisse Annahmen zu machen. Dieses Verfahren ist umständlich und verspricht keine zuverlässigen Resultate.

Ich habe mich daher, auch wenn die Kurven stark unsymmetrisch waren, darauf beschränkt, die Spiegelbilder so übereinander zu bringen, daß ihre Maxima zusammenfielen. Wenn in nächster Umgebung der Spitze eine zufällige Deformation den Kurvenverlauf störte, war die Messung mit einer gewissen, unter Umständen beträchtlichen Unsicherheit behaftet. Es gibt hier keine andere Möglichkeit als die einer Wiederholung der betreffenden Aufnahme. Da sich dies aber beliebig oft ausführen läßt, so ist die Störung des Kurvenverlaufes durch spontane Schwärzungsschwankungen in der Plattenschicht praktisch nicht als eine Fehlerquelle zu bezeichnen. Systematische Fehler können auf diesem Wege nicht Eingang in die Messung finden, es wird nur die Sicherheit der Resultate für unsymmetrische Komponenten geringer als für symmetrische.

b) Ein weiterer Fehler ist bedingt durch die Gestalt der B-Linien, die in § 5c erläutert wurde. Es müssen nämlich die Kurvenmaxima im System der B-Linien gemessen werden, nicht, wie es bei dem Überdeckungsverfahren geschieht, in einem rechtwinkligen Parallelkoordinatensystem. Die wirklichen Maxima der Kurven liegen dort, wo die Linien B_1 und B_2 in Fig. 7 die Kurvengipfel berühren.

Bezeichnen wir mit φ_1 und φ_2 die Neigungswinkel von B_1 und B_2 in den Berührungspunkten, mit r_1 und r_2 die Krümmungsradien der Kurvengipfel, so ist der Fehler

$$\Delta = r_1 \sin \varphi_1 - r_2 \sin \varphi_2 .$$

Es ist der Fehler also desto größer, je stärker die Krümmung der B-Linien ist und je mehr sich der Krümmungsradius der Kurvengipfel innerhalb eines Dubletts ändert. Der erste Einfluß ist erheblich nur bei stark geschwärzten Platten, der zweite ist zu vermeiden, wenn man bei flachen Maximis die Ordnungen nahe dem streifenden Austritt fortläßt. Die Fehlerquelle wirkt im Sinne einer nach außen abnehmenden Verengung des Dubletts.

Um eine Vorstellung von der Größenordnung zu geben, sei ein Zahlenbeispiel angeführt. Es ergibt sich für Platte 86 H_α Ordnung 1 (Fig. 11) als Korrektion 3 Proz.; die Ordnung wurde nicht verwertet. Für die zweite Ordnung der gleichen Aufnahme ergibt sich 0,7 Proz. Die Messung der Krümmungsradien der Kurvenspitzen kann nicht einwandfrei erfolgen, es ist nur eine Überschlagsrechnung möglich.

c) Es mag hier noch eine Fehlerquelle erörtert werden, welche bei der Berechnung der Resultate aus den gemessenen Abständen der Komponenten und der Ordnungen auftreten kann, obwohl sie bei den von mir angewendeten Methoden ausgeschlossen war.

Zur Berechnung einer Wellenlängendifferenz zweier Interferenzstreifen kann man sich entweder der Abstände benachbarter Ordnungen oder aber der absoluten Austrittswinkel bedienen, und zwar benötigt man dann nur die zu den beiden zu messenden Streifen gehörenden Winkel. Das letztere Verfahren ist in mancher Hinsicht bequemer, weil mit einem geringeren Aufwand an Rechenarbeit auszuführen. — Die Bestimmung der absoluten Austrittswinkel geschieht in einfacher Weise durch Messung des Abstandes zweier korrespondierender Streifen, welche zu beiden Seiten der Lummerplatte ausgetreten waren und ergibt sich als der halbe Quotient eben dieses Abstandes und der Objektivbrennweite. Diese Berechnung hat zur Voraussetzung, daß die Plattenebene in die Brennebene der Kameralinse fiel. Eine Lummerplatte hat im allgemeinen die Eigenschaft, daß die von ihr erzeugten Interferenzstreifen im Endlichen liegen. Will man sie mit der Kamera scharf abbilden, so muß der Auszug verändert, die photographische Platte aus der Brennebene entfernt werden. Man begeht nun leicht den Fehler, zur Berechnung der Austrittswinkel an die Stelle der Brennweite f die Größe $f + v$ zu setzen, wenn v die Bildverschiebung aus dem Brennpunkt ist. Eine einfache Überlegung zeigt, daß dies nicht zulässig sein kann.

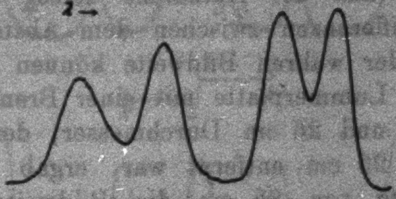


Fig. 11.

Die Abbildung der Interferenzstreifen durch Lummerplatte und Objektiv kann man sich durch folgendes Schema ersetzt denken: die Interferenzstreifen mögen reell im Unendlichen vorhanden sein und durch eine Linse an eben der Stelle abgebildet werden, wo die Lummerplatte sie erzeugte. Diese Linse ist an den Ort der Lummerplatte (etwa ihrer Mitte) zu setzen. Das System Hilfslinse—Objektiv muß nun die Interferenzen abbilden und zwar im gemeinsamen Brennpunkt, als welchen wir nun die Bildebene der Kamera aufzufassen haben. Die Brennweite des Systems, welche zur Berechnung der Austrittswinkel verwandt werden muß, ließe sich aus den Brennweiten von Hilfslinse und Objektiv unter Berücksichtigung ihres gegenseitigen Abstandes gewinnen, wenn dieser Abstand sowohl wie die Brennweite der Lummerplatte nicht unbekannt wären.

Man muß daher die Bildweite bei Lummerplatten mit Focaleigenschaft aus der Aufnahme selbst berechnen (vgl. S. 575). Die Differenzen zwischen dem Abstand Objektiv—Bildebene und der wahren Bildweite können sehr erheblich sein. Bei einer Lummerplatte mit einer Brennweite von ungefähr — 16 m und 26 cm Durchmesser, deren Mitte vom Kameraobjektiv 25 cm entfernt war, ergab sich bei einer Kamerabrennweite von 85 cm die Bildweite zu 87,8 cm, während der Abstand der Bildebene vom Objektiv 89,7 cm betrug. Bei Verwendung dieses Wertes zur Berechnung der absoluten Austrittswinkel würde das Resultat um 4,3 Proz. gefälscht werden. (Die Brennweite geht quadratisch in die Formel zur Berechnung der $\Delta \nu$ ein.)

§ 11. Gestalt der Intensitätsverteilungskurven.

a) *Unsymmetrie* bei H_a.

Die auf Tafel VI in Bild a, b, c wiedergegebenen Registrierkurven von H_a bei verschiedenen Entladungsbedingungen zeigen eine augenfällige Unsymmetrie der kurzwelligen Dublettkomponente im Sinne eines flacheren Abfalles nach langen Wellen. Fig. 12 zeigt, wie deutlich die Unsymmetrie bei Überdeckung der Spiegelbilder in Erscheinung tritt. In Fig. 12a sind die Bilder (*l* und *l'*) einer langwelligen Komponente zur Deckung gebracht; sie sind nahezu vollständig symmetrisch. Bei der kurzwelligen Komponente dagegen laufen die beiden Bilder (*k* und *k'*) unmittelbar unter dem Gipfel weit auseinander. Fig. 13 gibt die wahre Intensitätsverteilungskurve (nach dem § 5c beschriebenen Verfahren errechnet) von Aufnahme 131 H_α wieder.

Die Unsymmetrie wurde bei allen Aufnahmen mit drei verschiedenen Lummerplatten gefunden; sie zeigte sich qualitativ unabhängig von der Dicke der leuchtenden Gasschicht (7—120 mm), von der Stromdichte (0,2—0,04 Amp./qcm), vom Gasdruck (0,2—0,015 mm Hg) und vom Sauerstoffzusatz (0 bis 30 Proz.). Sie ist mithin als reell zu betrachten.

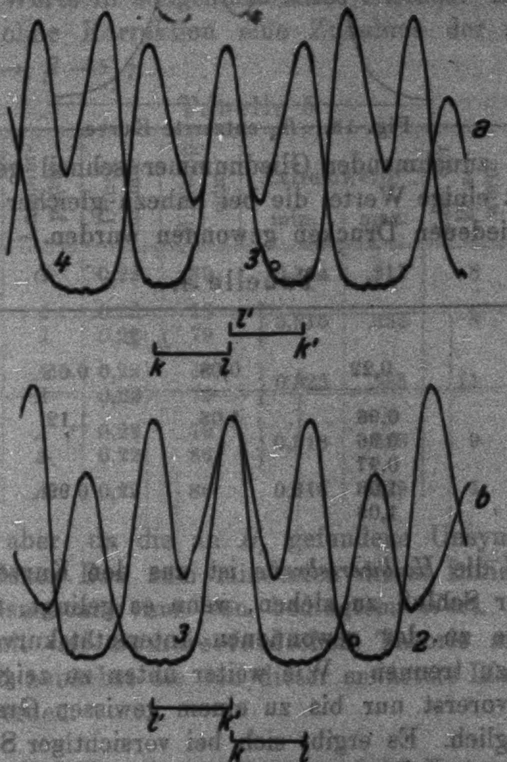


Fig. 12a u. b.

Bei H_β tritt eine Unsymmetrie im gleichen Sinne, aber sehr viel schwächer, bei H_γ kaum merklich auf. Die übrigen Linien zeigen symmetrischen Kurvenverlauf (vgl. Tafel VII).

b) Das *Intensitätsverhältnis* der Dublettkomponenten (I_k = Intensität der kurzwelligen, I_l der langwelligen Komponenten) ist von den Entladungsbedingungen abhängig. Diese Tatsache wurde bereits von Gehrcke und Lau (5) bemerkt. Die Abhängigkeit vom Gasdruck ist stärker als die von der Stromdichte. H_α zeigt die größte Abhängigkeit, die bei den übrigen

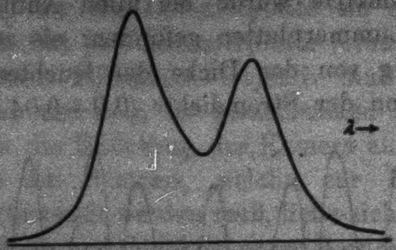


Fig. 13. H_α entzerrte Kurve.

Linien mit zunehmender Gliednummer schnell geringer wird. Tab. 4 gibt einige Werte, die bei nahezu gleicher Stromdichte und verschiedenen Drucken gewonnen wurden.

Tabelle 4.

Druck in mm	I_a/I_i			
	0,22	0,08	0,05	0,015
α	0,96	1,08	1,12	1,29
β	0,96			
γ	0,97			
δ	1,08		0,99	
ε	1,08			

c) Auf die *Halbwertsbreite* ist aus den Kurven erst dann ein sicherer Schluß zu ziehen, wenn es gelingt, alle Komponenten, die zu der gewonnenen Intensitätskurve beitragen, analytisch zu trennen. Wie weiter unten zu zeigen, ist diese Trennung vorerst nur bis zu einem gewissen Grade und nur bei H_α möglich. Es ergibt sich bei vorsichtiger Schätzung an Nr. 131 H_α eine Halbwertsbreite von 0,07 Å.-E. bei Längsbeobachtung und 0,047 Amp./qcm in Wasserstoff mit 20 Volumproz. Sauerstoff; Glasrohr von 7 mm innerem Durchmesser und 0,25 mm Wandstärke in flüssigem Sauerstoff, der unter Atmosphärendruck siedete. Die Temperatur im Rohr aus der Linienbreite unter der Annahme reiner Dopplerverbreiterung ist etwa 230° Kelvin, also 140° über der Temperatur des Bades.

§ 12. Abstandsmessung.

Tab. 5 gibt die Resultate einiger Abstandsmessungen wieder. Die Aufnahmen wurden alle bei nahe dem gleichen

Druck gemacht. Die Stromdichte war aber bei den höheren Gliedern größer, um die Belichtungszeit abzukürzen. Die angegebenen Werte sind in keiner Hinsicht korrigiert, sondern durch unmittelbare Bestimmung des Abstandes der Kurvenmaxima erhalten. Da die Trennung mit wachsender Laufzahl immer schlechter wird, würde die Korrektion des Schrumpfungseffektes die Werte in steigendem Maße erhöhen. Es zeigt sich aber auch ohne Korrektion eine Zunahme der gemessenen $\Delta\nu$ von $\alpha \longrightarrow \beta \longrightarrow \gamma$.

Tabelle 5.

Linie	Nr. der Aufnahme	Lummerplatte	Druck in mm	Milliamp. / qcm	Extremwerte		Zahl der Einzelwerte	Mittel
					min.	max.		
α	123a	*G*	0,23	89	0,314	,317	8	0,316 cm^{-1}
β	67	*1*	0,22	79	0,315	,322	8	0,317
	68	*1*	0,22	79				
γ	78	*A*	0,22	47	0,325	,333	11	0,328
	81	*A*	0,22	79				
δ	80	*A*	0,22	79	0,318	,326	9	0,322
	82	*A*	0,22	86				
ε	82	*A*	0,22	86	0,318	,329	7	0,324

Es ist aber, da die an H_α gefundene Unsymmetrie auf einen komplexen Bau zum mindesten dieser Linie hindeutet, die Abstandsmessung nur von bedingtem Wert. Um einen Vergleich mit der Sommerfeldschen Theorie anstellen zu können, muß zunächst die von dieser erwartete Linienstruktur diskutiert werden.

§ 13. Die Theorie von Sommerfeld-Kramers.

a) Das feldfreie Dublett.

Für die völlig unbeeinflußten Dubletts fordert die Theorie Linienanordnungen, wie sie in Fig. 14 wiedergegeben worden sind. Die Länge der Linien gibt die nach dem Korrespondenzprinzip berechneten Intensitäten an. Die Abstände der Hauptkomponenten sind:

α	0,329 cm^{-1}
β	0,350
γ	0,357
δ	0,360
ε	0,362

Es treten bei allen Balmerlinien nach dem Auswahlprinzip nur drei Komponenten auf, von denen die eine nur sehr geringe Intensität besitzt ($^1/_{125}$ der stärksten bei H_α, $^1/_{53}$ bei H_β).

b) Bei der elektrischen Anregung eines Atoms zum Leuchten sind elektrische Felder vorhanden; einmal der konstante Potentialgradient innerhalb der positiven Säule, in der beobachtet wird, andererseits Felder schnell wechselnder Stärke und Richtung von benachbarten Atomen und Molekülen.

H. A. Kramers (12) hat die Theorie der elektrischen Beeinflussung der Wasserstofflinien für zwei Grenzfälle ausgeführt, nämlich für sehr schwache Felder, wenn die Linienverschiebungen als klein zum gegenseitigen Abstande der Feinstrukturkomponenten aufzufassen sind; die Aufspaltungen sind dem Quadrat der elektrischen Feldstärke und der fünften Potenz der Hauptquantenzahl proportional. Der andere Fall sehr starker Felder, wenn die Aufspaltung groß gegen den Dublettabstand ist, ist mit dem früher von Epstein behandelten identisch. Die *Intensitäten*, mit welchen die Komponenten auftreten sollen, sind von Kramers nach dem Korrespondenzprinzip berechnet worden. Bei sehr starkem Feld stimmt die Theorie hinsichtlich der Anordnung und Intensität der Linien vollkommen mit den Beobachtungen von J. Stark überein, für schwache Felder war eine Prüfung bisher nicht möglich.

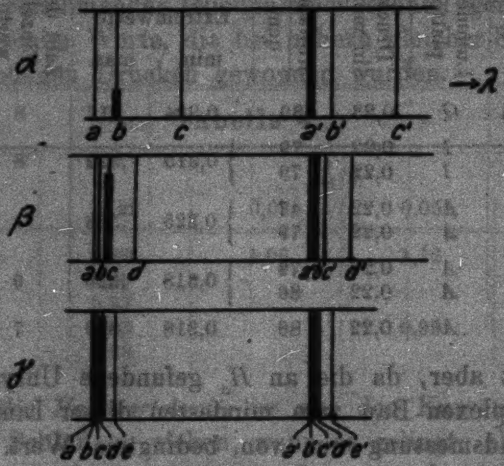


Fig. 14.

c) Um einen Vergleich mit der Theorie anstellen zu können, ist die Kenntnis der *Feldstärken* notwendig, die bei meinen Aufnahmen wirksam waren. Der Potentialgradient in der positiven Säule kann 10 Volt/cm nicht überschritten haben, denn es wurde bei 120 cm Rohrlänge eine Klemmenspannung von 1200 Volt gemessen und an der Kathode ist der Spannungsabfall größer als an anderen Stellen der Röhre. Eine Abschätzung der zwischenmolekularen Störungsfelder ist schwer zu gewinnen. Unter der Annahme, daß nur Wasserstoffmoleküle wirksam sind, liefert die Theorie von Holtsmark(8) 0,5 Volt/cm mittlere Feldstärke. Da die Größe der elektrischen Aufspaltung mit wachsender Hauptquantenzahl zunimmt, kann man aus

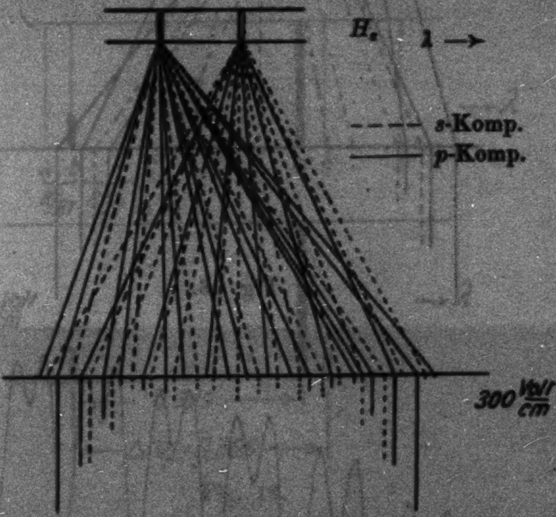


Fig. 15.

dem Aussehen von H_ε, der höchsten beobachteten Linie, eine Abschätzung der maximalen Feldstärke gewinnen. Bei H_ε ist der Fall schwacher Felder bereits bei 3 Volt/cm sicher nicht mehr gültig. Man darf annehmen, daß bei 300 Volt bereits der Fall starker Felder anwendbar ist. Fig. 15 zeigt das Aufspaltungsbild, in Fig. 16 sind der Übersichtlichkeit halber nur die starken Komponenten gezeichnet. Die Interpolation ist zwar nur näherungsweise gültig, sie läßt aber erkennen, daß bei 100 Volt/cm von einem Dublett nichts mehr zu sehen sein kann. Demgegenüber zeigt Fig. 17 bei H_ε noch ein gut getrenntes Dublett, woraus der Schluß zu ziehen ist, daß die wirksame Feldstärke sicher kleiner als 100 Volt/cm war. Die weitere Diskussion wird sich im wesentlichen auf H_α beschränken, da hier die elektrischen Felder am wenigsten Veränderungen bewirken.

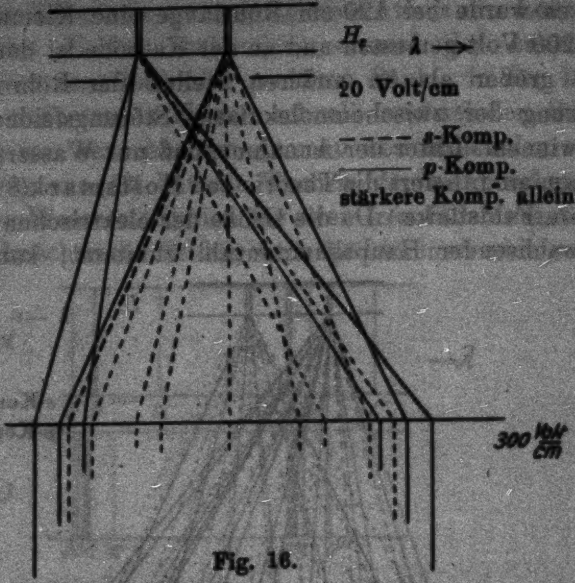

H_α λ →
20 Volt/cm
- - - - s-Komp.
——— p-Komp.
stärkere Komp. allein
300 Volt/cm

Fig. 16.

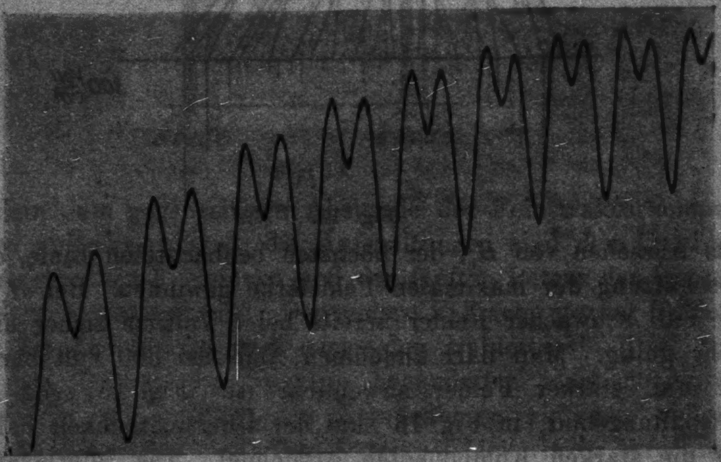


Fig. 17.

Für H_α hat **Kramers** die theoretischen Intensitätsverhältnisse bei 100 Volt/cm angegeben. Es tritt hier bei dieser Feldstärke noch keine Aufspaltung oder Verschiebung der Komponenten ein. Die Wirkung des Feldes äußert sich nur im Auftreten von Komponenten, die im feldfreien Zustande verboten sind und in einer geringfügigen Änderung der Intensitätsverhältnisse an den übrigen Linien (Fig. 18). Zwischen *b* und *a'* liegt um ein Drittel des Abstandes *a'* — *b* von *b* entfernt die im feldfreien Zustande verbotene Komponente *c*. Die an der kurzwelligen Gruppe beobachtete Unsymmetrie läßt sich durch das Auftreten von *c* qualitativ erklären. Die Komponenten *a* und *b'* liegen zu nahe an *b* bzw. *a'*, als daß sie sich bei der bisherigen Breite der Linien bemerkbar machen könnten. Dagegen ist an der Stelle von *c'* eine schwache Unsymmetrie an der beobachteten Kurve zu erkennen. Was aber die Intensitätsverhältnisse besonders der Hauptkomponenten *b* und *a'* betrifft, so stimmt die Theorie nicht mit dem experimentellen Befund überein. Es war ja die kurzwellige Gruppe im allgemeinen stärker, als die langwellige. Dazu ist zu bedenken, daß die Theorie für die hier mitwirkenden zeitlich inkonstanten und räumlich stark inhomogenen Felder nicht gelten muß, besonders soweit es sich um die Abschätzung der Intensitäten handelt.

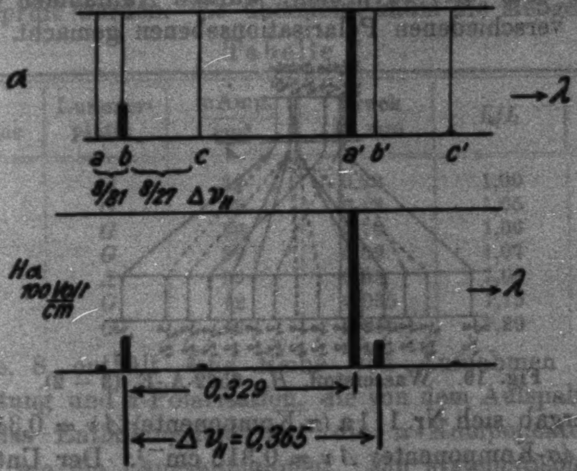


Fig. 18.

Da die zwischenmolekularen Felder vom Gasdruck abhängen müssen, ist es möglich, ihre Stärke zu verändern und so Anhaltspunkte zur Prüfung der Theorie zu gewinnen. — Der Potentialgradient innerhalb der positiven Säule ändert sich nur in geringem Maße mit den Entladungsbedingungen.

§ 14. Prüfung der Theorie durch Variation der Entladungsbedingungen.

a) Fig. 19 zeigt den Starkeffekt an H_α nach **Kramers**. Man erkennt, daß die Komponente *c*, welche die Unsymmetrie bewirken sollte, π-polarisiert ist. Wenn ihr Auftreten wenigstens zum Teil durch den Potentialgradienten innerhalb der positiven Säule bewirkt wird, muß bei Querbeobachtung die Stärke der Unsymmetrie in verschiedenen Polarisationsrichtungen verschieden sein; es muß sich auch im Dublettabstand ein Unterschied zeigen, denn *c* wird das Maximum der kurzwelligen Gruppe je nach den relativen Intensitäten mehr oder weniger verlagern. Um dies zu prüfen, wurden Aufnahmen quer zur Röhre in verschiedenen Polarisationsebenen gemacht.

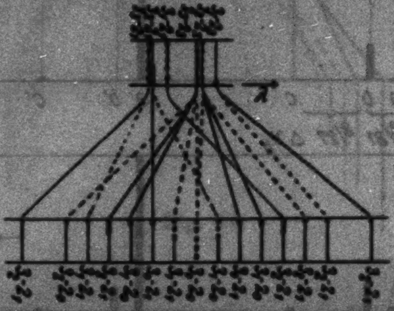


Fig. 19. Wasserstoff, H_α 6562 Å.-E. (3 – 2).

Es ergab sich Nr. 111 a (π-Komponente) $\Delta \nu = 0{,}315$ cm^{-1}; Nr. 111 b (σ-Komponente) $\Delta \nu = 0{,}316$ cm^{-1}. Der Unterschied liegt innerhalb der Fehlergrenzen. Die Stärke der Unsymmetrie ist bei beiden Aufnahmen genau die gleiche. Es hat also der Potentialgradient nur einen unmerklichen Einfluß, die wesentliche elektrische Wirkung geht von den zwischenatomaren Feldern aus.

b) Nachdem so nachgewiesen war, daß die zwischenatomaren Felder ausschlaggebend sind, wurde ihre Wirkung durch Druckänderung in möglichst weiten Grenzen variiert. — Es ist mit wachsender Feldstärke zunehmende Intensität für *c*, besonders aber (nach **Kramers**) für *b'* zu erwarten. *b'* liefert nach Fig. 19 einen Beitrag zu der starken Mittelkomponente im endgültigen Aufspaltungsbilde und ist auch in Fig. 18 bei 100 Volt/cm wesentlich stärker als *c* gezeichnet. Außerdem soll auch *a* etwas stärker als *c* auftreten. Wie sich die Maxima der Dublettgruppen mit steigender Feldstärke verschieben werden, ist nicht vorauszusehen, da die beobachteten Intensitäten nicht genau mit den berechneten übereinstimmen. Die Komponente b' bietet die Möglichkeit, die bisher unerklärliche Druckabhängigkeit des Intensitätsverhältnisses I_k/I_l zu verstehen. Wenn nämlich b' mit wachsender Feldstärke gegenüber den anderen Komponenten schnell an Intensität gewinnt, wird die langwellige Gruppe stärker, I_k/I_l kleiner werden. Tab. 7 zeigt, wie genau I_k/I_l dem Druck folgt. Es zeigt auch $\Delta\nu$ einen regelmäßigen Gang und durchläuft bei $p = 0{,}08$ mm und 0,04 Amp./cm² ein Maximum, das vom theoretischen Wert um -3 Proz. abweicht. Ob der Gang reell ist, konnte noch nicht geprüft werden. Er übersteigt kaum die Meßgenauigkeit.

Tabelle 7.

Nr. d. Aufnahme	Lummerplatte	$\frac{\text{mAmp.}}{\text{cm}^2}$	Druck in mm	I_k/I_l	$\Delta\nu_\parallel$
123 a	*G*	39	0,23	1,00	0,316
123 b	*G*	39	0,13	1,05	0,318
126 a	*G*	39	0,10	1,06	0,319
126 b	*G*	39	0,09	1,07	0,320
124	*A*	39	0,08	1,08	0,319
121	*G*	42	0,035	1,15	0,317
131	*G*	47	0,015	1,29	0,313

Tab. 8 enthält eine Reihe von Aufnahmen in Querbeobachtung und π-Polarisation, die von dem Aufspaltungsbilde durch das Entladungsfeld nur die π-Komponenten zeigen können, wie die Längsaufnahmen. Ein systematischer Unterschied zwischen beiden Beobachtungsrichtungen konnte trotz sorgfältiger Prüfung gerade dieses Punktes nicht mit Sicherheit festgestellt werden. Die Stromdichte war bei Queraufnahmen wesentlich höher als bei Längsaufnahmen, es ist daher I_k/I_l bei gleichem Druck in Tab. 8 kleiner, als in Tab. 7.

Tabelle 8.

Nr. d. Aufnahme	$\frac{\text{mAmp.}}{\text{cm}^2}$	Druck in mm	I_k/I_l	$\Delta\nu_\perp$
119	190	0,08	1,04	0,316
120 b	156	0,04	1,07	0,317
120 a	164	0,02	1,08	0,316

Um ein Urteil über die Zuverlässigkeit der angegebenen Werte zu ermöglichen, sind von einigen Aufnahmen die gemessenen Einzelwerte angeführt (Tab. 9). Am wenigsten zuverlässig von allen Aufnahmen an H_α sind 124 und 131.

Tabelle 9.

Nr. d. Aufn. Beob. Richtg. Druck	123a längs 0,23 mm	123b längs 0,13	126a längs 0,10	126b längs 0,09	124 längs 0,08	131 längs 0,015
Stromdichte	39 $\frac{\text{mAmp.}}{\text{cm}^2}$	39	39	39	39	47
O_2-Zusatz	10 Vol.-Proz.	10	30	0	12	20
Bel. Zeit	30 Min.	30	40	100	30	110
Ordnung	$\Delta\nu$	$\Delta\nu$	$\Delta\nu$	$\Delta\nu$	$\Delta\nu$	$\Delta\nu$
5	0,316	0,319	0,319	0,320	0,324	0,315
4	7	8	21	22	23	2
3	6	7	21	22	20	4
2	4	7	19	21	14	1
2	7	7	18	20	17	5
3	7	9	19	19	17	8
4	7	9	20	20	17	1
5	5	8	—	17	22	4

c) Das eigentliche Ziel der Arbeit, die Bestimmung des Sommerfeldschen $\Delta\nu_H$ wäre nur erreichbar, wenn man die Intensitäten aller sechs Komponenten (Fig. 18) messen könnte. Bei allen bisherigen Arbeiten ist stillschweigend vorausgesetzt worden, daß der gemessene Abstand der Gruppen identisch

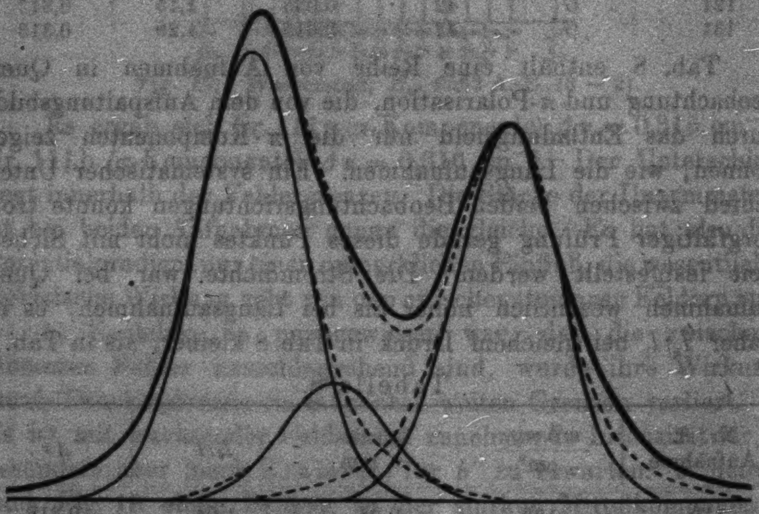


Fig. 20. H_α $\lambda \rightarrow$

sei mit dem Abstand der Komponenten $b\,a'$, die nach der Theorie im feldfreien Zustande allein mit merklicher Intensität auftreten sollen und deren Abstand zu 0,329 erwartet wird.

Es ist sicher nachgewiesen das Auftreten von c durch die Unsymmetrie und sehr wahrscheinlich das von b' durch die Druckabhängigkeit von I_k/I_r. Die Abstände $a\,b$ und $a'\,b'$ sind bei der bisherigen Breite der Linien zu klein, um getrennt werden zu können.

Nimmt man zunächst an, daß die gefundene Intensitätsverteilung hervorgerufen wird durch drei Komponenten, die den theoretischen b, c und a' entsprechen, in den theoretischen Abstandsverhältnissen $b\,c : b\,a' = 1 : 3{,}745$, so lassen sich die Intensitätsverhältnisse aller drei Komponenten und die absoluten Abstände näherungsweise bestimmen (Fig. 20).[1]

Da die Maxima der beiden Liniengruppen des Dubletts durch a und b' nach *außen* verschoben werden, so ist der Abstand von $b\,a'$ jedenfalls kleiner als der gemessene Abstand der resultierenden Maxima — nach Beseitigung der Wirkung von c — und zwar um $11\left(\frac{I_b'}{I_a'+I_b'}+\frac{I_a}{I_a+I_b}\right)$ Prozent von $a'b$ (I_a, I_b, . . . die Intensitäten der entsprechenden Komponenten a, b, . . .). a wird nicht mit erheblicher Intensität erwartet, da sie im endgültigen Starkeffekt nur zwei sehr schwache Komponenten liefert; zur Bestimmung des Intensitätsverhältnisses von a' zu b' fehlt bisher jeder Anhaltspunkt.

---

[1] Es ist in Fig. 20 der Versuch gemacht, die gefundene Intensitätsverteilung (H_α Platte 131, vgl. Taf. VIa, stark ausgezogen) durch Addition dreier e^{-x^2}-Kurven (dünn ausgezogen) in dem Abstandsstandsverhältnis 1 : 3,745 darzustellen (die errechnete Kurve ist stark gestrichelt). Die Intensitäten, die Lage und die Halbwertsbreite der Komponenten wurden so gewählt, daß die errechnete Kurve mit der empirischen die Lage und Höhe der resultierenden Maxima und die Höhe an der Stelle der Komponente c gemeinsam hatte. Gleichzeitig mußten auch die Sattelhöhen übereinstimmen. Da die Lummerplatte den Fuß einer Linie stets verbreitert wiedergibt, war es nicht möglich, die Zerlegung mit reinen e^{-x^2}-Kurven zu erzielen. Es wurde daher der Abfall auf der kurzwelligen Seite als durch keine Komponente gestört angenommen und die hier gefundene Abweichung gegen die e^{-x^2}-Kurve proportional an allen drei Komponenten angebracht (dünn gestrichelt). Das Verfahren ist reichlich unsicher und verspricht erst bei schärferen Linien Erfolg. Es wurde daher nur in einem Falle angewendet, vor allem, um die Verengung des gemessenen Abstandes durch c zu ermitteln. Diese Verengung wurde nach der wiedergegebenen Kurve zu 4 Proz. bestimmt, so daß der Abstand der resultierenden Maxima nach Befreiung von dieser Störung in dem einen Falle 0,326 cm^{-1} wäre. — Außerdem zeigt sich auch auf der langwelligen Seite der Intensitätskurve eine merkliche Abweichung, die durch das Auftreten auch der Komponente c' erklärt werden kann. — Ich möchte an dieser Stelle Frl. cand. phys. A. Schrammen für wertvolle Hilfe bei den beschriebenen Rechnungen meinen Dank aussprechen.

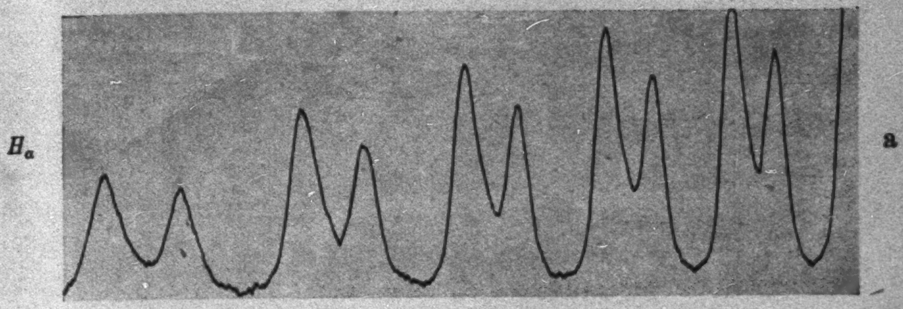
Es ist zu erwarten, daß bei Kühlung mit flüssigem Wasserstoff die Linien schärfer werden, so daß sich $a'b'$ durch eine Unsymmetrie der langwelligen Gruppe werden trennen lassen. — Ich hoffe, mit den Mitteln der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt die Versuche weiter führen zu können.

Wärmsten Dank schulde ich vor allem meinem verehrten Lehrer Hrn. Prof. K. **Försterling**, für stetes Interesse und Bewilligung aller Mittel Hrn. Geh.-Rat M. **Wien**, für wertvolle Anregungen den Herren Prof. H. **Busch** und Prof. G. **Joos**, ferner den Firmen C. Zeiss und Schott u. Gen., ohne deren Unterstützung die Ausführung der Arbeit kaum möglich gewesen wäre.

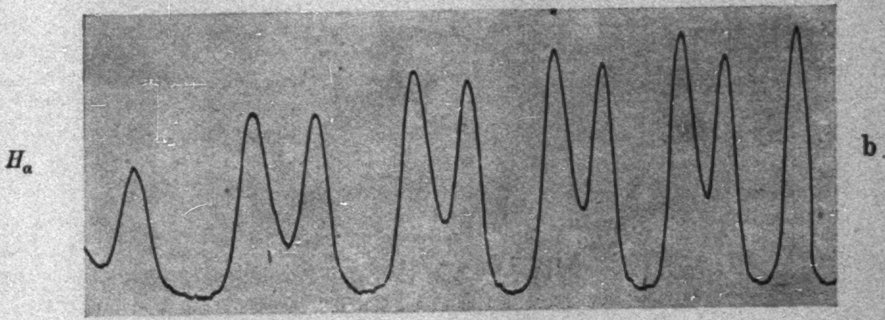
Literaturverzeichnis.

1) O. v. **Baeyer**, Phys. Ztschr. 9. S. 831. 1908.
2) P. H. **van Cittert**, Ann. d. Phys. 77. S. 372. 1925.
3) H. **Ebert**, Wied. Ann. 43. S. 790. 1891.
4) Ch. **Fabry** u. H. **Buisson**, Journ. de Phys. 5. II. S. 454. 1912.
5) E. **Gehrcke** u. E. **Lau**, Ann. d. Phys. 67. S. 388. 1922.
6) G. **Hansen**, Ztschr. f. wiss. Photogr. 23 S. 17. 1924.
7) G. **Hansen**, Ztschr. f. Phys. 29. S. 356. 1924.
8) J. **Holtsmark**, Ann. d. Phys. 58. S 577. 1919.
9) L. **Janicki**, Ann. d. Phys. 76. S. 561. 1925.
10) P. P. **Koch**, Ann. d. Phys. 39. S. 705. 1912.
11) A. H. **Kramers**, Intens. of Spectral Lines. Kopenhagen 1919.
12) A. H. **Kramers**, Ztschr. f. Phys. 3. S. 221. 1920.
13) E. **Lau**, Phys. Ztschr. 25. S. 60. 1924.
14) J. C. **Mc Lennan** u. P. **Lowe**, Proc. Roy. Soc. A. 100. S. 217. 1921.
15) J. C. **Mc Lennan** u. G. M. **Shrum**, Proc. Roy. Soc. A. 105. S. 259. 1924.
16) A. A. **Michelson**, Phil. Mag. (5) 24. S. 466. 1887.
17) A. A. **Michelson**, Phil. Mag. (5) 34. S. 280. 1892.
18) H. **Nagaoka**, Y. **Sugiura** u. **Mishima**, Scient. Pap. of the Inst. of Phys. and Chem. Res. Vol. I. S. 217. 1924.
19) O. **Oldenberg**, Ann. d. Phys. 67. S. 69. 1922.
20) O. **Oldenberg**, Ann. d. Phys. 67. S. 253. 1922.
21) F. **Paschen** u. K. W. **Meissner**, Ann. d. Phys. 50. S. 933. 1916.
22) A. E. **Ruark**, Astroph. Journ. 58. S. 46. 1923.
23) R. W. **Wood**, Phil. Mag. (6) 44. S. 538. 1922.

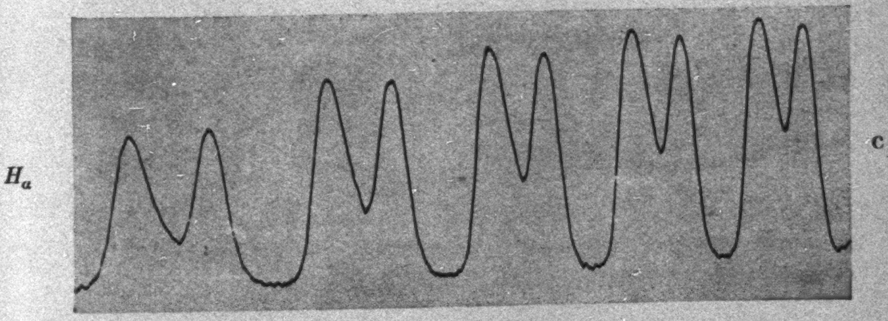
(Eingegangen 27. Oktober 1925.)



Nr. 131.



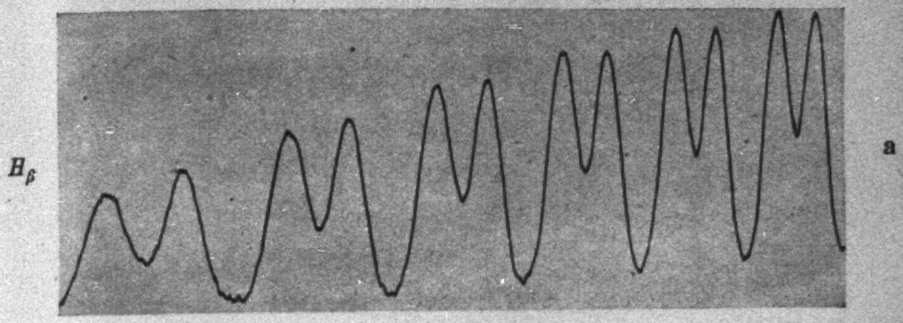
Nr. 106.



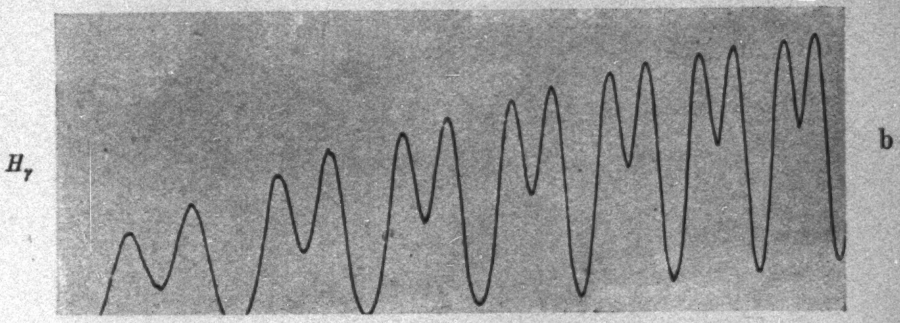
Nr. 126b (oben).

G. Hansen.

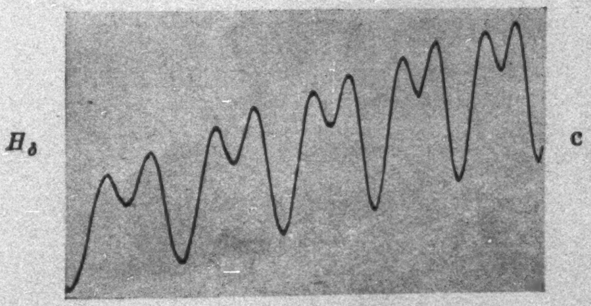
OBERLIN
COLLEGE
LIBRARY



Nr. 133.



Nr. 88.



Nr. 69. λ →

G. Hansen.

1925. № 23.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 78.

1. Über die Stoßdämpfung der Quecksilberresonanzlinie;

von Wilhelm Orthmann.

Einleitung.

Bekanntlich ist eine Spektrallinie niemals absolut scharf, sondern hat immer eine gewisse Intensitätsverteilung J_λ mit einem Maximum J_{λ_0} an einer Stelle λ_0, die man als den Ort der Spektrallinie bezeichnet. Die Breite der Linie wird meist gemessen durch ihre sogenannte Halbwertbreite. Hierunter versteht man den Abstand derjenigen Stelle in der Skala der Wellenlängen oder Schwingungszahlen, an der die Intensität auf die Hälfte der maximalen gesunken ist, vom Ort des Intensitätsmaximums. Für die Breite einer Spektrallinie, die von einer sehr dünnen leuchtenden Schicht emittiert wird, werden die folgenden 5 Ursachen angegeben1):

1. Der Dopplereffekt,
2. die Strahlungsdämpfung,
3. die Lorentzsche Stoßdämpfung,
4. die zwischenmolekularen Felder,
5. die von den Gasmolekülen hervorgebrachten Störungen der stationären Bahnen.

Hat die emittierende Schicht eine endliche Dicke, so kann dadurch ebenfalls die Intensitätsverteilung der Linie beeinflußt werden.

Betrachtet man statt der Emissionslinie die Absorptionslinie, so muß der Absorptionskoeffizient für eine sehr dünne Schicht dieselbe Abhängigkeit von der Wellenlänge zeigen wie die Intensität der Emissionslinie, wenn in beiden Fällen dieselben verbreiternden Ursachen auftreten, da das Verhältnis beider innerhalb der Linie konstant sein muß.

Von den obigen Ursachen ist der Dopplereffekt und die Strahlungsdämpfung stets vorhanden. Sie lassen sich, von

---

1) Vgl. z. B. J. Holtsmark u. Trumpy, Ztschr. f. Phys. 31. S. 803. 1925.

den übrigen getrennt, nachweisen, wenn man die Dichte des Gases genügend klein wählt. Die durch den Dopplereffekt verursachte Intensitätsverteilung ist nach **Lord Rayleigh**[1]) gegeben durch:

$$J_\lambda = J_{\lambda_0} \cdot e^{-\ln 2 \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\Delta \lambda}\right)^2}.$$

Hier ist die Halbwertbreite:

$$\Delta \lambda = 3{,}581 \cdot 10^{-7} \cdot \lambda_0 \cdot \sqrt{\frac{T}{m}},$$

wenn λ_0 die Wellenlänge der betrachteten Linie, T die absolute Temperatur und m das Molekulargewicht des Gases bedeutet.

Die Strahlungsdämpfung liefert eine Intensitätsverteilung

$$J_\lambda = \frac{J_{\lambda_0}}{1 + \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\Delta \lambda}\right)^2}$$

mit der Halbwertbreite

$$\Delta \lambda \approx 0{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{Å},$$

unabhängig von der Wellenlänge der Linie und dem betrachteten Gas.[2]) Da z. B. bei der Resonanzlinie 2536,7 Å des Quecksilberdampfes bei 20° die Dopplerbreite $1{,}10 \cdot 10^{-3}$ Å beträgt, wird sich die Strahlungsdämpfung ihres geringen Betrages wegen kaum nachweisen lassen, zumal sich ihre Breite nicht einfach zur Dopplerbreite hinzuaddiert, sondern ihr Einfluß, wie aus späteren Rechnungen hervorgeht, noch wesentlich geringer ist.

Dagegen geht aus Messungen von **Malinowski**[3]) hervor, daß die gemessene Breite der Quecksilberresonanzlinie recht gut mit der theoretischen Dopplerbreite übereinstimmt. Ferner hat **Rump**[4]) nachgewiesen, daß die Breite dieser Linie zunimmt, wenn die Geschwindigkeit der strahlenden Atome durch Temperaturerhöhung vergrößert wird.

Die letzten drei Ursachen der Linienverbreiterung kommen nur in Betracht, wenn man das Gas bei größeren Dichten untersucht oder ihm andere Gase beimischt.

---

[1]) **Lord Rayleigh**, Phil. Mag. (5) **27**. S. 298. 1889.

[2]) **W. C. Mandersloot**, Jahrb. d. Radioakt. **13**. S. 10. 1916.

[3]) **A. v. Malinowski**, Ann. d. Phys. **44**. S. 935. 1914.

[4]) **W. Rump**, Ztschr. f. Phys. **29**. S. 196. 1924.

Nach der Theorie von **Lorentz**[1]) wird der Strahlungs- oder Absorptionsprozeß eines Elektrons durch einen Zusammenstoß mit einem anderen Molekül unterbrochen. Diese Unterbrechung liefert nach dem **Fourierschen** Theorem eine Verbreiterung der Linie. Ihre Halbwertbreite ist durch

$$\Delta\nu = \frac{1}{2\pi\tau_0}$$

gegeben, wenn τ_0 die mittlere Zeit zwischen zwei Zusammenstößen und ν die Schwingungszahl pro Sek. ist. Die älteren Messungen haben ergeben, daß die Stoßzahl, die man annehmen muß, um die Verbreiterung zu erklären, die sogenannte „optische Stoßzahl", 18 bis 32 mal größer ist als die gaskinetische Stoßzahl.[2]) Will man diese Theorie von **Lorentz** in die Sprache der Quantentheorie übersetzen, so muß man den Anschauungen von **Bohr, Kramers** und **Slater**[3]) folgen. Hiernach muß man zur Berechnung der optischen Stoßzahl für das absorbierende oder emittierende Atom den Radius der angeregten Bahn einsetzen, wodurch die Stoßzahl wesentlich größer wird als die gaskinetische.

Die Vermutung, daß die zwischenmolekularen Felder Grund zu einer Spektrallinienverbreiterung geben, ist zuerst von **Stark**[4]) ausgesprochen worden auf Grund der Tatsache, daß diffuse Linien meist einen beträchtlichen Starkeffekt zeigen. **Holtsmark**[5]) hat dann die Linienverbreiterung berechnet, unter der Annahme, daß die elektrischen Felder der umgebenden Moleküle genügend räumlich und zeitlich konstant sind, um den in konstanten Feldern gefundenen Starkeffekt zu erzeugen. In einer neueren Arbeit weist er gemeinsam mit **Trumpy**[6]) für einige Linien, die eine große Aufspaltung im elektrischen Felde zeigen, die Übereinstimmung seiner Theorie mit der Erfahrung nach.

---

1) **H. A. Lorentz**, Theorie of Electrons, S. 141. 309. 1916.

2) Z. B.: **Chr. Füchtbauer** und **W. Hofmann**, Ann. d. Phys. 43. S. 96. 1914.

3) **N. Bohr, H. A. Kramers** und **J. Slater**, Ztschr. f. Phys. 24. S. 69. 1924.

4) **J. Stark**, Elektrische Spektralanalyse chemischer Atome. Leipzig 1914.

5) **J. Holtsmark**, Ann. d. Phys. 58. S. 577. 1919; Phys. Ztschr. 25. S. 73. 1924.

6) **J. Holtsmark** u. **Trompy**, a. a. O.

Über die von Bohr[1]) eingeführten Störungen der stationären Bahn läßt sich wenig sagen, da man nichts Näheres über ihre Art kennt.

Man kann nun die Frage stellen, ob eigentlich die Lorentz-Verbreiterung überhaupt existiert oder ob nicht immer, wenn Spektrallinien bei hohen Drucken verbreitert werden, die Molekularfelder die maßgebende Ursache der Verbreiterung sind. Dieses Problem ist noch nicht entschieden. In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden, daß man die Lorentz-Verbreiterung getrennt von den übrigen Ursachen einer Linienverbreiterung untersuchen kann, und daß sie bei der Verbreiterung der Quecksilberresonanzlinie 2536,7 Å durch Zusatz fremder Gase neben dem Dopplereffekt die Hauptrolle spielt.

Wenn man auf ein Quarzgefäß, das Quecksilberdampf enthält, Licht der Linie 2536,7 Å einer Quarzquecksilberbogenlampe fallen läßt, so strahlt es nach allen Seiten Licht derselben Wellenlänge aus. Diese Resonanzstrahlung besteht nach Malinowski[2]) wahrscheinlich aus einem Dublett von zwei sehr scharfen Linien, deren Breite nur durch den Dopplereffekt bedingt ist, und die einen Abstand von etwa 0,01 Å voneinander haben.

Die Resonanzstrahlung erleidet im Quecksilberdampf eine starke selektive Absorption. Infolgedessen wird die Gesamtabsorption, die sie in einer Schicht von Quecksilberdampf erfährt, eine andere, wenn die Intensitätsverteilung der einfallenden oder der Absorptionslinie verändert wird. Da eine spektrale Auflösung der scharfen Resonanzlinie sehr schwierig ist, hat man in der Änderung der Absorption ein Mittel, rückwärts auf eine Änderung der Liniengestalt zu schließen, wenn die letztere dadurch geändert wird, daß man dem Quecksilberdampf fremde Gase zumischt.

Obgleich Emissions- und Absorptionslinie in gleicher Weise wohldefiniert sind, kann man nur die Änderung der Absorptionslinie untersuchen, weil bei Zusatz fremder Gase die Intensität der Resonanzstrahlung durch Stöße zweiter Art schnell abnimmt.

Der Untersuchung der Lorentzschen Stoßverbreiterung liegt folgender Gedankengang zugrunde:

---

[1]) N. Bohr, Phil. Mag. 26. S. 1. 1914.

[2]) a. a. O.

Hat man in einem Absorptionsgefäß einmal nur Quecksilberdampf und ein andermal bei gleicher Anzahl von Quecksilberatomen außerdem ein fremdes Gas, so wird das Absorptionsvermögen einer sehr dünnen Schicht für jede einzelne Frequenz der einfallenden Resonanzlinie entweder durch die Stöße oder durch die störenden Felder der Moleküle des zugesetzten Gases oder durch beides verändert, und damit auch der gesamte absorbierte Anteil des einfallenden Lichtes. Steigert man einerseits den Druck des Gases, so wächst die Zahl der Stöße und damit nach der Auffassung von Lorentz[1]) die Halbwertbreite der Absorptionslinie proportional zum Druck p; gleichzeitig wächst die mittlere Feldstärke, die von den umgebenden Molekülen am Ort des absorbierenden hervorgerufen wird, und damit die Halbwertbreite der Absorptionslinie nach der Theorie von Holtsmark[1]) proportional zu p, $p^{2/3}$ oder $p^{4/3}$, je nachdem, ob diese Feldstärke durch Dipole, Ionen oder Quadrupole hervorgerufen wird. Schmilzt man andererseits das Absorptionsgefäß bei einem bestimmten Druck des zugesetzten Gases ab und erhitzt es dann, so nimmt die Stoßzahl proportional der Wurzel aus der absoluten Temperatur zu, während die mittlere Feldstärke infolge der konstant bleibenden Zahl der Moleküle, deren mittlere Konstellation auch dieselbe bleibt, sich nicht ändert. Bekommt man also bei gleicher Zahl von Quecksilberatomen sowohl bei konstanter Dichte des zugestzten Gases durch Erhöhung der Temperatur von T_1 auf T_2 als auch bei konstanter Temperatur T_1 durch Steigerung des Gasdruckes auf das $\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$-fache des Anfangswertes angenähert[2]) dieselbe Änderung der Breite der Absorptionslinie, so ist damit gezeigt, daß wirklich die Stöße die maßgebende verbreiternde Ursache sind.

Vor der Besprechung der Experimente mögen noch einige Rechnungen über die selektive Absorption Platz finden, die notwendig sind, um aus der Änderung der Gesamtabsorption in einer Quecksilberdampfschicht von endlicher Dicke rückwärts auf die Änderung der Absorptionslinie einer sehr dünnen Schicht schließen zu können.

---

1) a. a. O.

2) Ein kleiner Unterschied könnte vielleicht wegen der verschiedenen Intensität und Dauer der Stöße bestehen.

Einige Betrachtungen über selektive Absorption.

In einer Arbeit von **Ladenburg** und **Reiche**[1]) ist die Theorie der selektiven Absorption entwickelt unter der Voraussetzung, daß leuchtende und absorbierende Schicht völlig gleich sind und der Absorptionskoeffizient nach den Formeln von **Drude** und **Voigt** von der Wellenlänge abhängt. Der Einfluß des Dopplereffekts wird vernachlässigt. Diese Untersuchungen sind auf die vorliegenden Probleme nicht anwendbar, da hier die Intensitätsverteilung der Resonanzlinie nach **Malinowski**[2]) im wesentlichen durch den Dopplereffekt bedingt ist, während die Absorptionslinie eine andere Struktur hat, die teils auch vom Dopplereffekt, teils von den Störungen infolge der Beimischung fremder Moleküle abhängt.

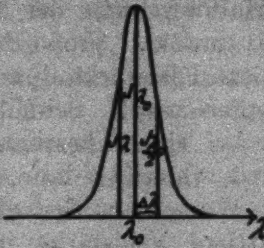


Fig. 1.

Zur Vereinfachung der Rechnung soll vorausgesetzt werden, daß die Intensitätsverteilung des Lichtes, das in das Absorptionsgefäß an der Stelle $x = 0$ eintritt, durch die **Rayleigh**sche Formel gegeben ist:

$$J_\lambda{}^0 = J_{\lambda_0}{}^0 \cdot e^{-\ln 2 \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\Delta \lambda_1}\right)^2}.$$

$J_\lambda{}^0$ ist die Intensität des Lichtes der Wellenlänge λ an der Stelle $x = 0$, $J_{\lambda_0}{}^0$ die maximale Intensität an derselben Stelle und

$$\Delta \lambda_1 = 3{,}581 \cdot 10^{-7} \lambda_0 \sqrt{\frac{T_1}{m}}$$

die Halbwertbreite der Linie, wenn T_1 die absolute Temperatur der emittierenden Resonanzlampe ist.

Ferner möge vorausgesetzt werden, daß die Absorptionskurve, d. h. das Absorptionsvermögen einer sehr dünnen Schicht, sich darstellen läßt durch:

$$k_\lambda = k_{\lambda_0, \Delta \lambda_2} \cdot e^{-\ln 2 \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\Delta \lambda_2}\right)^2}.$$

---

[1]) **Ladenburg** u. **Reiche**, Ann. d. Phys. **42**. S. 181. 1913.

[2]) a. a. O.

Hier ist k_λ das Absorptionsvermögen für Licht der Wellenlänge λ, $k_{\lambda_0, \Delta\lambda_2}$ ist die maximale Absorption, wenn $\Delta\lambda_2$ die Halbwertbreite der Absorptionslinie darstellt. $k_{\lambda_0, \Delta\lambda_2}$ ist proportional der Dichte der absorbierenden Atome und hängt, wenn diese konstant bleibt, während $\Delta\lambda_2$ geändert wird, auch von $\Delta\lambda_2$ ab, wie sich später ergeben wird. Wenn die Breite der Absorptionslinie ebenfalls nur durch den Dopplereffekt bedingt ist, so ist

$$\Delta\lambda_2 = 3{,}581 \cdot 10^{-7} \cdot \lambda_0 \cdot \sqrt{\frac{T_2}{m}},$$

wobei T_2 die Temperatur des Absorptionsgefäßes ist. Doch ist die folgende Rechnung unabhängig davon, auf welche Einflüsse diese exponentielle Verteilung des Absorptionsvermögens mit der Halbwertbreite $\Delta\lambda_2$ zurückzuführen ist.

Es soll nun mit Benutzung obiger Ausdrücke für J_λ^0 und k_λ berechnet werden, wie sich die Gesamtabsorption der Strahlung in einer absorbierenden Schicht von der Dicke l ändert, wenn die Halbwertbreite der Absorptionslinie eine andere wird, während die Intensitätsverteilung der einfallenden Linie dieselbe bleibt.

Für jeden Wert von λ wird die Intensität J_λ durch Absorption auf der Strecke $d\,x$ geändert um:

$$d\,J_\lambda = J_\lambda \cdot k_\lambda \cdot d\,x = J_\lambda \cdot k_{\lambda_0, \Delta\lambda_2} \cdot e^{-\ln 2 \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\Delta\lambda_2}\right)^2} d\,x\,.$$

Daraus folgt durch Integration, wenn J_λ^l die Intensität der Wellenlänge λ bezeichnet, die an der Stelle $x = l$ aus dem Absorptionsgefäß austritt:

$$J_\lambda^l = J_\lambda^0 \cdot e^{-l \cdot k_{\lambda_0, \Delta\lambda_2} \cdot e^{-\ln 2 \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\Delta\lambda_2}\right)^2}}.$$

Führt man die Intensität $J_{\lambda_0}^0$ des Zentrums der einfallenden Linie ein, so hat man:

$$J_\lambda^l = J_{\lambda_0}^0\, e^{-\ln 2 \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\Delta\lambda_1}\right)^2} \cdot e^{-l k_{\lambda_0, \Delta\lambda_2} \cdot e^{-\ln 2 \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\Delta\lambda_2}\right)^2}}.$$

Die Gesamtintensität des durchgehenden Lichtes ist:

$$J^l = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} J_\lambda^l\, d\,\lambda = J_{\lambda_0}^0 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\ln 2 \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\Delta\lambda_1}\right)^2} \cdot e^{-l k_{\lambda_0, \Delta\lambda_2} \cdot e^{-\ln 2 \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\Delta\lambda_2}\right)^2}} d\,\lambda\,,$$

während die Gesamtintensität des einfallenden Lichtes gegeben ist durch:

$$J^0 = \int_{-\infty}^{+\infty} J_\lambda^0 \, d\lambda = J^0_{\lambda_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\ln 2 \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\Delta \lambda_1}\right)^2} d\lambda = J^0_{\lambda_0} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\ln 2}} \cdot \Delta \lambda_1 \, .$$

Entwickelt man in dem Ausdruck für J^l den zweiten Faktor unter dem Integralzeichen in eine Reihe, so nimmt er die Form an:

$$e^{-l \cdot k_{\lambda_0, \Delta \lambda_2} \cdot e^{-\ln 2 \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\Delta \lambda_2}\right)^2}} = 1 - k_{\lambda_0, \Delta \lambda_2} \cdot l \cdot e^{-\ln 2 \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\Delta \lambda^2}\right)^2} + \cdots$$
$$+ \frac{(-1)^n}{n!} (k_{\lambda_0, \Delta \lambda_2} \cdot l)^n \cdot e^{-n \ln 2 \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\Delta \lambda_2}\right)^2} + \cdots$$

Multipliziert man aus und integriert gliedweise, was wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion gestattet ist, so ergibt sich:

$$J^l = J^0_{\lambda_0} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\ln 2 \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\Delta \lambda_1}\right)^2} \cdot d\lambda - \right.$$
$$- \int_{-\infty}^{+\infty} k_{\lambda_0, \Delta \lambda_2} \cdot l \cdot e^{-\ln 2 \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\Delta \lambda_1}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{\Delta \lambda_1}{\Delta \lambda_2}\right)^2\right)} + \cdots$$
$$\left. + (-1)^n \cdot \frac{(k_{\lambda_0, \Delta \lambda_2} \cdot l)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\ln 2 \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\Delta \lambda_1}\right)^2 \cdot \left(1 + n \left(\frac{\Delta \lambda_1}{\Delta \lambda_2}\right)^2\right)} d\lambda + \cdots \right\},$$

und weiter:

$$J^l = J^0_{\lambda_0} \sqrt{\frac{\pi}{\ln 2}} \cdot \Delta \lambda_1 \left\{ 1 - \frac{k_{\lambda_0, \Delta \lambda_2} \cdot l}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta \lambda_1}{\Delta \lambda_2}\right)^2}} + \cdots \right.$$
$$\left. + (-1)^n \cdot \frac{(k_{\lambda_0, \Delta \lambda_2} \cdot l)^n}{n!} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + n \left(\frac{\Delta \lambda_1}{\Delta \lambda_2}\right)^2}} + \cdots \right\}.$$

Für das Verhältnis des durchgehenden Lichtes zum einfallenden erhält man daher:

$$\frac{J^l}{J^0} = 1 - k_{\lambda_0, \Delta \lambda_2} \cdot l \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta \lambda_1}{\Delta \lambda_2}\right)^2}} + \cdots$$
$$+ (-1)^n \frac{(k_{\lambda_0, \Delta \lambda_2} \cdot l^n}{n!} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + n \left(\frac{\Delta \lambda_1}{\Delta \lambda_2}\right)^2}} + \cdots .$$

Will man hieraus schließen, wie sich die Gesamtabsorption ändert, wenn $\Delta\lambda_2$ bei konstanter Zahl der absorbierenden Atome durch Zusatz fremder Gase oder durch Temperaturerhöhung des Absorptionsgefäßes variiert wird, so muß man die Abhängigkeit der Größe $k_{\lambda_0,\,\Delta\lambda_2}$ von $\Delta\lambda_2$ festlegen. Dies wird möglich, wenn man die plausible Annahme macht, daß die gesamte Fläche der Absorptionskurve, d. h. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} k_\lambda\, d\lambda$, bei Änderung von $\Delta\lambda_2$ unverändert bleibt. Quantentheoretisch aufgefaßt, besagt diese Bedingung: Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Strahlungsquant einer bestimmten Frequenz absorbiert wird, hängt nur ab von der Strahlungsdichte dieser Frequenz und der Zahl der absorptionsfähigen Atome und nicht davon, ob deren Quantenzustand etwas deformiert ist oder nicht. Denn dann ist $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} k_\lambda\, d\lambda$ proportional der Gesamtzahl der absorbierenden Atome, die ja ungeändert bleiben sollte. Für die Verbreiterung der Absorptionslinie durch den Dopplereffekt bei Temperaturänderung des Absorptionsgefäßes besagt die obige Bedingung nur, daß die Absorptionswahrscheinlichkeit für die passende Frequenz unabhängig ist vom Geschwindigkeitszustand des absorbierenden Atoms. Bei klassischer Auffassung ist eine derartig anschauliche Deutung der Bedingung nicht zu geben.

Wählt man zunächst $\Delta\lambda_2 = \Delta\lambda_1$ und ändert dann $\Delta\lambda_2$ bei konstant bleibender Zahl der absorbierenden Atome, so liefert die Forderung, daß der Flächeninhalt der Absorptionskurve erhalten bleiben soll:

$$k_{\lambda_0,\,\Delta\lambda_2} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\ln 2\left(\frac{\lambda-\lambda_0}{\Delta\lambda_2}\right)^2} d\lambda = k_{\lambda_0,\,\lambda\Delta_1} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\ln 2\left(\frac{\lambda-\lambda_0}{\Delta\lambda_1}\right)^2} d\lambda,$$

oder:

$$\frac{k_{\lambda_0,\,\Delta\lambda_2}}{k_{\lambda_0,\,\Delta\lambda_1}} = \frac{\Delta\lambda_1}{\Delta\lambda_2}.$$

Führt man demgemäß in die Reihe für J^l/J^0 statt k_{λ_0} jetzt $k_{\lambda_0,\,\Delta\lambda_1}$ ein, so erhält man:

$$\frac{J^l}{J^0} = 1 - k_{\lambda_0,\,\Delta\lambda_1}\cdot l \cdot \frac{\dfrac{\Delta\lambda_1}{\Delta\lambda_2}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\Delta\lambda_1}{\Delta\lambda_2}\right)^2}} + \cdots +$$

$$+ (-1)^n \frac{(k_{\lambda_0,\,\Delta\lambda_1}\cdot l)^n}{n!}\cdot\frac{\left(\dfrac{\Delta\lambda_1}{\Delta\lambda_2}\right)^n}{\sqrt{1+n\left(\dfrac{\Delta\lambda_1}{\Delta\lambda_2}\right)^2}} + \cdots.$$

Die Gesamtabsorption ist gegeben durch $1 - \frac{J^l}{J^0}$. Bestimmt man sie zunächst für $\Delta\lambda_2 = \Delta\lambda_1$ und dann für irgendeinen unbekannten Wert von $\Delta\lambda_2$, so liefert die Reihe mit Hilfe der ersten Messung den Wert von $k_{\lambda_0,\,\Delta\lambda_1}\cdot l$ und dann, unter Benutzung dieses Wertes, mit Hilfe der zweiten Messung den gesuchten Wert von $\Delta\lambda_2$. Zur Durchführung ist die Kenntnis der Gesamtabsorption $1 - \frac{J^l}{J^0}$ für möglichst viele Werte von $k_{\lambda_0,\,\Delta\lambda_1}\cdot l$ und $\frac{\Delta\lambda_1}{\Delta\lambda_2}$ erforderlich. Für einige dieser Werte, die möglicherweise bei den Experimenten verwirklicht sein könnten, ist $1 - \frac{J^l}{J^0}$ in der folgenden Tabelle angegeben:

Tabelle 1.

$k_{\lambda_0\,\Delta\lambda_1}\cdot l$	0,4	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$\frac{\Delta\lambda_1}{\Delta\lambda_2}$	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%
1	$24{,}1_5$	$37{,}3_1$	$45{,}2_9$	$51{,}6_3$	$57{,}1_7$	$61{,}9_1$	$71{,}0_5$	$77{,}4_6$	$82{,}0_4$	$85{,}3_5$	$87{,}8_0$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$20{,}4_9$	—	—	—	—	$56{,}8_6$	$67{,}0_1$	$74{,}5_7$	—	—	—
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$18{,}0_7$	—	—	—	—	$52{,}2_9$	$62{,}5_4$	$70{,}5_1$	—	—	—
$\frac{1}{2}$	—	—	—	—	—	$48{,}6_3$	$58{,}7_5$	$66{,}8_4$	—	—	—
$\frac{1}{3}$	—	—	—	—	—	$37{,}7_3$	$46{,}8_3$	$54{,}5_7$	—	—	—
$\frac{1}{\sqrt{10}}$	—	—	—	—	—	$36{,}3_5$	—	—	—	—	—
$\frac{1}{4}$	—	—	—	—	—	$30{,}4_9$	$38{,}4_2$	$45{,}4_5$	—	—	—
$\frac{1}{\sqrt{20}}$	—	—	—	—	—	$27{,}9_1$	—	—	—	—	—
$\frac{1}{5}$	—	—	—	—	—	$25{,}4_8$	$32{,}4_4$	$38{,}7_5$	—	—	—
$\frac{1}{\sqrt{30}}$	—	—	—	—	—	$23{,}6_1$	—	—	—	—	—

In Fig. 2 ist nach den Werten dieser Tabelle für $k_{\lambda_0, \Delta\lambda_1} \cdot l = 1{,}5$; $2{,}0$; $2{,}5$ die Abhängigkeit der Gesamtabsorption von $\Delta\lambda_2/\Delta\lambda_1$ graphisch dargestellt. Fig. 3 gibt die Abhängigkeit

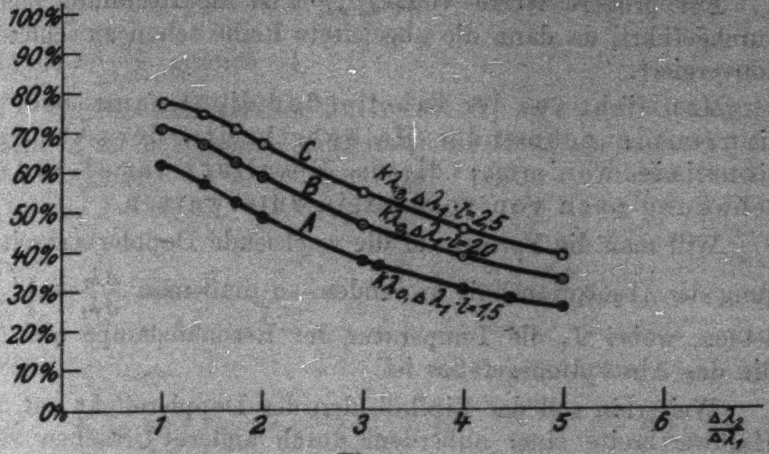


Fig. 2.

Abhängigkeit der Gesamtabsorption von $\Delta\lambda_2/\Delta\lambda_1$ für $k_{\lambda_0, \Delta\lambda_1} \cdot l = 1{,}5$; $2{,}0$ u. $2{,}5$.

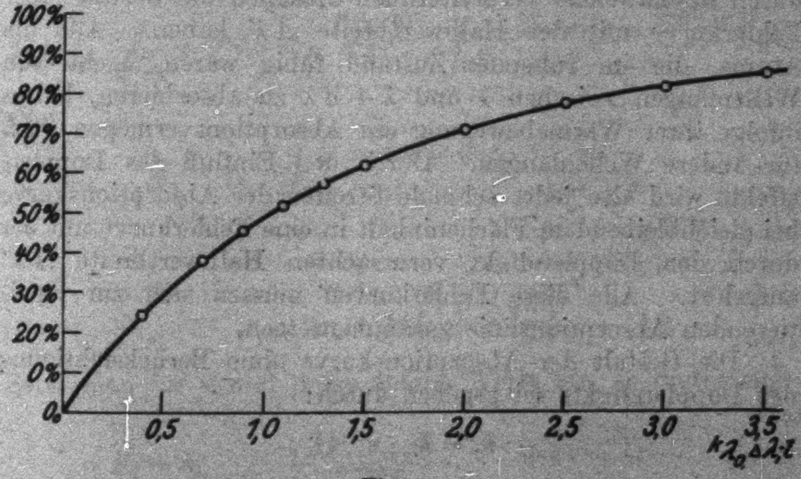


Fig. 3.

Abhängigkeit der Gesamtabsorption von $k_{\lambda_0, \Delta\lambda_1} \cdot l$ für $\Delta\lambda_2 = \Delta\lambda_1$.

der Gesamtabsorption von $k_{\lambda_0, \Delta\lambda_1}$ für $\Delta\lambda_2 = \Delta\lambda_1$, also für den Fall, daß das Absorptionsgefäß ebenfalls nur Quecksilberdampf enthält und die gleiche Temperatur hat wie die Resonanzlampe. Dieser Fall ist von **Malinowski**[1]) schon behandelt worden, der auch für einige Werte von $k_{\lambda_0, \Delta\lambda_1} \cdot l$ die Absorption berechnet hat.

Für größere Werte von $k_{\lambda_0, \Delta\lambda_1} \cdot l$ ist die Rechnung nicht durchgeführt, da dann die abgeleitete Reihe schon zu schlecht konvergiert.

Man sieht aus der Tabelle, daß die Gesamtabsorption mit zunehmender Halbwertbreite der Absorptionslinie abnimmt; dieses Resultat war der Anschauung nach von vornherein zu erwarten.

Will man die Formel auf die wachsende Dopplerverbreiterung der Absorptionslinie anwenden, so muß man $\frac{\Delta\lambda_1}{\Delta\lambda_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$ setzen, wobei T_1 die Temperatur der Resonanzlampe und T_2 die des Absorptionsgefäßes ist.

Weiterhin soll der Einfluß, den der Dopplereffekt auf die Halbwertbreite einer außerdem durch andere Ursachen verbreiterten Spektrallinie ausübt, unter möglichst einfachen Annahmen berechnet werden. Es möge also die Absorptionslinie durch irgendwelche verbreiternden Ursachen die Gestalt einer Fehlerkurve mit der Halbwertbreite $\Delta\lambda'$ haben. Alle die Atome, die im ruhenden Zustand fähig wären, Licht von Wellenlängen zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ zu absorbieren, haben infolge ihrer Wärmebewegung ein Absorptionsvermögen auch für andere Wellenlängen. Durch den Einfluß des Dopplereffekts wird also jeder schmale Streifen der Absorptionskurve bei gleichbleibendem Flächeninhalt in eine Fehlerkurve mit der durch den Dopplereffekt verursachten Halbwertbreite $\Delta\lambda''$ aufgelöst. Alle diese Fehlerkurven müssen sich zur resultierenden Absorptionslinie zusammensetzen.

Die Gestalt der Absorptionskurve ohne Berücksichtigung des Dopplereffekts sei gegeben durch:

$$k_\delta = k_{\lambda_0} \cdot e^{-\alpha^2 \delta^2},$$

wo k_{λ_0} die maximale Absorption, δ der in der Wellenlängenskala gemessene Abstand von λ_0 und $\alpha = \frac{\sqrt{\ln 2}}{\Delta\lambda'}$ ist. Wird nun der Streifen $k_\delta \cdot d\delta$ der Absorptionslinie durch die Wirkung

---

1) a. a. O.

des Dopplereffekts aufgelöst, so bekommt eine Stelle in der Entfernung ε von δ den Anteil:

$$k_\delta \, d\delta \, \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} e^{-\beta^2 \varepsilon^2} = k_{\lambda_0} \cdot \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2 \delta^2} e^{-\beta^2 \varepsilon^2} \cdot d\delta,$$

wo $\beta = \frac{\sqrt{\ln 2}}{\Delta \lambda''}$ gesetzt ist.

Um die resultierende Intensität K_λ an einer bestimmten Stelle λ zu bekommen, muß man die Beiträge addieren, die von denjenigen Kombinationen von δ und ε herrühren, für die $\delta + \varepsilon = \lambda - \lambda_0$ ist. Das ergibt:

$$K_\lambda = k_{\lambda_0} \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 \delta^2 - \beta^2 [\lambda - \lambda_0 - \delta]^2} \, d\delta,$$

oder:

$$K_\lambda = k_{\lambda_0} \cdot \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha^2 + \beta^2)\delta^2 + 2\beta^2(\lambda - \lambda_0)\delta - \beta^2(\lambda - \lambda_0)^2} \, d\delta.$$

Durch Umformung ergibt sich:

$$K_\lambda = k_{\lambda_0} \cdot \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\beta^2(\lambda - \lambda_0)^2} e^{\frac{\beta^4(\lambda - \lambda_0)^2}{\alpha^2 + \beta^2}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha^2 + \beta^2)\left[\delta^2 + \frac{\beta^2(\lambda - \lambda_0)}{\alpha^2 + \beta^2}\right]^2} \, d\delta,$$

oder:

$$K_\lambda = k_{\lambda_0} \cdot \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-(\lambda - \lambda_0)^2 \frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

$$= k_{\lambda_0} \frac{\frac{1}{\alpha}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{\beta}\right)^2}} e^{\left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{\beta}\right)^2}}\right)^2}.$$

Setzt man für α und β die obigen Werte ein, so ergibt sich:

$$K_\lambda = k_{\lambda_0} \cdot \frac{\Delta \lambda'}{\sqrt{\Delta \lambda'^2 + \Delta \lambda''^2}} \cdot e^{-\ln 2 \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\sqrt{\Delta \lambda'^2 + \Delta \lambda''^2}}\right)^2}.$$

Die durch die Superposition der beiden verbreiternden Ursachen entstandene Absorptionskurve ist also wieder eine Fehlerkurve mit der resultierenden Halbwertbreite

$$\Delta \lambda_R = \sqrt{\Delta \lambda'^2 + \Delta \lambda''^2}.$$

Außerdem ist, wie es sein muß:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_\lambda\, d_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} k_\delta\, d\,\delta\,.$$

Es addieren sich also bei dieser Superposition der beiden Ursachen keineswegs die Halbwertbreiten, sondern der Einfluß der weniger verbreiternden Ursache verschwindet sehr rasch, wie auch aus der folgenden Tabelle hervorgeht:

Tabelle 2.

$\frac{\Delta\lambda'}{\Delta\lambda''}$	$\Delta\lambda_R$	$\frac{\Delta\lambda'}{\Delta\lambda''}$	$\Delta\lambda_R$
0,1	$1{,}00_5 \cdot \Delta\lambda''$	1,0	$1{,}41_4 \cdot \Delta\lambda'$
0,2	$1{,}02_0 \cdot \Delta\lambda''$	1,5	$1{,}20_3 \cdot \Delta\lambda'$
0,4	$1{,}07_7 \cdot \Delta\lambda''$	2,0	$1{,}11_8 \cdot \Delta\lambda'$
0,5	$1{,}11_8 \cdot \Delta\lambda''$	2,5	$1{,}07_7 \cdot \Delta\lambda'$
0,7	$1{,}22_0 \cdot \Delta\lambda''$	3,0	$1{,}05_3 \cdot \Delta\lambda'$
0,9	$1{,}34_5 \cdot \Delta\lambda''$	5,0	$1{,}02_0 \cdot \Delta\lambda'$
1,0	$1{,}41_4 \cdot \Delta\lambda''$	10,0	$1{,}00_5 \cdot \Delta\lambda'$

Ist also z. B. die eine Halbwertbreite doppelt so groß wie die andere, so wird die größere durch den Einfluß der kleineren nicht, wie man erwarten könnte, um 50 Proz., sondern nur um 11,8 Proz. vermehrt.

Versuchsanordnung und Meßmethode.

Bei den Versuchen diente als primäre Lichtquelle eine wassergekühlte Quarzquecksilberbogenlampe *L*, deren Lichtbogen zur Vermeidung zu starker Selbstumkehr der Linie 2536,7 Å durch ein Magnetfeld an die Vorderwand des Leuchtrohres gedrückt wurde. Die von dieser Stelle ausgehende Strahlung wurde durch einen Quarzmonochromator (*M*) mit einem Prisma spektral zerlegt. Das herausgeblendete Licht der Linie 2536,7 Å fiel auf ein evakuiertes Quarzgefäß (*R*), das Quecksilberdampf von ungefähr 0,0013 mm Druck enthielt. Es bestand aus einem zylindrischen Quarzrohr, das an beiden Enden mit angeblasenen planparallelen Quarzplatten versehen war. An eine von diesen war unter einem rechten Winkel eine weitere Quarzplatte angeblasen, die als Austrittsfenster für die Resonanzstrahlung dienen konnte. Die von dieser „Resonanzlampe“ nach allen Richtungen ausgesandte Resonanzstrahlung wurde entweder von vorn in einer anderen als der Reflexionsrichtung oder von der Seite unter einem rechten Winkel zur Eintrittsrichtung des Primärstrahles beobachtet, indem sie durch einen ersten Quarzflußspatachromaten (A_1) parallel gemacht und durch einen weiteren (A_2) auf die lichtempfindliche Platte einer Photozelle (P) fokussiert wurde. Auf den einen dieser Achromaten war ein photographischer Verschluß aufgesetzt, der durch einen Fernauslöser vom Beobachterplatz aus bedient werden konnte. Dieser gestattet es, zu einer bestimmten Zeit die Belichtung der Photozelle beginnen zu lassen.

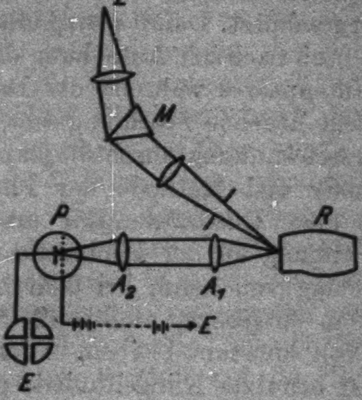


Fig. 4.

Der lichtempfindliche Teil der Photozelle bestand aus einer sorgfältig geschabten Zinkplatte, die den Vorteil bietet, daß sie erst im Ultraviolett lichtelektrisch empfindlich wird und darum nicht gegen sonstiges Licht geschützt zu werden braucht. Sie befand sich in einem Glasgefäß, das mit Wasserstoff von ungefähr 1 mm Druck gefüllt und durch eine aufgekittete Quarzplatte verschlossen war. Der Messingstab, der die Zinkplatte trug, war durch den Hals des Gefäßes, durch Bernstein isoliert, nach außen geführt und außerdem gegen überkriechende Ladungen durch einen geerdeten Metallzylinder geschützt. Das Anodengitter war in 3—4 mm Entfernung von der Zinkplatte an eingeschmolzenen Platinstiften befestigt. Die angelegten Spannungen betrugen je nach der erforderlichen Verstärkung des reinen Elektronenstromes durch Stoßionisation zwischen 300 und 600 Volt.

Die Kathode stand mit dem einen Quadrantenpaar eines Elektrometers in Verbindung, das in Quadrantschaltung mit einem Nadelpotential von 200 Volt benutzt wurde. Die Kathode und ihr Quadrantenpaar konnte mit Hilfe eines Schnurzuges vom Beobachterplatz aus ebenfalls geerdet werden. Die Empfindlichkeit des Elektrometers betrug etwa 1400 mm pro Volt, reduziert auf einen Skalenabstand von 1 m.

Das Elektrometer stand erschütterungsfrei auf einer Juliusschen Aufhängung und war einschließlich der Verbindung zur Photozelle und der Photozelle selbst möglichst gut elektrostatisch geschützt. Damit man Aufladungen störungsfrei messen kann, muß nach der Aufhebung der Erdverbindung des einen Quadrantenpaares während der Dauer der Messung die an der Photozelle liegende Spannung sehr konstant bleiben, da jede Spannungsschwankung durch die kapazitive Kopplung zwischen der Anode und Kathode der Photozelle eine Influenzladung auf dem Quadrantenpaar erzeugt. Da einer Änderung der Spannung an der Photozelle um 0,02 Volt ein Elektrometerausschlag von 1 mm bei dem benutzten Skalenabstand von 2,20 m entsprach, mußte die Spannung bis auf weniger als 0,01 Volt konstant bleiben. Dieser Bedingung genügte die zunächst benutzte Klingelfußbatterie nicht; dagegen zeigten die käuflichen Anodenbatterien, die späterhin gebraucht wurden, mehrere Monate hindurch eine während der Dauer einer Aufladung genügend konstante Spannung.

Die benutzten Absorptionsgefäße bestanden aus je zwei planparallel geschliffenen Quarzplatten von 2,5 cm Durchmesser, die im Abstand von 8,5 mm voneinander bis auf 0,1 bis 0,2 mm parallel zueinander mit geschmolzenem Quarz verblasen waren und ein Ansatzrohr besaßen, das zum Evakuieren und Abschmelzen in ein Glasrohr eingekittet wurde. Sie wurden auf einem Schlitten befestigt, der auf einem Zeiss-Reiter verschiebbar war. Zur Messung der Absorption wurden sie 5 bis 10mal abwechselnd in den parallelen Strahlengang zwischen den beiden Achromaten hinein- und herausgeschoben und die zugehörigen Intensitäten gemessen. Um die wirkliche Absorption im Inneren des Absorptionsgefäßes zu finden, muß man berücksichtigen, daß die Quarzplatten — in der Hauptsache durch Reflexion — einen Lichtverlust bedingen. Dieser wurde vor der Füllung der Gefäße mit Quecksilberdampf gesondert bestimmt.

Ist I_1 die ohne, I_2 die mit Absorptionsgefäß gemessene Lichtintensität und ϱ der Lichtverlust an den Quarzplatten, so ist die Absorption α gegeben durch:

$$1 - \alpha = \frac{J_2}{J_1 (1 - \varrho)} \cdot$$

Als Meßresultate sind im folgenden immer diese wahren Absorptionsverluste im Inneren der Gefäße als Mittelwerte aus einer ganzen Meßreihe angegeben.

Zur Erhitzung der Absorptionsgefäße wurde ein elektrischer Ofen benutzt, der aus einem an beiden Enden offenen Stück Messingrohr bestand, auf das der Heizdraht, in Wasserglas und Talkum gebettet, aufgewickelt war. Die Strahlung ging in Richtung der Ofenachse durch das Absorptionsgefäß hindurch. Die Temperatur des Ofens wurde durch ein in seiner Mitte angebrachtes Thermoelement gemessen.

Die Intensität der Resonanzstrahlung zeigte stärkere Schwankungen, als sie nach dem verhältnismäßig ruhigen Brennen der Primärlampe, in deren Stromkreis sich außerdem eine Selbstinduktion befand, zu erwarten gewesen wären. Das liegt wohl hauptsächlich daran, daß sich die Gestalt der Linie 2536,7 Å, die großen Einfluß auf die Stärke der erregten Resonanzstrahlung hat, von einer Messung bis zur folgenden stärker verändert, als den Spannungs- und Stromschwankungen der Lampe entspricht.

Vor Beginn der Messungen brannte die Primärlampe mindestens eine Stunde; gleichzeitig wurde die Photozelle belichtet, um störende Ermüdungserscheinungen zu verhüten.

Der lichtelektrische Strom und damit die Aufladung des ungeerdeten Quadrantenpaares pro Sek. ist proportional der auffallenden Lichtintensität. Bei der Messung wurde, nachdem die Erdung des Quadrantenpaares aufgehoben war, zu einer beliebigen Zeit $t = 0$ durch Auslösung des photographischen Verschlusses die Belichtung der Platte begonnen und der Ausschlag des Elektrometers von einer Zeit $t = t_1$, die meist mit $t = 0$ zusammenfiel, bis zu einer späteren Zeit $t = t_2$ abgelesen, wobei die Zeiten durch die Schläge eines Metronoms markiert wurden, und dieser Ausschlag wurde der Intensität proportional gesetzt. Das durch irgendwelche Störungen verursachte Kriechen des Elektrometers nach dem Aufheben der Quadrantenerdung, das meist nur einige Zehntel Millimeter während der Meßdauer betrug, wurde dadurch eliminiert, daß der vor der Messung in der Zeit $t_2 - t_1$ ohne Belichtung der Platte erzielte Ausschlag von dem gemessenen abgezogen wurde.

Von den meisten Autoren wird die Aufladezeit zwischen zwei festen Marken umgekehrt proportional der Intensität gesetzt. Das ist jedoch nur richtig, wenn die Eigenschwingung des Elektrometers, die sich der gleichmäßigen Wanderung der Nadel superponiert, schon bis zu unmerklichen Werten abgeklungen ist, wenn die Nadel die erste dieser Marken passiert. Bei den hier vorliegenden Verhältnissen hätte man bis zum Erreichen dieses Zustandes immer lange Zeit warten müssen, da die Nadel eine große Schwingungsdauer und keine starke Dämpfung hatte. Die Richtigkeit der angewandten Meßmethode geht aus der folgenden Rechnung hervor:

Nimmt man bei konstantem lichtelektrischen Strom konstant bleibende Kapazität des Quadrantenpaares für kleine Ausschläge an — was nach Messungen von Röntgen[1]) gerechtfertigt ist —, so wächst das Potential des Quadrantenpaares und damit die Kraft, die auf die Nadel wirkt, proportional der Zeit. Die Differentialgleichung für die Bewegung der Nadel lautet dann:

$$K \cdot \ddot{\varphi} + p\dot{\varphi} + D \cdot \varphi = A \cdot t.$$

Hier ist K das Trägheitsmoment, D die Richtkraft, p die Dämpfung, und A ist proportional der Lichtintensität. A/D ist der Ausschlag, den die Aufladung während einer Sekunde als Dauerausschlag hervorrufen würde. Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung ist:

$$\varphi = \frac{A}{D}\left(t - \frac{p}{D}\right).$$

Das ist das Bewegungsgesetz der Nadel nach langer Zeit, wenn ihre Eigenschwingung abgeklungen ist. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist:

$$\varphi = e^{-wt} \cdot \left\{a_1 \sin \omega t + a_2 \cos \omega t\right\},$$

wobei $w = \frac{p}{2K}$ und im Falle schwacher Dämpfung $\omega = \sqrt{\frac{D}{K} - w^2}$

---

[1]) W. C. Röntgen, Ann. d. Phys. 41. S. 467. 1913.

reell ist. Durch Zusammenfügung der beiden Lösungen und Bestimmung der Konstanten aus den Anfangsbedingungen $\varphi = 0$ und $\dot{\varphi} = 0$ für $t = 0$ ergibt sich:

$$\varphi = \frac{A}{D}\left\{e^{-w t}\left[\left(\frac{w p}{\omega D} - \frac{1}{\omega}\right)\sin \omega t + \frac{p}{D}\cos \omega t\right] + t - \frac{p}{D}\right\}.^{1)}$$

Wenn man nun für zwei verschiedene Lichtintensitäten den zwischen denselben — im übrigen beliebigen — Zeiten t_1 und t_2 erzielten Ausschlag mißt, so fallen in dem Verhältnis dieser Ausschläge die Zeitfunktionen fort, und man erhält:

$$\frac{\varphi_2' - \varphi_1'}{\varphi_2'' - \varphi_1''} = \frac{A'}{A''}.$$

Da A' und A'' den beiden Lichtintensitäten proportional sind, so sind die auf diese Weise gemessenen Ausschläge ebenfalls den auffallenden Lichtintensitäten proportional.

Prüfung der Meßmethode.

Diese Überlegung wurde auch durch einige Versuche bestätigt. Der Stift einer Nernstlampe wurde durch eine Quarzlinse, vor der sich ein Schirm mit zwei Blenden befand, auf die Photozelle abgebildet. Wenn die vorstehende Rechnung richtig ist, muß der Ausschlag, der sich ergibt, wenn beide Blenden geöffnet sind, innerhalb der Meßfehler gleich sein der Summe der Ausschläge, die man erhält, wenn je eine der Blenden offen ist, unabhängig von den Zeiten t_1 und t_2, zwischen denen gemessen wird, und unabhängig von der Größe der Ausschläge. Das bestätigt sich in den folgenden Meßreihen:

	1. Beide Blenden offen	2. Blende 1 offen	3. Blende 2 offen	4. Summe von 2 und 3
$t_1 = 18$ sec $t_2 = 56$ sec	223,8	101,5	125,2	226,7
$t_1 = 0$ sec $t_2 = 38$ sec	220,5	62,2	158,3	220,5
Blendenstellung verändert				

---

1) Vgl. W. Jäger, Elektrische Meßtechnik. 2. Aufl. S. 35.

Ferner ergaben zwei Meßreihen mit $t_1 = 0$, $t_2 = 38$ sec bei sehr stark verschiedenen Intensitäten für den Lichtverlust durch eine Quarzplatte:

Ausschlag ohne Platte	Ausschlag mit Platte	Lichtverlust
87,3	77,6	11,1 %
382,5	338,5	11,5 %

Diese Werte stimmen innerhalb der Meßfehler ebenfalls überein.

Wenn dagegen die Aufladezeit zwischen zwei festen Marken der Lichtintensität umgekehrt proportional gesetzt wurde, so hing der Lichtverlust an einem Absorptionstrog davon ab, wie diese Marken lagen, und wie groß die Wanderungsgeschwindigkeit der Elektrometernadel war. Es ergaben sich folgende Mittelwerte:

Feste Marken	Zeit ohne Absorptionstrog	Zeit mit Absorptionstrog	Lichtverlust
120—220 Skt.	14,2 sec	19,3 sec	26,4 %
100—200 Skt.	9,1 sec	14,8 sec	38,3 %
200—400 Skt.	26,1 sec	36,2 sec	28,0 %

Nach der ersten Methode ergab sich der Verlust an demselben Absorptionstrog als Mittelwert aus mehreren Meßreihen zu 23,3 Proz.

Versuche über die selektive Absorption der Resonanzstrahlung.

Vor der Bearbeitung des oben aufgeworfenen Problems wurden einige Versuche über die Absorbierbarkeit der Resonanzstrahlung angestellt, die mit den theoretisch abgeleiteten Gesetzen der selektiven Absorption verglichen werden sollten.

Wenn die zur Beobachtung gelangende Resonanzstrahlung senkrecht zum einfallenden Primärstrahl austritt, so ist die Intensitätsverteilung der Linie an ihrer Entstehungsstelle nur durch die Geschwindigkeit der Quecksilberdampfatome in der Resonanzlampe gegeben. Der Primärstrahl hat aber eine gewisse Breite und kann auch nicht ganz streifend am Austrittsfenster der Resonanzlampe vorbeigeführt werden. Die Resonanzstrahlung, die von jedem einzelnen Teil des Primärstrahles erregt wird, hat also verschieden lange Wege im Quecksilberdampf zurückzulegen, bevor sie aus der Resonanzlampe austritt, wobei ihre ursprüngliche ideale Intensitätsverteilung durch die Absorption verändert wird. Die Intensitätsverteilung der gesamten austretenden Strahlung wird sehr kompliziert und ist im einzelnen rechnerisch kaum zu verfolgen. Die Dicke der leuchtenden Schicht wird eine gewisse Verbreiterung hervorrufen, wie auch aus der Arbeit von Malinowski[1]) hervorgeht. Ist dann noch eine Schicht von Quecksilberdampf bis zum Austrittsfenster zu durchsetzen, so wird die Linie weiter verbreitert und für größere Schichten umgekehrt. In beiden Fällen wird die Absorbierbarkeit der Strahlung in einem Absorptionstrog kleiner sein, als sie es bei idealer Intensitätsverteilung der einfallenden Linie sein sollte. Denn jedes Durchsetzen einer Schicht von Quecksilberdampf vermindert infolge der selektiven Absorption besonders die Intensität der am stärksten absorbierbaren Strahlung, und damit die Absorbierbarkeit der Strahlung in einer weiteren Dampfschicht.

Bei den Versuchen trat der Primärstrahl durch eine Blende von 6,5 mm Durchmesser, deren Mittelpunkt sich in verschiedenen Entfernungen vom Austrittsfenster befand, in die Resonanzlampe ein. Die Messungen wurden an zwei Absorptionsgefäßen Nr. 1 und Nr. 2 gemacht, die mit Quecksilberdampf von verschiedener Dichte gefüllt waren.

Es ergaben sich die folgenden Mittelwerte:

Entfernung der Eintrittsblende vom Austrittsfenster	Absorption im Gefäß 1	Absorption im Gefäß 2
21 mm	42,7 %	51,2 %
13 mm	55,7 %	61,8 %
5 mm	63,1 %	69,0 %

Die Absorption hängt also von der Lage des Primärstrahles in der Resonanzlampe in hohem Maße ab.

Um nun eine möglichst ideale Gestalt der einfallenden Linie zu bekommen, wurde die Strahlung bei den späteren Messungen der Resonanzlampe von vorn entnommen. Die Primärstrahlung fiel unter einem Winkel von ungefähr 40° gegen die Normale der vorderen Quarzplatte der Resonanzlampe ein, während in Richtung der Normalen beobachtet wurde. Man muß in Betracht ziehen, daß bei dieser Beobachtungsweise neben der Strahlung aus dem Inneren der Resonanzlampe auch noch Licht der Linie 2536,7 Å der Quecksilberbogenlampe, das an der Vorderfläche der Resonanzlampe diffus zerstreut worden ist, mit zur Beobachtung gelangen kann. Da diese Quarzplatte nicht schlierenfrei war, machte das diffus zerstreute Licht etwa 25 Proz. der gesamten gemessenen Strahlung aus. Es konnte getrennt bestimmt werden, indem die Resonanzlampe mit Kohlensäureschnee und Äther gekühlt und dann die Strahlung gemessen wurde. Die Kühlung bewirkte sofort ein Zurückgehen der Intensität auf etwa 25 Proz. Sie ging dann auch bei längerer Kühlung mit flüssiger Luft nicht mehr weiter zurück, während unter diesen Umständen höchstens 3—4 Proz. der Intensität übrig blieben, wenn die Beobachtung senkrecht zum einfallenden Strahl stattfand. Die Quecksilberdampfdrucke sind bei diesen Temperaturen so gering — bei -80^0 etwa 10^{-7} mm Hg, bei -190^0 etwa 10^{-27} mm Hg —, daß die Intensität der Resonanzstrahlung auf einen sehr geringen Bruchteil ihres normalen Wertes fallen muß, so daß die übrig bleibende Strahlung nur diffuses Licht sein kann. Als ein weiterer Beweis hierfür muß wohl angesehen werden, daß dieses Licht im Quecksilberdampf wesentlich weniger absorbiert wird als die Resonanzstrahlung. Das liegt daran, daß seine Intensitätsverteilung dieselbe ist wie die der Linie 2536,7 Å der primären Bogenlampe, die viel breiter ist als die Resonanzlinie und starke Selbstumkehr zeigt.

---

[1]) a. a. O. S. 960.

Um bei dieser Beobachtungsweise die Absorption der Resonanzstrahlung allein zu finden, muß man neben der Absorption der Gesamtstrahlung den Prozentsatz des in ihr enthaltenen diffusen Lichtes und seine Absorption kennen. Ist I_0 die gesamte einfallende Intensität, α' ihr absorbierter Bruchteil, $I_0 \cdot d$ die Intensität des diffus zerstreuten Lichtes, β der Bruchteil von diesem, der absorbiert wird, und ϱ der Lichtverlust an den Quarzplatten des Absorptionsgefäßes, so ist der absorbierte Bruchteil der reinen Resonanzstrahlung α gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
1 - \alpha &= \frac{J_0 - J_0 d}{J_0 (1 - \alpha')(1 - \varrho) - J_0 d (1 - \beta)(1 - \varphi)} \\
&= \frac{1 - d}{(1 - \varrho)\{1 - \alpha' - d(1 - \beta)\}}.
\end{aligned}
$$

Ist die Berücksichtigung des diffusen Lichtes bei einer Meßreihe nach dieser Formel erfolgt, so sind die Mittelwerte der Absorption als „korrigierte Werte“ bezeichnet. Die Absorbierbarkeit des diffusen Lichtes war trotz der geringeren Intensität fast mit derselben Genauigkeit zu bestimmen wie die des gesamten Lichtes. Dagegen gestatteten es die Intensitätsschwankungen der Primärlampe nicht, den Bruchteil des diffusen Lichtes mit derselben Genauigkeit zu ermitteln, da der Wechsel der Temperatur der Resonanzlampe sich nicht so schnell ausführen läßt wie das Hin- und Herschieben von Absorptionsgefäßen. Bei der Beobachtung von vorn hat man den Vorteil, unabhängiger zu sein von kleinen Lageänderungen des Primärstrahles, die beim Zünden der Lampe leicht eintreten können.

Daß die nach vorn austretende Resonanzstrahlung wirklich eine idealere Intensitätsverteilung zeigt, als die seitlich austretende es auch bei möglichster Annäherung des Primärstrahles an das Austrittsfenster tut, geht daraus hervor, daß die Absorption bei unveränderten sonstigen Bedingungen von 57 Proz. auf 62 Proz. anstieg.

Man muß sich jedoch darüber klar sein, daß die von der Resonanzlampe emittierte Linie auch jetzt noch nicht die ideale Gestalt der Rayleighschen Intensitätsverteilung besitzt, da die Dicke der emittierenden Schicht, die immerhin einige Millimeter beträgt, noch immer eine Veränderung der Intensitätsverteilung mit sich bringt, die allerdings nicht mehr sehr groß sein kann, da die vordersten Schichten in der Lampe am stärksten leuchten und dieses Licht vor dem Austritt aus der Resonanzlampe am wenigsten durch Absorption verändert wird.

Zur weiteren Prüfung der Gesetze der selektiven Absorption wurde die Abhängigkeit der Absorption von der Dichte des Quecksilberdampfes im Absorptionsgefäß untersucht. Da in der oben angegebenen Reihenentwicklung für die Gesamtabsorption nur das Produkt $k_{\lambda_0, \Delta\lambda} \cdot l$ vorkommt, das der Gesamtzahl der Quecksilberatome auf der durchlaufenen Wegstrecke proportional ist, so muß es auf dasselbe hinauskommen, ob man bei konstantem Quecksilberdampfdruck die durchlaufene Weglänge ändert — wie es Malinowski bei seinen Messungen getan hat — oder bei konstanter Weglänge den Quecksilberdampfdruck.

Für diese Messungen war ein Absorptionsgefäß Nr. 3 mit einem Ansatzrohr von 6 mm Durchmesser versehen. Es wurde nach nachstehender Zeichnung in ein U-Rohr eingekittet, in dem sich ein Tropfen Quecksilber befand. Während des Auspumpens wurde das Gefäß erhitzt und das U-Rohr mit Kohlensäureschnee und Äther gekühlt, um alles Quecksilber aus dem Absorptionsgefäß zu entfernen. Zur Messung der Absorption bei verschiedenen Quecksilberdampfdrucken wurde es mit einem Dewargefäß als Temperaturbad zusammen auf dem verschiebbaren Schlitten angebracht. Wurde das U-Rohr wiederum auf — 80° abgekühlt, so war der Lichtverlust durch das Absorptionsgefäß sogar 1—1½ Proz. geringer, als wenn das Gefäß Zimmerluft enthielt. Das ist nicht weiter verwunderlich, da immer etwas Quecksilberdampf in der Zimmerluft enthalten ist.

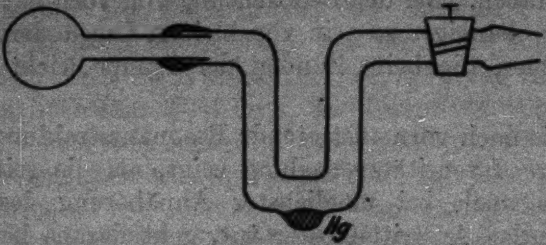


Fig. 5.

Bei verschiedenen Temperaturen des U-Rohres und den zugehörigen Quecksilberdampfdrucken ergaben sich die folgenden korrigierten Mittelwerte für die Absorption:

Tabelle 3.

Temperatur	Dampfdruck	korrigierte Absorption	$k_{\lambda_0, \Delta\lambda_1} \cdot l$	$\overline{k}_{\lambda_0, \Delta\lambda_1} \cdot l$ für $y = 1$
2,7°	0,00027 mm	34,6%	0,63	0,72
6,1	0,000374 „	41,9	0,80	0,94
11,5	0,000613 „	57,1	1,30	1,52
12,0	0,000645 „	58,2	1,34	1,60
15,4	0,000874 „	70,0	1,92	2,36
18,0	0,00110 „	72,3	2,08	2,53
19,3	0,00123 „	76,3	2,39	3,0

Die Zahlen in der 4. und 5. Spalte sollen später besprochen werden. Die Werte für 12,0°, 18,0° und 19,3° waren schon vorher mit einem anderen Gefäß — Nr. 1 — erhalten, dessen Ansatzrohr eine Abschmelzstelle besaß. In einem seitlichen Ansatzstück befand sich ein Tropfen Quecksilber, der auf einer bestimmten Temperatur gehalten wurde. Wenn dieser auf — 80° gekühlt wurde, so blieb auch nach stundenlanger Kühlung noch eine Absorption von etwa 3 Proz. übrig. Das muß wohl daran liegen, daß durch die starke Einschnürung der Abschmelzstelle die Geschwindigkeit des Druckausgleiches zwischen dem Gefäß und dem Ansatzstück stark herabgesetzt ist. Es könnte auch sein, daß sich an anderen Stellen des Ansatzrohres Quecksilber festgesetzt hätte, dessen Dampf in das Absorptionsgefäß gelangen konnte, ohne die Kühlung zu passieren. Darum sind diese Messungen vielleicht weniger zuverlässig. Bei dem später benutzten Gefäß Nr. 3 waren die hier vorhandenen Mängel durch das weite Ansatzrohr und das gekühlte U-Rohr vermieden.

Die zu den verschiedenen Temperaturen gehörigen Sättigungsdrucke des Quecksilberdampfes wurden durch Interpolation der Werte der nachstehenden Tabelle1) gewonnen:

Temp.	0°	2°	4°	6°	8°
0°	0,000207	0,000252	0,000306	0,000370	0,000447
10	0,000537	0,000645	0,000773	0,000922	0,00110
20	0,00131	0,00155	0,00183	0,00216	0,00254

Diese ist berechnet nach der Formel:

$$\log p\,(\mathrm{mm}) = 9{,}9073436 - \frac{3276{,}628}{T} - 0{,}65199 \log T.$$

Aus der Kurve in Fig. 3, welche die Beziehung zwischen $k_{\lambda_0, \Delta\lambda_1} \cdot l$ und der Absorption darstellt, kann man zu den gemessenen Werten der Absorption die zugehörigen Werte von $k_{\lambda_0, \Delta\lambda_1} \cdot l$ finden. Diese sind in der 4. Spalte der obigen Tabelle 3 enthalten.

Wenn die berechnete Absorptionskurve mit der Erfahrung übereinstimmen soll, so müssen diese Werte von $k_{\lambda_0, \Delta\lambda_1} \cdot l$, als Funktionen des Quecksilberdampfdruckes aufgetragen, eine gerade Linie ergeben, die durch den Nullpunkt des Koordinatensystems geht. Aus der Kurve *A* in Fig. 6 geht hervor, daß die Punkte um diese Gerade herum etwas gestreut liegen. Die Meßgenauigkeit ist hier dadurch vermindert worden, daß die korrigierten Werte der Absorption benutzt werden mußten, die immer ungenauer werden als die unkorrigierten, weil sich

---

1) Landolt-Börnstein, Phys.-Chem. Tab. S. 1335.

der Prozentsatz des diffusen Lichtes nicht genau bestimmen läßt. Außerdem muß man bedenken, daß geringe Änderungen der Absorption schon große Änderungen von $k_{\lambda_0, \Delta\lambda_1} \cdot l$ verursachen.

Da die einfallende Linie sicher nicht genau die Rayleighsche Intensitätsverteilung besitzt, könnte man versuchen, ihre Abweichung von dieser Gestalt dadurch zu berücksichtigen, daß man annimmt, die einfallende Strahlung habe im Mittel

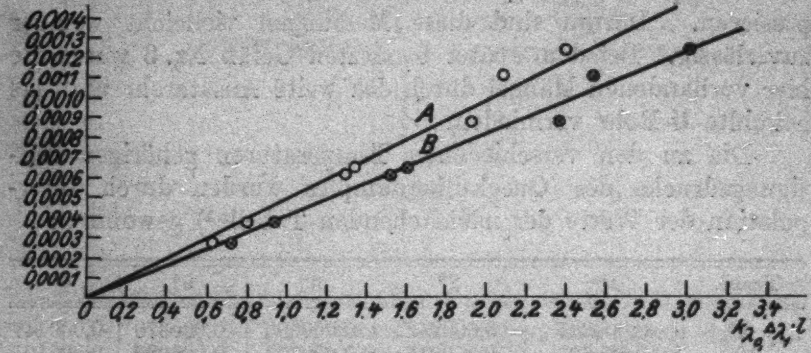


Fig. 6. $k_{\lambda_0, \Delta\lambda_1} \cdot l$ in Abhängigkeit vom Hg-Druck.

schon eine absorbierende Schicht von Quecksilberdampf durchsetzt, für die $k_{\lambda_0, \Delta\lambda_1} \cdot l = y$ sei, während für das Absorptionsgefäß $k_{\lambda_0, \Delta\lambda_1} \cdot l = x$ sein möge. Dann tritt aus der Resonanzlampe die Intensität

$$J_1 = J_0 \left(1 - \alpha(y)\right)$$

aus, während man hinter dem Absorptionsgefäß

$$J_2 = J_0 \left(1 - \varrho\right) \left(1 - \alpha\left(x + y\right)\right)$$

hat.

Für den Verlust $\alpha^*(x)$ im Absorptionsgefäß ergibt sich dann:

$$1 - \alpha^*(x) = \frac{1 - \alpha(x + y)}{1 - \alpha(y)}.$$

Nimmt man für y einen bestimmten Wert an, so kennt man $\alpha^*(x)$ und $\alpha(y)$ und dadurch auch $\alpha(x + y)$ und mit Hilfe der Kurve $x + y$ und damit auch x, d. h. den wirklichen Wert von $k_{\lambda_0, \Delta\lambda_1} \cdot l$ für das Absorptionsgefäß bei dem betreffenden Quecksilberdampfdruck.

Unter der Annahme $y = l$, was bei 20° einer durchsetzten Dampfschicht von etwa 2,5 mm Dicke entspricht, ergeben sich für $k_{\lambda_0, \Delta\lambda_1} \cdot l$ die Werte in der 5. Spalte der Tabelle 3. Diese liefern die Kurve *B* in Fig. 6. Wie man sieht, verschieben sich die einzelen Meßpunkte durch die Einführung von *y* gegeneinander; doch kann man nicht entscheiden, wie groß *y* zu wählen ist, und ob dies die richtige Art ist, die Abweichung von der idealen Liniengestalt zu berücksichtigen.

Mit dem von Malinowski[1]) angegebenen Wert $k_{\lambda_0, \Delta\lambda_1} = 3{,}11$ kann man die hier erhaltenen Werte nicht genau vergleichen, da in seiner Arbeit nicht die zugehörige Temperatur des den Dampf aussendenden Quecksilbertropfens angegeben ist. Aus der Geraden *A* in Fig. 6 würde sich bei 20° ($p = 0{,}00131$ mm) $k_{\lambda_0, \Delta\lambda_1} \cdot l = 2{,}68$ ergeben; da $l = 0{,}85$ cm ist, entspräche dem ein Wert von $3{,}1_5$ für $k_{\lambda_0, \Delta\lambda_1}$.

Die Verbreiterung der Absorptionslinie durch den Dopplereffekt.

Da bei der Untersuchung der Stoßdämpfung gleichzeitig mit dieser stets auch der Dopplereffekt vorhanden ist, mußte zunächst festgestellt werden, wie sich die Gesamtabsorption ändert, wenn bei konstanter Zahl der absorbierenden Atome ihre Geschwindigkeit, und damit die Halbwertbreite der Absorptionslinie, durch Temperaturerhöhung vergrößert wird und keine Stoßdämpfung auftritt.

Zur Messung wurde das abgeschmolzene Gefäß Nr. 2 im Ofen auf verschiedene Temperaturen gebracht. Es ergaben sich folgende Mittelwerte:

Temperatur	Absorption unkorrigiert	Absorption korrigiert
18,2°	49,5%	62,9%
340	53,6	67,7
505	52,5	66,2

Ein ähnliches Ergebnis hatte eine Meßreihe, die mit dem Gefäß Nr. 1 ausgeführt wurde, das mit Quecksilberdampf und Wasserstoff von 29 mm Druck gefüllt war. Aus der Diskussion der späteren Messungen, bei denen die Abhängigkeit der Linienbreite vom Druck des zugesetzten Wasserstoffes untersucht wurde, geht hervor, daß bei diesem geringen Wasserstoffzusatz die Verbreiterung der Absorptionslinie durch Stöße kleiner

---

1) a. a. O.

bleibt als die Verbreiterung durch den Dopplereffekt. Aus den theoretischen Überlegungen über die Zusammensetzung von zwei verbreiternden Ursachen geht dann hervor, daß der Dopplereffekt überwiegend die Liniengestalt bestimmt, und daß daher diese Meßreihe im wesentlichen ebenfalls die Veränderung der Absorption durch den Dopplereffekt zeigt. Sie ergab folgende Mittelwerte:

Temperatur	Absorption unkorrigiert
17,8°	62,2%
75	62,3
300	63,6
530	62,0

Man ersieht aus beiden Meßreihen, daß zunächst mit wachsender Temperatur bis etwa 300° die Absorption zunimmt und erst bei weiterer Temperatursteigerung eine Abnahme zeigt, während sie theoretisch ständig abnehmen sollte. Die theoretische Dopplerbreite nimmt von 340° bis 505°, bzw. von 300° bis 530°, von 1,45 $\Delta\lambda_1$ auf 1,63 $\Delta\lambda_1$, bzw. von 1,40 $\Delta\lambda_1$ auf 1,65 $\Delta\lambda_1$ zu, wenn $\Delta\lambda_1$ die Dopplerbreite bei 20° bezeichnet. Die zu erwartenden Abnahmen der Absorption ergeben sich aus den Kurven A und B der Fig. 2, die für verschiedene $k_{\lambda_0, \Delta\lambda_1} \cdot l$ die Beziehungen zwischen $\Delta\lambda_2/\Delta\lambda_1$ und der Absorption darstellen, etwa zu 2,5 Proz. bzw. 3,5 Proz. Die gemessenen Änderungen der Absorption bleiben also unterhalb der zu erwartenden.

Für die bei tieferen Temperaturen zunächst erfolgende Zunahme der Absorption können zwei Umstände verantwortlich gemacht werden. Die Zunahme ist bei den beiden Meßreihen sehr verschieden groß; daraus muß man wohl schließen, daß sie zum Teil darauf beruht, daß beim Erwärmen der Quarzgefäße von den Wänden noch Quecksilberatome frei werden, die eine Vermehrung der Gesamtabsorption bedingen. Aus diesem Grunde ist wohl auch die gemessene Abnahme der Absorption bei höheren Temperaturen geringer, als sie theoretisch zu erwarten wäre. Es könnte aber auch sein, daß die von der Resonanzlampe ausgesandte Linie durch Selbstumkehr etwas breiter ist als die Absorptionslinie bei 20° und dadurch zunächst bei Temperatursteigerung ein Anwachsen der Gesamtabsorption eintritt.

Dagegen läßt sich kein Umstand finden, durch den eine Verminderung der Gesamtabsorption vorgetäuscht werden könnte; also liefern die Messungen zwischen etwa 300° und 500° den Beweis, daß die durch Vergrößerung des Dopplereffektes bei steigender Temperatur hervorgerufene Verbreiterung der Absorptionslinie mit Hilfe der angewandten Methode nachzuweisen ist.

Die Untersuchung der Stoßdämpfung.

Nunmehr wurde, gemäß dem in der Einleitung angegebenen Gedankengang zum Nachweis der Stoßverbreiterung, untersucht, in welcher Weise sich die Gesamtabsorption ändert, wenn das Absorptionsgefäß bei konstantem Quecksilberdampfdruck mit Wasserstoff von verschiedenen Drucken gefüllt wird. Die Messungen wurden mit dem oben beschriebenen Gefäß Nr. 3 ausgeführt, wobei der konstante Sättigungsdruck des Quecksilberdampfes von 0,000881 mm dadurch erreicht wurde, daß sich das U-Rohr mit dem Quecksilbertropfen dauernd in einem Wasserbad von 15,5° befand. In der folgenden Tabelle sind die erhaltenen Mittelwerte für die Absorption, korrigiert und unkorrigiert, und auch die Absorption des diffusen Lichtes allein angegeben.

Tabelle 4.

Wasserstoff-druck	Absorption unkorrigiert	Absorption korrigiert	Absorption des diffusen Lichtes
0 mm	59,8%	70,0%	26,1%
30,5	59,8	67,4	29,4
30,5	59,8	—	—
62	57,0	63,8	33,3
125	50,7	54,8	35,0
201	44,7	47,5	34,9
201	43,8	—	—
382	36,7	38,5	31,1
765	31,8	32,1	30,2

Die Werte dieser Tabelle sind in den Kurven *A* und *B* der Fig. 7 dargestellt.

Wenn der Wasserstoffdruck verändert worden war, wurde bis zur nächsten Messung etwa zwei Stunden gewartet, weil durch das Ansetzen des Gefäßes an die Pumpe und das Einströmen des Wasserstoffs mehr Quecksilberatome in das Absorptionsgefäß hineingekommen sein konnten, als es dem

Sättigungsdruck bei 15,5° entspricht. Daß die Wartezeit bei diesem Gefäß mit einem weiten Ansatzrohr zum Druckausgleich ausreichend war, ging aus den Messungen bei 30,5 mm und 201 mm Wasserstoffdruck hervor. Bei diesen Drucken wurde das U-Rohr eine Nacht hindurch auf der Temperatur von 15,5° gehalten und dann die Messung wiederholt, wobei das Resultat von dem am Tage vorher erhaltenen nicht erheblich abwich.

Aus der Tabelle geht hervor, daß die korrigierten Werte der Absorption mit steigendem Wasserstoffdruck stets abnehmen; dagegen nimmt die Absorption des diffusen Lichtes mit steigendem Druck des zugesetzten Wasserstoffs zunächst zu und erst bei höheren Drucken wieder ab. Das ist erklärlich, da das diffuse Licht aus einer breiten, selbstumgekehrten Linie besteht. Denn dann wird durch eine scharfe Absorptionslinie hauptsächlich das Zentrum der einfallenden Linie absorbiert, dessen Intensität gering ist. Wird die Absorptionslinie verbreitert, so wird nun auch von den äußeren Teilen der umgekehrten Linie Licht absorbiert, und die Gesamtabsorption nimmt infolgedessen zu und kann erst bei weiterer Verbreiterung der Absorptionslinie wieder geringer werden.

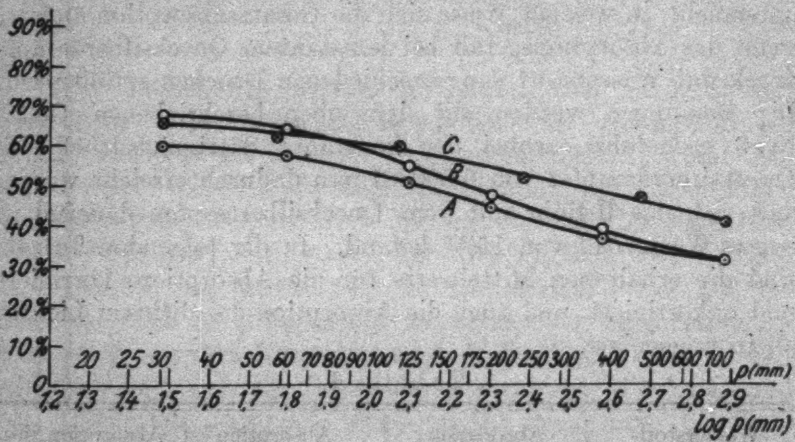


Fig. 7. Abhängigkeit der Gesamtabsorption vom Wasserstoffdruck.

Auch diese ganze Meßreihe war vorher schon mit dem Gefäß Nr. 1 gemacht worden, wobei sich die enge Abschmelzstelle als großer Nachteil herausstellte. Schon wenn es kein

Gas enthielt, war der Druckausgleich des Quecksilberdampfes, wie oben ausgeführt, nicht sehr gut; er wurde noch weit schlechter, wenn das Gefäß mit Wasserstoff gefüllt war. Wie aus der folgenden Tab. 5 und der zugehörigen Kurve C der Fig. 7 hervorgeht, nahm bei dieser Meßreihe die Absorption mit steigendem Druck langsamer und unregelmäßiger ab als bei der vorigen, was wohl darauf zurückzuführen ist, daß infolge des schlechten Druckausgleiches der Quecksilberdampf in dem Gefäß nicht die konstante Dichte hatte, die dem Sättigungsdruck bei 15,5° entsprechen würde.

Bei dieser Meßreihe wurde das diffuse Licht nicht besonders gemessen.

Es ergaben sich folgende Mittelwerte:

Tabelle 5.

Wasserstoffdruck	Absorption unkorrigiert
0 mm	63,5%
30,5	65,7
59	62,0
118,5	59,6
243	51,7
476	46,4
771	40,6

Weiterhin wurde die Verbreiterung der Absorptionslinie durch die vermehrte Stoßzahl bei Temperaturerhöhung in einem abgeschmolzenen Gefäß Nr. 4 gemessen, wobei die Zahl der Quecksilberatome und die der Wasserstoffmoleküle konstant blieb. Das Gefäß wurde möglichst sorgfältig gefüllt, um zu vermeiden, daß sich nach dem Abschmelzen mehr Quecksilberatome darin befanden, als es dem Sättigungsdruck bei 15,5° entspricht. Die Füllung geschah auf folgende Weise:

Zunächst wurde das Gefäß 24 Stunden lang mit Salpetersäure gefüllt, um etwa an den Wänden haftende Quecksilberatome zu beseitigen, dann mit destilliertem Wasser und Äther nachgespült. Darauf wurde es in umstehender Weise eingekittet und unter Kühlung des U-Rohres mit Kohlensäureschnee und Äther an die Pumpe gesetzt. Dann wurde das Absorptionsgefäß in der Gebläseflamme geglüht und darauf Gefäß und Glasrohr bis hinter die Abschmelzstelle 2 in einem Ofen auf 35—40° erwärmt. Nach 24 Stunden wurde unter ständiger Kühlung des U-Rohres — um etwa mitgerissene

Quecksilberatome zu kondensieren — Wasserstoff von 253 mm Druck durch den Hahn *A* eingelassen und das Glas an der Stelle 1 abgeschmolzen. Nun wurde die Kühlung fortgenommen und statt dessen das U-Rohr 24 Stunden lang in ein Wasserbad von 16,0° gebracht, während das Gefäß und die Abschmelzstelle 2 weiterhin auf 35—40° erwärmt blieben, um ein Haften der Quecksilberatome an der Gefäßwand zu erschweren. Der durch diese Übertemperatur im Gefäß erhöhte Druck sollte ungefähr dadurch ausgeglichen werden, daß das Wasserbad auf 16,0° gebracht wurde, so daß die Dichte des Quecksilberdampfes im Gefäß dem Sättigungsdruck bei 15,5° entsprach. Dann wurde die Glasstelle 2 abgeschmolzen und zuletzt die Quarzstelle 3. Damit sich bei der starken Erhitzung dieser Stelle 3 die Atome nicht zu unregelmäßig verteilten, waren die Volumina auf beiden Seiten ungefähr gleich gewählt.

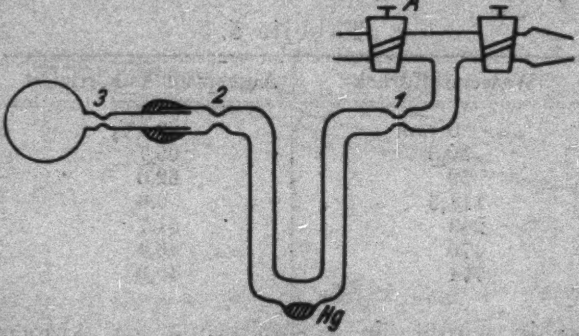


Fig. 8.

Trotz der sorgfältigen Behandlung wurden beim erstmaligen Erwärmen des Gefäßes im Ofen von 50° auf 305° soviel Quecksilberatome frei, daß die Absorption um 10 Proz. zunahm. Diese durch die Temperaturerhöhung von den Quarzwänden freigemachten Atome blieben bei Abkühlung des Gefäßes auf 50° noch frei, so daß zwischen 50° und 500° einwandfrei reproduzierbare Meßreihen gemacht werden konnten.

Im folgenden sind die Mittelwerte der an verschiedenen Tagen erhaltenen Meßreihen angegeben. Auf die Korrektion wegen des diffusen Lichtes wurde hier verzichtet, weil die Werte dadurch nur ungenauer geworden wären. Es genügt ja, diese Werte mit den unkorrigierten Werten der Absorption bei verschiedenen Wasserstoffdrucken zu vergleichen, weil die

Stellung der Resonanzlampe zwischen beiden Meßreihen nicht geändert wurde und daher das diffuse Licht denselben Bruchteil des gesamten Lichtes ausmachte. Die Pfeile neben den Meßreihen geben die Richtung der Temperaturänderung an.

Tabelle 6.

Ofentemperatur	Absorption unkorrigiert					Mittelwerte aus allen Messungen
50	↑ 53,7%	53,9%	↑ 53,3%	53,8%	↑ 54,4%	53,8%
310	50,6	52,5	49,4	50,2	49,9	50,5
500	47,4	↓ 47,4	47,4	↓ 48,5	48,5	47,8

Die Abnahme der Absorption bei einer Temperaturerhöhung von 50° auf 500° beträgt also im Mittel 6 Proz.

Besprechung der möglichen Fehlerquellen.

Vor der Diskussion der erhaltenen Resultate sollen die Umstände besprochen werden, die vielleicht eine Fälschung der Ergebnisse bewirken konnten.

Die Meßgenauigkeit ist durch die Intensitätsschwankungen der Primärlampe beschränkt und kann nur durch Vermehrung der Anzahl der Einzelmessungen erhöht werden. Der Fehler des Mittelwertes einer Reihe mag im allgemeinen etwa 0,5 Proz. betragen, wenn die Korrektion wegen des diffusen Lichtes nicht angebracht ist. Welche Fehler durch die ungenaue Bestimmung des Anteils des diffusen Lichtes bei den korrigierten Mittelwerten hineinkommen, läßt sich schwer abschätzen.

Größere Fehler können dadurch bedingt sein, daß die Zahl der Quecksilberatome sich in Wahrheit ändert, während sie als konstant angenommen wird. Bei den Messungen mit veränderlichem Wasserstoffdruck mit Gefäß Nr. 3 sind derartige Fehler vermieden worden. Dagegen stellte es sich als eine Schwierigkeit heraus, in einem abgeschmolzenen Gefäß bei steigender Temperatur dieselbe Anzahl für die Absorption wirksamer Quecksilberatome zu behalten; anscheinend waren an den Quarzwänden eine ganze Anzahl von ihnen ziemlich fest adsorbiert, die nun mit steigender Temperatur nach und nach in Freiheit gesetzt wurden. Dieses Freiwerden von Atomen geschah nicht etwa dadurch, daß bei der Anfangstemperatur der Quecksilberdampf schon dem Sättigungsdruck bei dieser Temperatur entsprochen hätte und nun mit steigender Temperatur ein Rest von kondensierten Atomen verdampft wäre, sondern erst bei Temperaturen, die weit über Zimmertemperatur lagen, stieg die Absorption infolge des Freiwerdens von Atomen. Die Zunahme der Absorption verschwand mit abnehmender Temperatur meist wieder, so daß man annehmen muß, daß die Atome wieder vom Quarz adsorbiert wurden. Ob die adsorbierten Atome dadurch für die Absorption unwirksam werden, daß sie andere Wellenlängen absorbieren als in freiem Zustande oder nur dadurch, daß sie außerhalb des Strahlenganges an den Wänden festgehalten werden, muß dahingestellt bleiben. Es scheint so, als ob die Adsorption um so stärker wird, je rauher die Quarzoberfläche ist; denn sie störte am meisten bei Gefäßen, die schon wiederholt mit Flußsäure gereinigt worden waren, um den Beschlag, der sich beim Anblasen des Ansatzstückes gebildet hatte, zu beseitigen. Darum wurde bei den endgültigen Messungen das neue Gefäß Nr. 4 benutzt. Die Tatsache, daß auch dieses Gefäß beim erstmaligen Erwärmen noch Quecksilberatome frei werden ließ, die zum Teil bei Abnahme der Temperatur wieder hätten adsorbiert werden können, macht das Resultat der Messungen nicht unsicher, da die Adsorption immer nur in dem Sinne wirken kann, daß die Absorption bei Temperaturerhöhung weniger abnimmt, als sie es ohne das Auftreten von Adsorptionserscheinungen tun würde. Also kann der Effekt in Wahrheit vielleicht größer, aber sicherlich nicht kleiner sein, als er gemessen wurde.

Daher sind die Messungen als experimentell genügend gesichert und einwandfrei zu betrachten, um aus ihnen unter Benutzung der früher gewonnenen Resultate über die selektive Absorption die entscheidenden Schlüsse ziehen zu können.

Diskussion des Resultates.

Bei einer Temperaturerhöhung des Absorptionsgefäßes von 50° auf 500° nimmt die Zahl der Zusammenstöße, die ein Quecksilberatom pro Zeiteinheit mit den Molekülen des umgebenden Gases erleidet, um das 1,55fache zu, da

$$\sqrt{\frac{500 + 273}{50 + 273}} = 1{,}55$$

ist. Diese Zunahme der Stoßzahl verursachte, wie aus Tab. 6

hervorgeht, eine Abnahme der Gesamtabsorption um 6 Proz. Um dieselbe Vermehrung der Stoßzahl bei konstanter Temperatur zu erzielen, muß der Druck des zugesetzten Wasserstoffs von 253 mm Hg auf 392 mm Hg erhöht werden. Aus der Tab. 4 und der zugehörigen Kurve *A* in Fig. 7 geht hervor, daß dieser Drucksteigerung eine Abnahme der Absorption um 5,5 Proz. entsprach. Der aus Tab. 5 und der Kurve *C* in Fig. 7 sich ergebende etwas niedrigere Wert von 4,7 Proz. ist aus den oben schon angeführten Gründen weniger zuverlässig.

Jedoch kann man aus den beiden innerhalb der Meßfehler übereinstimmenden Werten für die Abnahme der Absorption von 6 bzw. 5,5 Proz. erst dann schließen, daß wirklich die Zusammenstöße die Ursache der Linienverbreiterung sind, wenn man gezeigt hat, daß einerseits der Einfluß des Dopplereffektes zu vernachlässigen ist, und daß es andererseits nicht wesentlich darauf ankommt, ob bei beiden Meßreihen die gleiche Zahl von Quecksilberatomen und Wasserstoffmolekülen sich im Absorptionsgefäß befinden. Denn das ist wegen der starken Erhitzung des Quarzes beim Abschmelzen des Gefäßes und wegen der Adsorption von Quecksilberatomen an den Quarzwänden nicht vollkommen zu erreichen.

Wenn der Wasserstoffdruck im abgeschmolzenen Absorptionsgefäß etwas von dem angenommenen Wert von 253 mm verschieden ist, so ist das darum bedeutungslos, weil der fast geradlinige Verlauf der Kurven in Fig. 7 in der Nähe dieses Druckwertes zeigt, daß eine Drucksteigerung auf das 1,55fache, die der Temperaturerhöhung von 50° auf 500° entspricht, unabhängig vom Ausgangsdruck dieselbe Abnahme der Absorption bewirkt. Daß tatsächlich die Gesamtabsorption bei 50° in dem abgeschmolzenen Gefäß etwa 12 Proz. größer ist als der aus Tab. 4 und der Kurve *A* in Fig. 7 für 253 mm Wasserstoff und Quecksilberdampf vom Sättigungsdruck bei 15,5° folgende Wert, kann teilweise darauf beruhen, daß der Wasserstoffdruck niedriger als 253 mm ist. Zum größten Teil aber wird es daran liegen, daß beim erstmaligen Erwärmen noch Quecksilberatome frei geworden sind. Den Einfluß dieser Tatsache auf das Resultat kann man vielleicht daraus abschätzen, daß bei gleicher Änderung der Halbwertbreite nach den Kurven der Fig. 2, die allerdings unter idealisierenden Voraussetzungen berechnet worden sind, die Absorption ziemlich um gleiche Beträge abnimmt, unabhängig von dem Wert von $k_{\lambda_0, \Delta\lambda_1} \cdot l$, und damit unabhängig von ihrem anfänglichen Betrag. Betrachtet man z. B. die Kurve *C*, die für $k_{\lambda_0, \Delta\lambda_1} \cdot l = 2{,}5$ gezeichnet ist, so wächst die Halbwertbreite bei einer Abnahme der Absorption um 6 Proz. von 54 Proz. auf 48 Proz. von 3,05 $\Delta\,\lambda_1$ auf 3,7 $\Delta\,\lambda_1$. Würde man die Quecksilberdampfdichte im Absorptionsgefäß so vermindern, daß $k_{\lambda_0, \Delta\lambda_1} \cdot l = 2{,}0$ bzw. 1,5 würde, so ergäbe die gleiche Änderung der Halbwertbreite nach Kurve *B* bzw. *A* eine Abnahme der Absorption von 46,2 Proz. auf 40,6 Proz, also um 5,6 Proz. bzw. von 37,6 Proz. auf 32,2 Proz., also um 5,4 Proz. Darnach kann man wohl annehmen, daß statt der gemessenen Abnahme der Absorption um 6 Proz. von 53,8 Proz. auf 47,8 Proz. sich eine solche von etwa 5,5 Proz. ergeben hätte, wenn nur soviel Quecksilberatome im Absorptionsgefäß enthalten gewesen wären, wie es dem Sättigungsdruck bei 15,5° entspricht.

Bei der Temperaturerhöhung des Absorptionsgefäßes wird gleichzeitig mit der Vermehrung der Stoßdämpfung auch eine Vergrößerung der Linienbreite durch den zunehmenden Dopplereffekt erfolgen; doch wird diese auf Grund der oben angestellten Betrachtungen über die Superposition zweier verbreiternder Ursachen um so kleiner sein, je größer die durch die Stoßdämpfung bewirkte Verbreiterung gegenüber der Dopplerbreite bei der Anfangstemperatur ist. Aus der oben abgeleiteten Formel für die resultierende Halbwertbreite ergibt sich, daß der Dopplereffekt nur noch 16 Proz. der bei der Temperaturerhöhung erfolgenden Linienverbreiterung verursachen kann, wenn die Stoßdämpfung eine Linienbreite liefert, die gleich der zweifachen Dopplerbreite ist.

Nun kann man aber aus verschiedenen Gründen annehmen, daß bei 253 mm Wasserstoffzusatz die Stoßverbreiterung schon mehr als doppelt so groß ist wie die Dopplerverbreiterung. Rechnet man zunächst die Zahl der Zusammenstöße, die ein Quecksilberatom in der Sekunde erleidet, nach der kinetischen Gastheorie[1]) aus, so hat man zu setzen:

$$z = 2\,\sigma^2\, n_1 \cdot \sqrt{2\,\pi\, R\, T\, \frac{m_1 + m}{m_1 \cdot m}}\,.$$

Hierin ist n_1 die Zahl der Wasserstoffmoleküle pro Kubikzentimeter, T die absolute Temperatur, R die Gaskonstante, m bzw. m_1 das Molekulargewicht des Quecksilbers bzw. des Wasserstoffs, und σ die Summe der Molekülradien. Setzt man

---

[1]) **Boltzmann**, Vorlesungen über Gastheorie.

$$n = \frac{p\,N}{R\,T}\,1333{,}3\,,$$

wo p den Druck in mm Hg und N die Loschmidtsche Zahl bedeutet, so erhält man mit den Zahlenwerten:

$$N = 6{,}07 \cdot 10^{23};\ R = 8{,}316 \cdot 10^{7};\ T = 291:$$

$$z = 2{,}608 \cdot 10^{22} \cdot \sigma^2 \cdot p \cdot \sqrt{\frac{m + m_1}{m \cdot m_1}}$$

Setzt man für den gaskinetischen Durchmesser des Quecksilberatoms bzw. des Wasserstoffmoleküls $3{,}5 \cdot 10^{-8}$ cm bzw. $2{,}3 \cdot 10^{-8}$ cm an, also für σ: $2{,}9 \cdot 10^{-8}$ cm, so erhält man für $p = 253$ mm: $z = 3{,}92 \cdot 10^{9}$. Hieraus ergibt sich nach Lorentz die Halbwertbreite $\varDelta\nu = \frac{z}{2\pi}$ zu $6{,}25 \cdot 10^{8}$, also $\varDelta\lambda = \lambda \cdot \frac{\varDelta\nu}{\nu}$ für $\lambda = 2536{,}7$ Å zu $1{,}34 \cdot 10^{-3}$ Å, während sich bei derselben Linie für die Dopplerbreite $\varDelta\lambda = 1{,}10 \cdot 10^{-3}$ Å ergibt. Um die Breite der Absorptionslinie zu erhalten, muß man aber statt des gaskinetischen den Radius des angeregten Quecksilberatoms benutzen. Diesen hat Stuart¹) aus der Auslöschung der Resonanzstrahlung durch zugesetzten Wasserstoff und andere Gase etwa 3,4mal so groß wie den gaskinetischen gefunden. Wird die Stoßzahl mit dem hieraus sich ergebenden Radius des angeregten Quecksilberatoms von $5{,}95 \cdot 10^{-8}$ cm berechnet, so erhält man bei 253 mm Wasserstoffzusatz eine Halbwertbreite von $8{,}0_5 \cdot 10^{-3}$ Å.

Die gemessene Absorption nahm, wie aus Tab. 4 und Kurve B in Fig. 7 hervorgeht, bei Zusatz von 253 mm Wasserstoff von 70 Proz. auf 44 Proz. ab. Nach der berechneten Kurve B in Fig. 2 würde die Halbwertbreite bei dieser Abnahme gleich der 3,2fachen Dopplerbreite werden. Obgleich die Rechnungen unter der Voraussetzung durchgeführt sind, daß die Stöße eine exponentielle Intensitätsverteilung liefern, während die Theorie von Drude und Voigt für die Stoßdämpfung eine Absorptionskurve von der Form:

$$k_\lambda = \frac{k_{\lambda_0}}{1 + \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\varDelta\lambda}\right)^2}$$

---

1) H. A. Stuart, Ztschr. f. Phys. 32. S. 262. 1925.

gibt, würden sie doch ein ziemlich richtiges Bild liefern, wenn die Resonanzlinie wirklich einfach wäre. Aus den Messungen von **Malinowski**, der bei verschiedenen Luftdrucken im Absorptionsgefäß die Änderung der Absorption untersucht hat, wenn die einfallende Linie durch ein Magnetfeld gegen die Absorptionslinie verschoben wird, geht hervor, daß bei den hier benutzten Drucken die einzelnen Komponenten der Absorptionslinie sich schon stark überschneiden müssen. Dann ist die Abnahme der Absorption geringer als berechnet, da die zweite Komponente ebenfalls einen Beitrag zur Absorption liefert. Das bedeutet aber, daß die der Abnahme der Absorption von 70 Proz. auf 44 Proz. entsprechende Halbwertbreite größer sein muß als die 3,2fache Dopplerbreite. Die Verschmelzung der einzelnen Komponenten kann man auch daraus erkennen, daß nach der Tab. 4 und den Kurven *A*, *B* in Fig. 7 die Absorption des diffusen Lichts von derjenigen der Resonanzstrahlung kaum noch verschieden ist. Damit ist nun auch gezeigt, daß der Dopplereffekt keinen wesentlichen Einfluß hat.

Es möge noch einmal darauf hingewiesen werden, daß die Abnahme der Absorption zwischen 50° und 500° sicher etwas zu klein gemessen worden ist, da vermutlich auch bei dieser Meßreihe einige Quecksilberatome von den Quarzwänden adsorbiert worden sind, die erst bei höheren Temperaturen wieder frei wurden. Einen Hinweis darauf könnte man vielleicht darin sehen, daß die Absorption zwischen 310° und 500° verhältnismäßig stärker abgenommen hat als zwischen 50° und 310°. Doch reicht zu einer Entscheidung die Meßgenauigkeit kaum aus. Eine größere Abnahme der Absorption bei Temperaturerhöhung wäre an sich zu erwarten, da neben der Zahl der Stöße auch ihre Heftigkeit zunimmt und dies doch wohl irgendeinen Einfluß haben muß.

Da die Diskussion gezeigt hat, daß die Absorption bei Temperaturerhöhung innerhalb der Versuchsfehler um denselben Betrag abnimmt wie bei der entsprechenden Druckerhöhung, wobei der Dopplereffekt keine Rolle spielt, ist wohl sichergestellt, daß die Quecksilberresonanzlinie bei Zusatz von Wasserstoff durch die *Stöße* der Wasserstoffmoleküle verbreitert wird — mag man nun die Wirkung dieser Stöße nach der Theorie von **Lorentz** oder quantentheoretisch auffassen —

und *nicht* durch die *molekularelektrischen Felder* im Sinne der Theorie von Holtsmark.

Zusammenfassung.

1. Unter der Voraussetzung, daß die Intensitätsverteilung des einfallenden Lichtes durch

$$J_\lambda{}^0 = J_{\lambda_0}^0 \cdot e^{-\ln 2\left(\frac{\lambda-\lambda_0}{\Delta\lambda_1}\right)^2}$$

und die Verteilung der Absorptionsfähigkeit durch

$$k_\lambda = k_{\lambda_0,\,\Delta\lambda_2} \cdot e^{-\ln 2\left(\frac{\lambda-\lambda_0}{\Delta\lambda_2}\right)^2}$$

gegeben ist, wird eine Reihenentwicklung angegeben, die die Gesamtabsorption der Strahlung in einer Quecksilberdampfschicht zu berechnen gestattet. Der Wert dieser Reihe wird für eine Anzahl von Werten der unabhängigen Variablen ermittelt, wobei sich ergibt, daß die Gesamtabsorption bei gleichbleibender Dichte des Quecksilberdampfes abnimmt, wenn die Halbwertbreite der Absorptionslinie wächst.

2. Es wird die resultierende Form der Absorptionslinie berechnet, wenn zwei verbreiternde Ursachen zusammenwirken, die jede für sich der Linie die Gestalt einer Fehlerkurve geben würden.

3. Die Absorbierbarkeit der Resonanzstrahlung wird um so geringer, je dicker die von der Strahlung vorher schon durchsetzte Quecksilberdampfschicht ist.

4. Die Abhängigkeit der Gesamtabsorption von der Dichte des Quecksilberdampfes im Absorptionsgefäß wird gemessen und mit der berechneten in Übereinstimmung gefunden.

5. Die bei steigender Temperatur durch Vergrößerung des Dopplereffekts verursachte Verbreiterung der Absorptionslinie wird durch die Abnahme der Gesamtabsorption bei konstanter Quecksilberdampfdichte experimentell nachgewiesen.

6. Hat man bei konstanter Quecksilberdampfdichte Wasserstoff von verschiedenen Drucken im Absorptionsgefäß, so nimmt die Gesamtabsorption mit steigendem Wasserstoffdruck ab. Bei konstanter Dichte des Wasserstoffs und des Quecksilberdampfes nimmt die Gesamtabsorption mit steigender Temperatur ab. In beiden Fällen wächst also die Halbwertbreite der Absorptionslinie.

7. Die Abnahme der Absorption, und damit die Vergrößerung der Halbwertbreite der Absorptionslinie, stimmt bei

Erhöhung der Temperatur von T_1 auf T_2, und bei Vermehrung des Druckes auf das $\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$-fache nahezu überein. Da in beiden Fällen die Stoßzahl in gleicher Weise zunimmt, während die mittlere Feldstärke, die durch die Wasserstoffmoleküle geliefert wird, im ersten Fall konstant bleibt und im zweiten Fall sich ändert, wird hieraus geschlossen, daß die Stoßdämpfung durch die Wasserstoffmoleküle die maßgebende Ursache für die Verbreiterung der Quecksilberresonanzlinie ist.

Das in der Einleitung genannte Problem war von Hrn. Prof. Einstein gestellt worden; daraufhin wurde die vorliegende Arbeit im physikalischen Institut der Universität Berlin auf Anregung und unter Leitung von Hrn. Prof. P. Pringsheim ausgeführt, dem ich auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank für sein stetes förderndes Interesse aussprechen möchte.

Hrn. Prof. Nernst bin ich für die Bereitstellung der Institutsmittel zu Dank verpflichtet, ferner dem Kaiser Wilhelm-Institut für Physik und dem Elektrophysik-Ausschuß der Notgemeinschaft für die Gewährung von Mitteln, aus denen ein großer Teil der Apparate beschafft werden konnte.

Nachtrag bei der Korrektur.

In einer neueren Arbeit hat Wood[1]) mit der Methode der gekreuzten Lummer-Gehrcke-Platten gezeigt, daß die Linie 2536,7 Å aus 5 Komponenten besteht, die gegenseitige Abstände von etwa 0,01 Å haben. Diese sind in der Bogenlampe gleich intensiv und werden auch in gleicher Weise vom Quecksilberdampf absorbiert, so daß sie in der Resonanzstrahlung wohl auch gleich stark auftreten. Dieses Ergebnis berührt die vorstehende Untersuchung nicht, da sich die Verbreiterung und Änderung der Absorption bei jeder der 5 Komponenten so abspielt, wie bei einer einzigen, solange die Verbreiterung klein bleibt. Auf den Einfluß der Überlagerung der verschiedenen Komponenten der Absorptionslinie bei größeren Verbreiterungen ist schon oben hingewiesen worden.

---

1) R. W. Wood, Phil. Mag. 50. S. 761. 1925.

(Eingegangen 10. November 1925.)

2. *Über die beim Magnetismus der Gase beobachtete Anomalie;*

von A. Glaser.

Die vorliegende Arbeit enthält die Fortsetzung der Untersuchung über die in einer früheren Arbeit mitgeteilte Anomalie, welche beim Diamagnetismus der molekularen Gase gefunden worden war.[1]) Wir werden im folgenden diese Arbeit der Kürze halber mit Veröffentlichung I zitieren.

1. Die Versuchsanordnung war bei der vorliegenden Untersuchung im Prinzip dieselbe wie bei Veröffentlichung I. Wir geben den zur Messung der Suszeptibilitäten verwendeten Apparat in Figg. 1 und 2 wieder. Die beiden Zeichnungen stellen zwei aufeinander senkrechte Schnitte durch den Apparat dar. In ihnen wird man ohne weiteres sämtliche in Veröffentlichung I beschriebenen Teile wiedererkennen. Die Verbesserungen des Apparates gegenüber dem früheren sind lediglich technischer Natur. Es sollte neben einer Erhöhung der Stabilität vor allem eine größere Handlichkeit und die Möglichkeit gewährleistet sein, auch bei höheren Drucken mit dem Apparate arbeiten zu können. Diese letztere Forderung machte vor allem eine Umarbeitung derjenigen Schliffe nötig, die bei der Messung stets leicht drehbar sein sollten, also in erster Linie des Schliffes am Torsionskopf. Wir hatten in Veröffentlichung I lediglich konische Schliffe aus Messing benützt. Es hatte sich aber schon damals gezeigt, daß solche Schliffe auch bei sorgfältigster Fettung nach einiger Zeit festgefressen sind. Um so mehr war dies bei Arbeiten mit höheren Drucken zu erwarten, da in diesem Falle auf den Schliffen stets der durch eine Überfangsmutter erzeugte hohe Gegendruck liegen muß. Aus diesem Grunde haben wir nunmehr eine Kombination des konischen Schliffes mit dem Planschliffe angewendet. Dieselbe vereinigt die Vorteile beider Schliffe und hat sich ausgezeichnet bewährt. Wir geben sie in Fig. 3 wieder. Als

---

[1]) Ann. d. Phys. 75. S. 459. 1924.

weitere Neuerung ist an dem Apparate eine Vorrichtung zum Arretieren des schwingenden Systemes zu bemerken. Sie

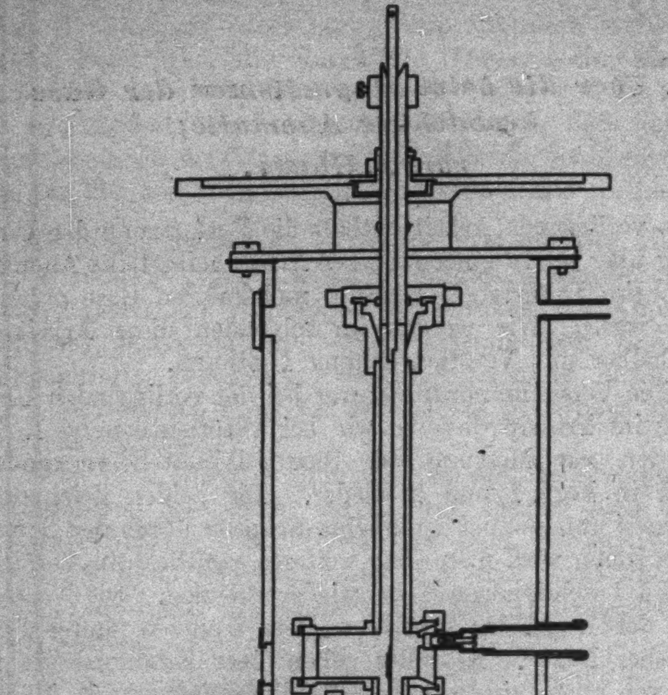


Fig. 1.

diente zur Schonung der Quarzfäden, an denen das System aufgehängt ist. Nächstdem bietet sie beim Auswechseln der

Quarzfäden große Vorteile. Da der ganze Apparat aus Messing gebaut war, mußten zur Beobachtung des Spiegels im Wassermantel wie auch im Versuchsrohr entsprechende Fenster angebracht sein. Gegenüber dem Fenster ist an der Rückseite

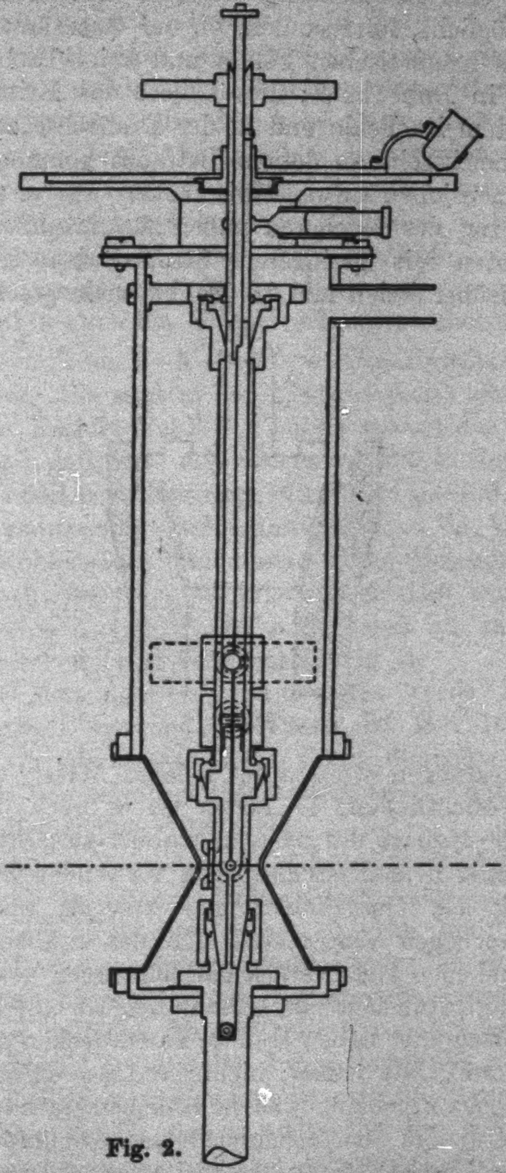


Fig. 2.

des Versuchsrohres außerdem ein kleines elektrisches Lämpchen angebracht. Es diente zur Beleuchtung des Quarzfadens und ermöglichte eine Beobachtung desselben mit einer Lupe. So war es ermöglicht, festzustellen, ob der Quarzfaden beim Einschalten des magnetischen Feldes und beim Drehen des Torsionskopfes in Ruhe blieb; dies bildete das Kriterium dafür, ob das System im Felde und in der Drehachse zentriert war. Da das Versuchsrohr an den in Betracht kommenden Stellen kleinere Dimensionen aufweist wie früher, war es möglich, mit den Polspitzen des Magneten näher zusammenzugehen. Dadurch konnten mit geringeren Stromstärken gleich starke Felder wie früher erzielt und der Magnet mehr geschont werden.

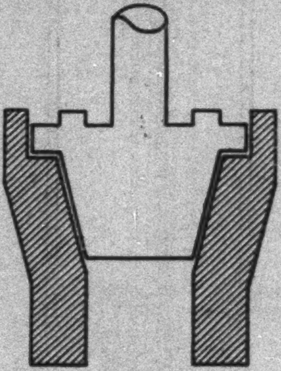


Fig. 3.

Die Messungen wurden in gleicher Weise vorgenommen wie in Veröffentlichung I. Leider ist es auch diesmal nicht geglückt, die Nullage des Systems stabiler zu gestalten. Trotzdem ein völlig homogenes Stäbchen verwendet wurde und die Befestigung des Quarzfadens und Spiegels mit besonderer Sorgfalt geschehen war, stellte sich das Stäbchen, wenn es durch irgendeinen Zufall stark ins Schwingen gekommen war, in eine andere Ruhelage ein, ohne daß sonst eine Veränderung, die dies verschuldet haben konnte, zu entdecken gewesen wäre. Es blieb somit, wie früher, nichts anderes übrig, als es aufs peinlichste zu vermeiden, daß das Stäbchen stark ins Schwingen kam. Aus diesem Grunde geschah das Abpumpen des Gases mit größter Vorsicht, besonders bei tieferen Drucken, wo das Stäbchen durch unvorsichtiges Öffnen des Hahnes zur Pumpe besonders stark ins Schwingen kommt. In Tab. 1 d, g und 3 a finden sich Stellen, wo dies trotzdem eintrat. Um den Anschluß an die Messungsreihe dennoch zu erhalten, wurde noch einmal der frühere Druck eingestellt und dann die Messung vorsichtiger fortgesetzt. In Tab. 1 d wurde diese Korrektion nicht sofort vorgenommen, sondern durch die Messungsreihen I e, f bewirkt. Aus dem obigen Grunde wurden auch Messungsreihen, die bis etwa 5 cm Hg Druck vorgeschritten waren, des öfteren nicht weitergeführt; denn bei Drucken in dieser Gegend passiert es sehr leicht, daß beim Öffnen des Hahnes zur Pumpe das Stäbchen außerordentlich stark ins Schwingen kommt. Wenn es nötig war, bis auf Vakuum zu pumpen, so mußte dies von einem wesentlich höheren Punkte aus ohne Unterbrechung geschehen.

2. In den Tabb. 1—5 geben wir die Resultate der Messungen wieder. Sie sind in der gleichen Weise wie früher berechnet. Als Empfindlichkeit 1 haben wir wieder die in Veröffentlichung I definierte angenommen. Die in der vorletzten Spalte der Tabellen enthaltenen Werte sind die auf diese Empfindlichkeit reduzierten Retorsionswinkel. Als Vergleichsgas haben wir Kohlensäure genommen, deren Suszeptibilität aus früheren Messungen bekannt ist; denn sie läßt sich von allen bisher gemessenen Gasen am einfachsten in hinreichender Reinheit darstellen (vgl. Veröffentlichung I).

Für die Messungen am Sauerstoffe wurde Lindescher Bombensauerstoff verwendet. Dieser ist fast 100prozentig. Die Spuren von Verunreinigungen durch diamagnetische Gase spielen neben der gewaltigen paramagnetischen Suszeptibilität des Sauerstoffes sicher keine Rolle.

Das Kohlenoxyd wurde aus Oxalsäure und konz. Schwefelsäure bereitet, die dabei in äquimolaren Mengen entstehende Kohlensäure mit Kalilauge, festem Ätzkali und Natronkalk absorbiert. Der aus atmosphärischer Luft, die in den Oxalsäurekristallen eingeschlossen ist, herrührende Sauerstoff wurde mangels eines anderen Mittels mit Pyrogallol und Chromchlorür absorbiert. Da dasselbe durch Reduktion von Kaliumdichromat mit Hilfe naszierenden Wasserstoffes bereitet wurde, so ist es wahrscheinlich, daß es später bei seiner Verwendung Wasserstoff, wenn auch in kleinen Mengen abgab. Auch sind wir nicht sicher, ob durch diese Prozedur der Sauerstoff restlos beseitigt wurde. Der Fehler, mit dem die Messungen am

CO aus diesem Grunde behaftet sein können, wird aber auf keinen Fall 10 Proz. überschreiten.

Außerdem wurden die Messungen an CO_2 teilweise wiederholt. Dies hatte folgenden Grund: Aus Veröffentlichung I ist erinnerlich, daß die in der dortigen Fig. 4 dargestellten Messungen an Kohlensäure die Eigentümlichkeit aufwiesen, daß die

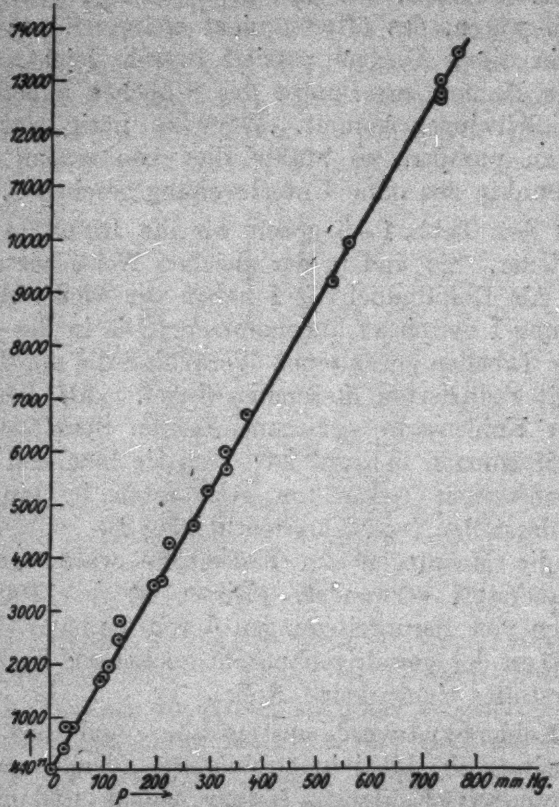


Fig. 4. Tabelle 1a, b, e, f, g. Sauerstoff.

aus der Messungsreihe III a und b sich ergebende Kurve nicht mit der aus III c folgenden deckte, sondern daß die Abweichung von der Geradlinigkeit in der letzteren bei einem etwas tieferen Drucke eintrat, als in den beiden ersteren. Wir hatten damals die Vermutung ausgesprochen, daß die Ursache hierfür in einer unbeachtet gebliebenen Verkleinerung der magnetischen Feldstärke liegen könnte. Dies hat sich tatsächlich als richtig herausgestellt. Nach Messungsreihe III c wurde nämlich bemerkt, daß 2 Spulen des Elektromagneten Schluß mit dem Spulenkörper hatten. Sie wurden daraufhin ausgeschaltet. Aus diesem Grunde sind die Messungen III d und alle folgenden nur mit 6 statt mit allen 8 Spulen gemacht.

Bei der Reparatur der Spulen zeigte sich aber, daß auch eine Anzahl Windungen der Spule kurzgeschlossen war. Damit ist die Verkleinerung der Feldstärke sichergestellt. Eine Nachmessung der betreffenden Feldstärken nach Reparatur des Magneten bei dem früheren Polspitzenabstand ergab die in Tab. 5 b wiedergegebenen Feldstärken. Sie gelten für die Messungsreihen I a bis III b der Veröffentlichung I. Für die übrigen Messungsreihen der Veröffentlichung I bleiben die in dort angegebenen Feldstärken bestehen. Für die Messungsreihen der vorliegenden Veröffentlichung sind die Feldstärken in Tab. 5 a wiedergegeben.

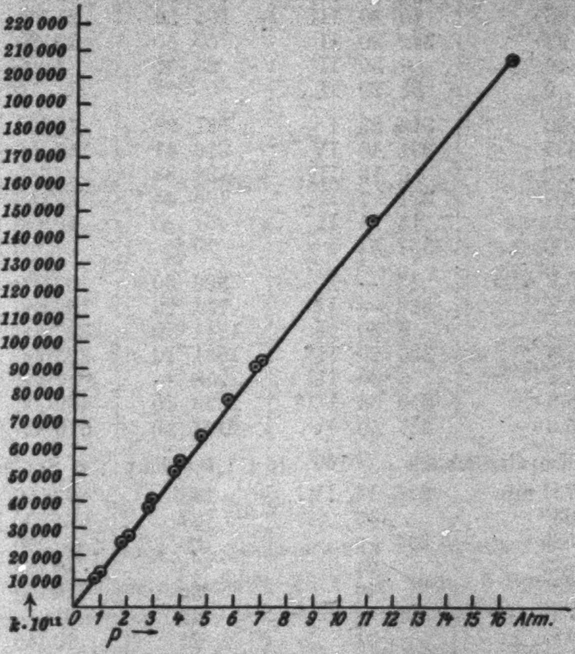


Fig. 5. Tabelle 1c, h. Sauerstoff.

Die in der letzten Spalte der Tabellen angegebene Suszeptibilität ist auf den aus Veröffentlichung I entnommenen Wert

$$\overset{760}{k}_{CO_2} = 84 \cdot 10^{-11}$$

bezogen.

Tabelle 1.

Sauerstoff.

Empfindlichkeit 0,2896; 15° C; 7 Amp.; 8 Spulen.

	P	*E*	*Δ α*	*Δ α′*	*k* · 10^{11}
a)	760 mm	345° 14′ II[1]	408° 6′	84700′	13500
	558	3 30 I	299 50	62200	9900
	368	10 10 IV	203 10	42500	6770
	295	325 — III	158 20	32870	5250
	196	18 30 III	104 50	21750	3460
	94	342 30 II	50 50	10550	1690
	45	9 30 II	23 50	4900	782
	0	33 20 II	0	0	0
b)	730	316 23 I	381 28	79200	12620
	532	331 10 IV	276 41	57500	9160
	270	10 13 III	138 38	28750	4580
	207	321 7 II	106 44	22150	3530
	101	15 21 II	51 30	10900	1740
	0	337 51 I	0	0	0
c)	0,8 Atm.	15 — I	326 30	67700	10800
	1,8	327 — I*	734 30	154900	24700
	2,8	9 50 II	1141 40	237000	37800
	3,8	320 20 II*	1551 10	322000	51400
	4,8	3 30 III	1958 —	407000	64800
	5,8	315 50 III*	2366 40	489000	78000
	6,8	357 40 IV	2774 50	576000	91800
	Empfindlichkeit 0,00199; 15 C; 0,5 Amp.; 8 Spulen.				
d)	731 mm	336 17 IV	145′	72750	11600
	630	40	122	61200	9750
	530	337 2	100	50200	8000
	429	24	78	39150	6240
	330	46	56	28130	4480
	230	338 —	42	21080	3360
	131	21	21	10540	1680
	81,5	338 32	10	5020	800
	31	41,5	0,5	251	400
	0	42	0	0	0
e)	731	336 23 IV	162	81300	12960
	329	337 50,5	74,5	37400	5960
	230	338 12	53	26620	250
	131	34	31	15580	2420
	32	55	10	5020	800
	0	339 5	0	0	0

---

[1] Die römischen Ziffern hinter den Ablesungen am Teilkreise zeigen an, bei welchem der 4, um 90° voneinander entfernten Nonien am Torsionskopfe die Ablesung erfolgte. Durch eine Drehung um einen Winkel der in der Nähe von 360° liegt, kann unter Umständen bewirkt werden, daß die Ablesung beim gleichen Nonius erfolgen mußte. In diesem Falle trägt die betreffende römische Ziffer einen *.

Tabelle 1 (Fortsetzung).

	P	E	$\Delta\alpha$	$\Delta\alpha'$	$k \cdot 10^{11}$
f)	110	338 48 IV	24	12060	1924
	0	339 12	0	0	0
Empfindlichkeit 0,000047; 15° C; 0,05 Amp.; 8 Spulen.					
g)	731	347 57 IV	3,6	79600	12700
	530	58	2,6	57500	9170
	330	59	1,6	35400	5650
	131	348 —	0,6	13520	2800
	131	348 5			
	20	5,5	0,1	2210	353
	0	5,6	0	0	0
Empfindlichkeit 0,000095; 15° C; 0,1 Amp.; 8 Spulen.					
h)	1 Atm.	26 8 II	8	83900	13380
	2,08	26	16	167800	26740
	3,01	25 52	24	251700	40100
	4,01	25 44	32	335600	55500
	7,02	25 20	56	587000	93500
	11,01	24 48	88	923000	147300
	15,98	24 8	128	1343000	314300

Tabelle 2.

Kohlensäure (Vergleichsmessung für Sauerstoff).

Empfindlichkeit 0,2896; 15° C; 7 Amp.; 8 Spulen.

	P	E	$\Delta\alpha$	$\Delta\alpha'$	$k \cdot 10^{11}$
a)	744 mm	54° 27′ III	149′	515′	82,2
	643	7	129	447	71,2
	543	53 47	109	377	60,1
	443	27	89	308	49,4
	343	7	69	239	38,1
	244	52 57	59	204	32,6
	144	47	49	169	27
	44	27	29	100	15,95
	0	51 58	0	0	0
b)	737	334 4 II	148	510	81,3
	336	332 44	68	235	37,5
	237	332 34	58	201	32,7
	0	331 36	0	0	0

Tabelle 3.

Kohlenoxyd CO.

Empfindlichkeit 0,5; 15° C; 7 Amp.; 8 Spulen, dünnerer Quarzfaden.

	P	E	$\Delta\alpha$	$\Delta\alpha'$	$k \cdot 10^{11}$
a)	793 mm	17° 40′ I	135′	270′	42,7
	592	5	100	200	31,6
	492	16 47	82	164	25,9
	392	40	75	150	23,7
	292	35	70	140	22,1
	192	30	65	130	20,6
	92	16 10			
	92	17 30	45	90	14,2
	42	17 10	25	50	7,9
	5	16 45	0	0	0
b)	760	16 40 I	130	260	41,2
	374	15 37	67	134	21,2
	173	20	50	100	15,8
	5	14 30	0	0	0
c)	758	15 17 I	130	260	41,2
	558	14 42	95	190	30
	458	25	78	156	24,7
	300	15	68	136	21,5
	208	5	58	116	18,7
	104	13 47	40	80	12,6
	54	27	20	40	5,97
	5	7	0	0	0

Tabelle 4.

Kohlensäure (-Vergleichsmessung für Kohlenoxyd.)

Empfindlichkeit 0,5; 15° C; 7 Amp.; 8 Spulen.

	P	E	$\Delta\alpha$	$\Delta\alpha'$	$k \cdot 10^{11}$
a)	432 mm	26° 3′ I	256	512	80,9
	332	23 43	116	232	36,7
	132	23 —	73	146	23,1
	0	21 47	0	0	0
b)	740	13 30 I	260	520	81,8
	340	12 10	120	240	38,0
	240	11 52	112	224	35,4
	140	11 35	85	170	26,9
	0	10 10	0	0	0

Tabelle 5a.

Feldmessung.

Amp.	Spulen	Amp. × Spulen	Galvanometer Ausschlag s	$\mathfrak{H} = \frac{H s f_0}{s_0 f}$ (Gauss)
7	8	56	14,7	5100
6	8	48	13,6	4700
5	8	40	11,5	4000
2	8	16	4,9	1700
0,5	8	4	1,2	417

Tabelle 5b.

Berichtigung der Feldstärken von Veröffentlichung I, Tabellen 1 a, b, c; 2 a, b, c; 3 a, b; 2 f; 2 d.

Amp.	Spulen	Amp. × Spulen	Galvanometer Ausschlag s	$\mathfrak{H} = \frac{H s f_0}{s_0 f}$ (Gauss)
8	8	64	14,7	5100
7	8	56	13,8	4800
5	8	40	10,7	3700

Probespule: Windungen 10,
Radius 0,5 cm,
Windungsfläche $f = 8{,}85$ qcm.

Erdinduktor: Windungen 390,
Mittlerer Radius 18,65 cm,
Windungsfläche $f_0 = 425943{,}43$ qcm.

Horizontalkomponente des Erdfeldes $H = 0{,}260$ Gauss.

Ausschlag bei Drehung des Erdinduktors um 180°, $s_0 = 285$ mm.

Die Werte aus Tab. 1 sind in Figg. 4 und 5, die aus Tab. 3 in Fig. 6, die aus Tabb. 2 und 4 sind in Fig. 7 und die aus Tab. 5 in Fig. 8 dargestellt.

3. Aus diesen Messungen ergeben sich zunächst die aus Tab. 6 ersichtlichen Suszeptibilitäten, je nachdem man den einen oder anderen der beiden in I gefundenen Werte der Suszeptibilität von Kohlensäure annimmt. Die betreffenden Werte sind jeweils am Kopfe der Spalte angegeben.

Tabelle 6.

Stoff	$k \cdot 10^{11}$ $k_{CO_2} = 79{,}75 \cdot 10^{-11}$ 15° Cels. $p = 760$ mm	$k \cdot 10^{11}$ $k_{CO_2} = 84{,}0 \cdot 10^{-11}$ 15° Cels. $p = 760$ mm
O_2	12720	13400
CO	39	41,1

Ferner ergeben die Messungen das Folgende:

Beim Sauerstoff konnte keinerlei Abweichung von der Druckproportionalität der Suszeptibilität gefunden werden, obwohl die Messungen über einen Druckbereich von 1 bis 15 Atmosphären ausgedehnt wurden bei Feldern von 5100 bis herunter zu 42 Gauss.

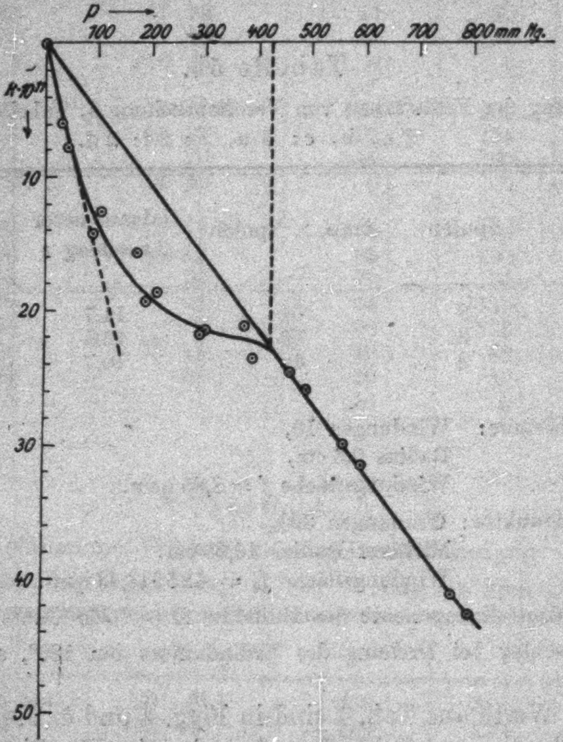


Fig. 6. Tabelle 3. Kohlenoxyd.

Beim Kohlenoxyde dagegen erhielten wir ziemlich genau das gleiche Bild wie beim Stickstoff.

Um die bisher an diamagnetischen Gasen gefundenen Resultate unter gemeinsamen Gesichtspunkten betrachten zu können, stellen wir sie in der folgenden Tabelle zusammen.

Tabelle 7.

Stoff	$\Theta \cdot 10^{40}$	Z	$\mathfrak{H}$[1] (Gauss)	$\sqrt{\mathfrak{H}}$	p
H_2	0,143	2	5100	71,5	615
			3700	60,8	600
N_2	14,7	14	5100	71,5	415
			3700	60,8	350
CO_2	174 ?	22	5100	71,5	325
	8,6 ?		4500	67	300
			3800	61,7	275
			2700	52	255
CO	14,7	14	5100	71,5	425

In der ersten Spalte sind die jeweiligen Stoffe verzeichnet; in der zweiten die Trägheitsmomente der betreffenden Moleküle[2]); in der dritten die Anzahl der in ihnen enthaltenen Elektronen; in der vierten die jeweiligen Versuchsfeldstärken; in der sechsten diejenigen Drucke, bei denen unsere Kurven von der Druckproportionalität abwichen.

In den Figg. 9 und 10 ist nun der Versuch gemacht, die Abhängigkeit der genannten Drucke einerseits von der Feld-

---

1) Da es sich bei den Versuchen um inhomogene Felder handelt, kommt diesen Feldstärken keine absolute Bedeutung zu; denn entlang dem Stäbchen herrscht infolge der Inhomogenität des Feldes eine von Punkt zu Punkt andere Feldstärke. Sie hat in der Mitte des Stäbchens einen Maximalwert, nach den Enden zu nimmt die Feldstärke ab. Die gemessene Feldstärke ist aber gleich dem Maximalwerte. Da das Stäbchen jedoch bei allen Messungen der Veröffentlichung I die gleiche Länge und stets in die gleiche Lage relativ zum Felde gebracht wurde, so kommt diesen Messungen doch ein relativer Wert zu. Bei den Messungen an CO war die Länge des Stäbchens und der Abstand der Polspitzen des Magneten anders. Durch geeignete Wahl der Lage des Stäbchens relativ zum Felde konnte aber erreicht werden, daß bei den Vergleichsmessungen an der Kohlensäure die Abweichung von der Druckproportionalität an derselben Stelle erfolgte wie bei den Messungen in Veröffentlichung I. Dies wurde als Kriterium dafür angesehen, daß der Mittelwert der Feldstärke über das Volumen des Stäbchens der gleiche war wie in Veröffentlichung I.

2) Aus Landolt-Börnstein, V. Aufl. Tab. 38, d D. S. 123.

stärke, andererseits vom Trägheitsmomente darzustellen. Diese Darstellung ist auf rein empirischem Wege gefunden, einfach durch Probieren, welche Potenz der betreffenden Größen den Versuchsergebnissen am meisten Rechnung trägt. Für die Feldstärke ergab sich

$$p = C_1 \sqrt{\mathfrak{H}}. \tag{1}$$

Beim Trägheitsmomente ergab sich bei keiner rationalen Potenz eine genügende Darstellung der Versuchsergebnisse;

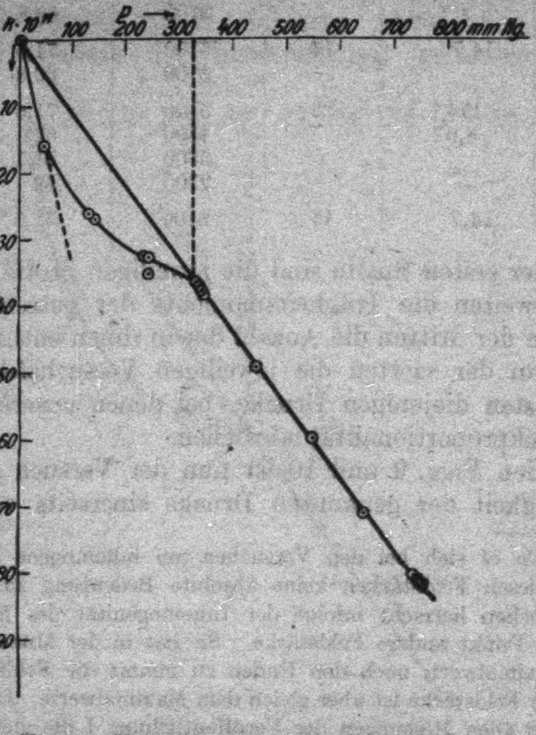


Fig. 7. Tabelle 2 u. 4. Kohlensäure.

eine solche konnte erst erhalten werden, nachdem noch die Anzahl der im Molekül enthaltenen Elektronen in den Kreis der Betrachtungen gezogen worden war. Dann ergab sich mit guter Übereinstimmung mit den Beobachtungen

$$p = C_2 \frac{z}{\sqrt{\Theta}}. \tag{2}$$

Hierzu ist noch folgendes zu sagen:

Bei der Darstellung der Abhängigkeit von der Feldstärke stimmen alle Punkte sehr gut mit Ausnahme eines einzigen, nämlich desjenigen für Wasserstoff bei 3700 Gauss. Dieser Punkt ist jedoch mit einer großen Unsicherheit behaftet, da bei der betreffenden Messung die damalige Empfindlichkeit der Anordnung kaum mehr ausreichte. Daß hier etwas nicht in Ordnung war, kann man schon aus dem Verlaufe der Kurven in Veröffentlichung I, Fig. 5, ersehen. In Fig. 10 haben wir versuchsweise den nach Fig. 9 korrigierten p-Wert eingetragen (H_2?). Außerdem ist der CO_2-p-Wert für 3700 Gauss, bei welcher Feldstärke keine Messungen gemacht worden waren, aus Fig. 9 entnommen. Aus Tab. 7 ersieht man, daß für das Trägheitsmoment der Kohlensäure zwei Werte vorliegen, von denen der eine sicher zu groß, der andere zu klein ist. Aus

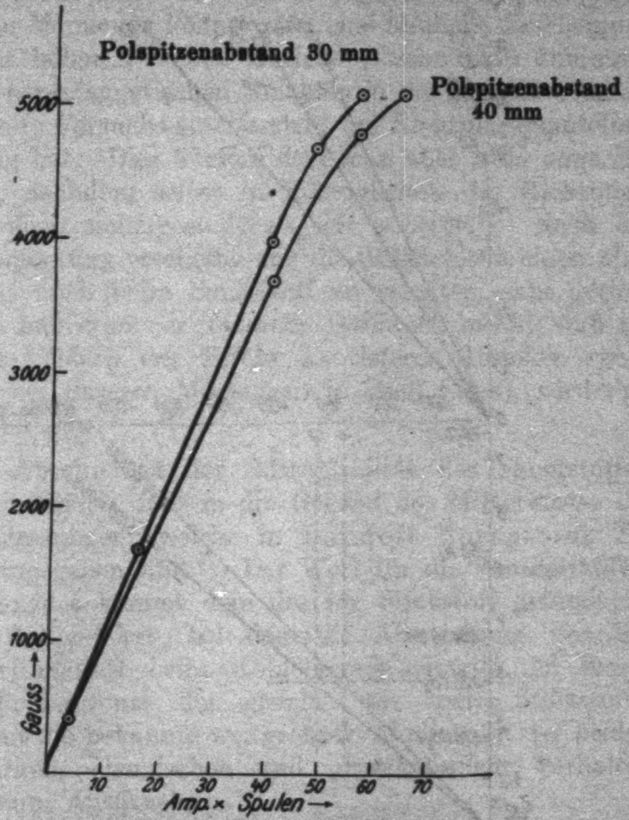


Fig. 8. Tabelle 5a, b. Feldstärken.

Fig. 10 ergibt sich als Trägheitsmoment der Kohlensäure der zwischen den beiden obigen Werten gelegene Wert

$$\Theta_{CO_2} = 59{,}5 \cdot 10^{-40}.$$

Obwohl das Material, das diesem Darstellungsversuche zugrunde liegt, noch etwas dürftig ist, und obwohl für die Bestimmung der p-Werte infolge der immerhin großen Flachheit der Kurve an der betreffenden Stelle ein gewisser Spielraum bleibt, glauben wir doch in der gefundenen Übereinstimmung mehr als ein Spiel des bloßen Zufalles sehen zu müssen, vor allem deswegen, weil unsere Geraden in beiden Figuren scharf auf den Nullpunkt zielen, welcher einerseits

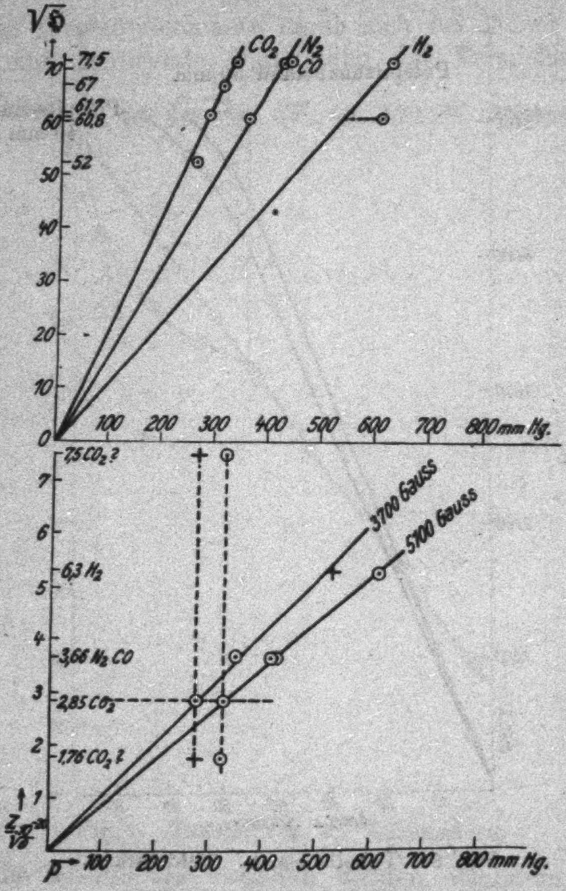


Fig. 9 u. 10. Tabelle 7.

der Feldstärke 0, andererseits einem unendlich großen Trägheitsmomente entspricht. In diesen Fällen würde selbst bei den tiefsten Drucken die als Ursache der Erscheinung angesprochene Orientierung der Gasmoleküle im Felde nicht eintreten können. Daß beim Sauerstoffe als bei einem paramagnetischen Gase kein ähnlicher Effekt gefunden wurde, ist weiter nicht verwunderlich. Denn bei der Größe des paramagnetischen Momentes könnte man eine ähnliche Erscheinung erst bei sehr hohen Drucken erreichen, wenn man annimmt, daß für die paramagnetischen Moleküle in den Druckbereichen, in denen unsere Versuche stattfanden, die Richtungsquantelung noch Geltung hat. Dies letztere darf man aber wohl ohne Bedenken tun, nachdem selbst in Flüssigkeiten die Richtungsquantelung noch sichergestellt zu sein scheint.[1] Nach der letzteren Bemerkung erscheint uns die Möglichkeit einen ähnlichen Effekt auch beim Sauerstoff zu erhalten, sehr gering. Selbst wenn man von der Tatsache Gebrauch macht, daß bei schwächeren Feldern der Effekt zu tieferen Drucken rückt (wie wir es bei unseren Messungen ja auch taten), wird dies kaum möglich sein.

4. Der Absolutwert der Suszeptibiltät des Sauerstoffes, den wir oben fanden, fällt in die Gegend des Mittelwertes der bisherigen Messungen, welche in Landolt-Börnsteins Tabellenwerk angegeben sind.[2] Der Wert für die Suszeptibilität des Kohlenoxydes kommt dem des für Stickstoff gefundenen sehr nahe, der p-Wert, bei dem die Abweichung von der Druckproportionalität beim Kohlenoxyde eintritt, ist innerhalb der Fehlergrenze der gleiche, wie beim Stickstoffe. Hierin kommt die bekannte weitgehende Ähnlichkeit der beiden Stoffe in ihrem chemischen und physikalischen Verhalten neuerdings zum Ausdrucke.

Die beiden Formeln, welche wir aus den Ergebnissen folgern zu müssen glauben, liefern zusammengefaßt die Beziehung

$$p = C' \cdot \frac{z\sqrt{\mathfrak{H}}}{\sqrt{\Theta}} . \tag{3}$$

---

[1] Vgl. Sommerfeld, Atombau, IV. Aufl. 8. Kap. § 4. Dort finden sich auch weitere Zitate.

[2] Landolt-Börnstein, V. Aufl. Tab. 234. S. 1198ff.

Bezüglich Feldstärke und Trägheitsmoment stellt sie den quantitativen Ausdruck dessen dar, was wir in Veröffentlichung I rein qualitativ aus der Annahme, daß es sich um eine Orientierung der diamagnetischen Moleküle im Felde handelt, gefolgert hatten. Über die Ursache für diese Orientierung erhalten wir allerdings vorläufig noch keinerlei Auskunft. Es mag sein, daß in dem Auftreten von Z ein Hinweis auf die Natur der Eigenschaft des Moleküles liegt, welche die mutmaßliche Orientierung veranlaßt. Eine Untersuchung der Temperaturabhängigkeit des Druckes p, bei dem der Effekt beginnt, wird hierfür vielleicht einen Anhaltspunkt liefern. Dies, sowie die Ausdehnung der bisherigen Arbeiten auf größere Feldbereiche, auf weitere Moleküle und besonders auf Atome, soll das Programm der weiteren Untersuchungen bilden.

Auch am Schlusse dieser Arbeit danke ich Hrn. Geheimrat W. Wien für das große Interesse, das er ihr entgegenbrachte, sowie für das weitgehende Entgegenkommen in allen Fragen, welche die großen Mittel betrafen, die diese Arbeit erforderte.

Anmerkung.

Nach Abschluß dieser Arbeit erhielt ich Kenntnis von einer Untersuchung, in welcher sich A. Eucken[1]) mit dem Trägheitsmomente und der Gestalt der Kohlensäuremolekel befaßt. Er findet auf Grund einer Betrachtung über die Dimensionen des CO_2-Moleküls bzw. der Bandenspektren, die man bei der Kohlensäure fand, als obere Grenze für das Trägheitsmoment 68,5, 65,5 oder $55,10^{-40}$, je nachdem der Winkel α, unter dem die beiden O-Atome zum C-Atome stehen, 180, 150 oder 120° ist und als untere Grenze $45,10^{-40}$. Als wahrscheinlichsten Wert ermittelt er aus der chemischen Konstanten i das Trägheitsmoment zu $(52,5 \pm 6) \cdot 10^{-40}$, wobei die Gestalt des Moleküls im wesentlichen als gestreckt (Winkel $\alpha = 180^0$) angenommen wurde, das Gas also als „thermodynamisch zweiatomig" betrachtet wurde. Der obige Wert des Trägheitsmomentes stimmt gut mit dem unseren überein.

---

[1]) Zeitschr. für phys. Chem. **100.** S. 159. 1922.

München, Physikal. Inst. d. Universität. November 1925.

Eingegangen 24. November 1925.

3. *Elektrooptische Untersuchungen am Natriumdampf.*[1]

(Anomale elektrische Doppelbrechung; Starkeffekt an der Resonanzstrahlung);

von H. Kopfermann und R. Ladenburg.

(Mitteilung aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für physikalische Chemie und Elektrochemie.)

Inhalt: § 1. Bedingungen für den Nachweis der elektrischen Doppelbrechung. — § 2. Versuchsanordnung. — § 3. Nachweis und Messung der elektrischen Doppelbrechung an der D_2-Linie. — § 4. Absolute Messung; Vergleichsversuche mit longitudinalem Magnetfeld; Magnetorotation und zirkularer Dichroismus. — § 5. Theoretische Überlegungen; die Aufspaltung der Terme. — § 6. Der elektrische Effekt an den Resonanzlinien des Na. (Von R. Ladenburg). — § 7. Zusammenfassung der Ergebnisse.

§ 1. Bedingungen für den Nachweis der elektrischen Doppelbrechung.

Bei der Einwirkung eines starken elektrischen Feldes auf die Absorptionslinien des Natriumdampfes hat sich gezeigt, daß die parallel zum Feld schwingende (π-) Komponente der D_2-Linie merklich stärker nach Rot verschoben wird als die senkrecht schwingende (σ-) Komponente; an der D_1-Linie war jedoch kein Unterschied der π- und σ-Komponente bei diesem unsymmetrischen quadratischen Starkeffekt feststellbar.[2] Nach der klassischen Dispersionstheorie ist deshalb zu erwarten, daß der Na-Dampf im elektrischen Felde in unmittelbarer Nähe der D_2-Linie eine anomal große elektrische Doppelbrechung besitzt, also eine „Begleiterscheinung“ des inversen (quadratischen) Starkeffekts, die ganz analog der magnetischen linearen und zirkularen Doppelbrechung, den „Begleiterscheinungen“ des inversen Zeemaneffektes, ist. Man braucht nur nach dem Vorgange von W. Voigt[1]), den Brechungsquotienten für die gegeneinander verschobenen π- und σ-Absorptionslinien, n_π und n_σ, hinzuzeichnen, um durch Differenzbildung sofort Vorzeichen und Größe der zu erwartenden Doppelbrechung zu erhalten (vgl. Fig. 3, S. 669). Allerdings läßt sich leicht berechnen, daß ein meßbarer Effekt unter den experimentell verifizierbaren Bedingungen von Feldstärke und Dampfdichte nur im Abstand einiger Hundertstel Ångströmeinheiten vom Schwerpunkt der D_2-Linie zu erwarten ist. Eine wirkliche spektrale Auflösung des Effektes scheint deshalb bei den heutigen Hilfsmitteln kaum möglich. Dagegen ist eine mehr summarische Beobachtung der fraglichen Erscheinung analog dem summarischen Nachweis der anomalen Magnetorotation und magnetischen Doppelbrechung auch ohne vollständige Auflösung möglich: man bringt das Rohr mit dem zu untersuchenden Na-Dampf zwischen gekreuzten Nikols in den Strahlengang einer hellen Lichtquelle, so daß im Gesichtsfeld eines die D-Linien gut trennenden Spektralapparates bei ausgeruhtem Auge das Spektrum möglichst vollständig ausgelöscht ist (vgl. Fig. 2, S. 664). Im Absorptionsrohr sind, wie früher beschrieben, im Abstand von 2—3 mm voneinander entfernt, vertikale Metallplatten angebracht, zwischen denen das elektrische Feld erzeugt und das Licht der Lampe hindurchgeschickt wird. Die Polarisationsebene der Nikols bildet einen Winkel von + bzw. — 45° mit der horizontalen Feldrichtung. Bei Erregen eines elektrischen Feldes von 30000 Volt/cm beobachtet man ein schwaches Aufleuchten an der Stelle der D_2-Linie; das durch die Doppelbrechung elliptisch polarisierte Licht der die D_2-Linie unmittelbar umgebenden Wellenlängen kann zum Teil den Analysator durchdringen und wird auf diese Weise sichtbar. Bei Benutzung einer Nernstlampe ist der Effekt nicht sicher erkennbar. Mit einer Bogenlampe als Lichtquelle ist die Erscheinung je nach der spezifischen

---

[1] Eine kurze Mitteilung des ersten Teils vorliegender Untersuchungen ist in den Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss., Sitzung vom 9. Juli 1925, S. 420, erschienen.

[2] R. Ladenburg, Ztschr. f. Phys. 28. S. 51. 1924.

---

1) W. Voigt, Magneto- und Elektrooptik, Teubner, Leipzig 1908, z. B. Fig. 44, S. 206, wo der analoge Fall für die magnetische transversale Doppelbrechung dargestellt ist.

Helligkeit der kritischen Wellenlängen[1]) mehr oder weniger deutlich.

Mehr als ein summarischer Nachweis des Effektes scheint auf diese Weise nicht möglich.

Dagegen wird die gesuchte Erscheinung sehr viel deutlicher und bis zu einem gewissen Grade quantitativ meßbar, wenn man als Lichtquelle die früher beschriebene, bereits für den elektrischen Effekt an den Absorptions- und Resonanzlinien des Natriums benutzte und auch anderen Ortes beschriebene Na-Lampe verwendet, die helle *D*-Linien von ~ 0,1 Å.-E. Breite liefert. Läßt man deren Licht Na-Dampf von 10^{-4} bis 10^{-5} mm Druck durchsetzen, so wird nur die Mitte dieser *D*-Linien wegabsorbiert, und es bleibt, wie Untersuchungen mit einem großen Lummer-Gehrke-Interferenzspektroskop zeigten, auf beiden Seiten der dunklen Mitte je ein schmaler Spektralbereich übrig, dessen Breite einige Hundertstel Ångströmeinheiten beträgt und naturgemäß von dem Druck des absorbierenden Na-Dampfes und etwas von der Erregungsstärke der Na-Lampe abhängt. Man hat also im wesentlichen zwei „Spektrallinien" (vgl. Fig. 1), deren Schwerpunkte je etwa um $\pm {}^1/_{40}$ Å.-E. vom Schwerpunkte λ_0 der D_2- bzw. D_1-Linie abstehen. Da die zu erwartende Doppelbrechung annähernd symmetrisch zu $\lambda_0\,(D_2)$ ist, wenigstens bei so kleiner elektrischer Feldstärke, daß die elektrische Verschiebung gegenüber dem

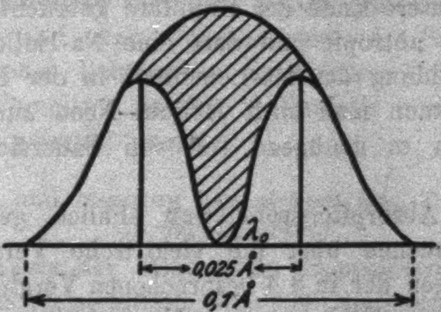


Fig. 1. Intensitätsverteilung in einer *D*-Linie der Na-Lampe nach Durchsetzen des Na-Absorptionsrohrs (schematisch).

---

[1]) Das Spektrum einer Bogenlampe zeigt bekanntlich fast stets die *D*-Linien als helle oder dunkle feine Linien.

wirksamen Teil des Spektralbereiches der Lichtquelle (± 0,025 Å.-E.) unbedeutend ist, so wird das das Absorptionsrohr durchdringende Licht des D_2-Bezirks bei Erregung des elektrischen Feldes als Ganzes Doppelbrechung zeigen müssen, und zwar um so mehr, je größer der Unterschied der elektrischen Verschiebung der π- und σ-Komponente ist.

§ 2. Versuchsanordnung.

Die als Lichtquelle benutzte Na-Lampe war nur wenig gegen die früheren Versuche verändert.[1]) Es ist nützlich, die untere Elektrode etwas seitlich einzuführen, damit das Natrium, das an das untere Ende der Kapillare gebracht ist, nicht auf die Elektrode abtropft und dort eine Na-Entladung erzeugt, die die Ausbildung des Na-Leuchtens in der Kapillare stört. Als Füllgas kann man statt Helium–Neon auch Argon verwenden, wenn es genügend frei von Sauerstoff und Stickstoff ist.

Das Na-Absorptionsrohr war ähnlich gebaut wie bei früheren Versuchen über die elektrische Verschiebung der D-Linien; wegen der in § 4 besprochenen Vergleichsmessungen im magnetischen Felde wurden die früher benutzten Nickelplatten zur Erzeugung des elektrischen Feldes im Inneren des Absorptionsrohres durch Kupferplatten ersetzt, im gegenseitigen Abstand von etwa 2,5 mm. Das elektrische Feld wurde wieder mit einer 20plattigen Leuner-Influenzmaschine erzeugt, die Spannung mit einem Braunschen Elektrometer, bzw. bei über 10000 Volt mit dem auch früher benutzten Hochspannungselektrometer nach C. Müller gemessen.

Vor jedem Versuch wurde das Na-Absorptionsrohr bei gleichzeitigem starken Exakuieren auf über 300° erhitzt, um störende Gasreste zu entfernen. Auch während der Messung mußte meist zur Erzeugung eines genügend starken elektrischen Feldes gepumpt werden. Infolgedessen strömte Na-Dampf dauernd aus dem im gesonderten Ofen geheizten, das Natrium enthaltenden Ansatzrohr durch das eigentliche Versuchsrohr hindurch, so daß der wirksame Dampfdruck nur annähernd aus der Temperatur errechnet werden kann. Die

---

1) Vgl. Fig. 1 der oben zitierten Arbeit von R. Ladenburg.

Verschlußplatten des das Versuchsrohr heizenden Hauptofens wurden zur Vermeidung jeder Spur von Doppelbrechung aus amorphem Quarz hergestellt und sorgsam ohne Spannung befestigt.[1]) Die Doppelbrechung der Glaswand des Versuchsrohres wurde durch wiederholte Erhitzung und langsame Abkühlung vollständig entfernt. Dann gelang es in der Tat durch Drehen des Analysators das Gesichtsfeld völlig auszulöschen. Weder in den Verschlußplatten noch in der Glaswand des Absorptionsrohres war eine durch das im Innern erzeugte elektrische Feld etwa bewirkte Doppelbrechung nachweisbar. Die Justierung und die Vorversuche wurden mit einer Heliumkapillare an der gelben Heliumlinie D_3 zur Schonung der Na-Lampe vorgenommen. Als Spektralapparat diente ein großes lichtstarkes Spektroskop mit Rutherfordprisma oder Plangitter, in dem bei relativ breitem Spalt die D_2-Linien gut getrennt waren.

§ 3. Nachweis und Messung der elektrischen Doppelbrechung an der D_2-Linie.

Der Nachweis der elektrischen Doppelbrechung geschah in der üblichen Weise mittels einer $\lambda/4$-Glimmerplatte zwischen gekreuzten Nikols. Für die eigentlichen Versuche wird das Absorptionsrohr und das das Na enthaltende Ansatzrohr mehrere Stunden unter Evakuieren geheizt, um möglichst konstante Verhältnisse zu erzielen. Der Analysator wird auf völlige Dunkelheit eingestellt. Bei Erregung des elektrischen Feldes und Benutzung einer He-Lampe als Lichtquelle[2]) tritt keine Spur einer Aufhellung ein. Wenn aber die Na-Lampe als Lichtquelle dient, leuchtet bei Erregung eines elektrischen Feldes von bereits 20000 Volt/cm (also 8000 Volt Spannung an den 2,5 mm voneinander entfernten Platten) Licht an der Stelle der D_2-Linie und nur an dieser auf — von der D_1-Linie ist keine Spur sichtbar. Durch Drehen des Analysators um wenige Grad kann die D_2-Linie völlig zum Verschwinden gebracht werden. Aus dem Sinn der erforderlichen Drehung und durch Kontrollversuche mit einer Glasplatte im Strahlengang, die in einer Richtung parallel oder senkrecht zum elektrischen Felde schwach gepreßt werden konnte, ergab sich eindeutig das positive Vorzeichen für die elektrische Doppelbrechung, d. h. die parallel zum elektrischen Feld schwingende (π-) Komponente wird verzögert gegenüber der σ-Komponente:

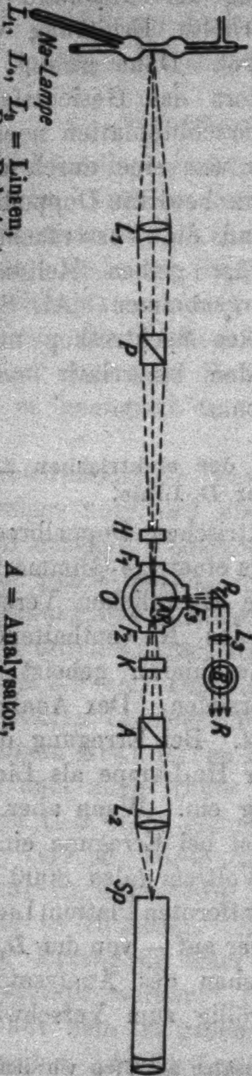
---

[1]) Die dadurch nötigen Ansätze am Ofen wurden durch besondere Wickelungen geheizt, um eine Kondensation des Na an den gegenüberliegenden Stellen des Absorptionsrohres zu verhindern.

[2]) Deren Licht konnte mittels eines auf der optischen Bank befestigten total reflektierenden Prismas durch die ganze Anordnung geschickt werden.

$$n_\pi - n_\sigma > 0.$$

Für genauere Messungen der Doppelbrechung ist eine Halbschattenmethode geeigneter als das $\lambda/4$-Blättchen. Dazu wurde (vgl. Fig. 2) zwischen Polarisator und Absorptionsrohr, unmittelbar vor diesem, eine die *obere* Gesichtshälfte bedeckende geeignete dünne Glimmerplatte nach der **Braceschen** Methode in den Strahlengang gebracht und ihre horizontale Kante scharf auf den Spalt abgebildet; ferner hinter dem Absorptionsrohr vor dem Analysator als „Kompensator“ eine das ganze Gesichtsfeld bedeckende in ihrer Ebene meßbar drehbare Glimmerplatte von etwa $\lambda/6$ Gangunterschied (der gesondert genau bestimmt wurde). Bei gekreuztem Analysator kann man nun durch Drehen des „Kompensators“ die bei stigmatischer Abbildung in einer



L_1, L_2, L_3 = Linsen,
P = Polarisator,
H = Halbschattenglimmer,
F_1, F_2, F_3 = Ofenfenster,
Pr = Total reflektierendes Prisma,
K = Kompensatorglimmer,
A = Analysator,
Sp = Spalt,
AR = Na-Absorptions- und Resonanzrohr mit elektrischem Feld,
B = Zweites Absorptionsrohr,
R = Resonanzstrahlung.

Fig. 2. Versuchsanordnung zum Nachweis der elektrischen Doppelbrechung sowie des Starkeffekts der Resonanzstrahlung des Na-Dampfes.

scharfen horizontalen Trennungslinie aneinander stoßenden beiden Hälften jeder D-Linie (bei relativ breitem Spalt) mit großer Genauigkeit auf gleiche Helligkeit (Verschwinden der Trennungslinien) einstellen. Erregen des elektrischen Feldes läßt die eine Hälfte der D_2-Linie deutlich hell im Vergleich zur anderen Hälfte aufleuchten, während an D_1 keine Andeutung eines Effektes wahrnehmbar ist.[1] Aus der Einstellgenauigkeit läßt sich ermessen, daß eine elektrische Doppelbrechung von $^1/_{10}$ des Betrages an D_2 noch hätte erkannt werden können.

Man berechnet die gesuchte Phasendifferenz der parallel und senkrecht zum Feld schwingenden Komponenten in genügender Annäherung mittels der Gleichung:

$$\operatorname{tg} \delta = \sin \varphi_x (\sin 2\alpha' - \sin 2\alpha),$$

dabei bedeutet φ_x die Phasendifferenz des Kompensators in Bogengrad (während die der Halbschattenplatte nicht bekannt zu sein braucht), α' bzw. α den mit bzw. ohne elektrisches Feld gefundenen Winkel, den die Hauptschwingungsrichtung des Kompensatorglimmers mit der Polarisationsrichtung des Analysators bildet. Man findet diese Winkel in bekannter Weise[2], indem man bei Drehung des Kompensators um 360° die 4 Lagen $p_1 p_2 p_3 p_4$ bzw. $p_1' \ldots p_4'$ bestimmt, in denen die Gesichtshälften gleich hell sind; dann ist:

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(p_2 - p_1 - 90^0) = \tfrac{1}{2}(90^0 - (p_3 - p_2)) \text{ usw.}$$

Es zeigte sich auch, daß δ, wie zu erwarten, proportional dem Dampfdruck und dem Quadrat der elektrischen Feldstärke anwächst. Die benutzten Dampfdrucke entsprechen, da sie ungesättigt sind, nicht den Temperaturen des Absorptionsrohres; sie lassen sich mit Hilfe von Messungen der Magnetorotation unter Annahme einer bestimmten wirksamen Wellenlänge errechnen (vgl. § 4).

Die Größe der entstehenden Phasendifferenz war bei dem benutzten Dampfdruck (200° des Absorptionsrohres, etwa

---

[1] Dies beweist übrigens auch die völlige Abwesenheit jedes störenden Nebeneffektes.

[2] Vgl. Mc Comb, Phys. Rev. **29**. S. 550. 1909; G. Szivessy, Ztschr. f. Phys. **6**. S. 312. 1922.

10^{-5} mm Druck) und bei der Feldstärke von 30000 Volt/cm 6°, daraus folgt bei einer Schichtdicke von 2,8 cm:

$$n_\pi - n_\sigma = 3{,}5 \cdot 10^{-7}.$$

Eine entsprechende Änderung des Brechungsquotienten erfordert z. B. in Kohlensäure bei gleicher Feldstärke einen Druck von etwa 10^4 Atm. (normale elektrische Doppelbrechung[1])), d. h. einen etwa 10^{12}mal so großen Druck, als der Natriumdampf hatte.

Die von uns an der D_2-Linie gefundene Doppelbrechung beruht offensichtlich auf der ungleichen elektrischen Verschiebung der π- und σ-Komponente der D_2-Linie und bestätigt somit bis zu einem gewissen Grade ältere Überlegungen Voigts; Voigt hat nämlich lange vor der Entdeckung des Starkeffektes aus der klassischen Dispersionstheorie durch Abänderung des quasielastischen Kraftgesetzes für die Bindung der Oszillatoren eine elektrische (dem Quadrat der Feldstärke proportionale) Beeinflussung von Emissions- und Absorptionslinien und aus der verschiedenen Größe des Effektes für die π- und σ-Komponente auch eine elektrische Doppelbrechung vorhergesagt.[2]) Versuche, die Voigt zum Nachweis dieser Doppelbrechung ausführte, blieben jedoch ohne Erfolg.[3])

Unsere Bestätigung ist vorläufig auf den Fall des Na-Dampfes beschränkt und kann natürlich nichts an der üblichen Deutung der normalen elektrischen Doppelbrechung (elektrooptischer Kerreffekt) durch die (Langevinsche) Orientierungstheorie ändern.

§ 4. Absolute Messung; Vergleichsversuche mit longitudinalem Magnetfeld; Magnetorotation und zirkularer Dichroismus.

Um aus der so gemessenen Phasendifferenz die theoretisch wichtige Differenz der elektrischen Verschiebungen der π- und σ-Komponente

$$\Delta\lambda^\pi - \Delta\lambda^\sigma = \lambda_0^\pi - \lambda_0^\sigma$$

---

[1]) Vgl. etwa die von G. Szivessy, Ztschr. f. Phys. 26. S. 323. 1924, angegebenen Werte.

[2]) Vgl. Magneto- und Elektrooptik, S. 356, 377.

[3]) a. a. O. S. 380; vgl. auch O. M. Corbino, Nuovo Cim. [6] 6. II. S. 449. 1913.

zu berechnen, mußte die nicht genau bekannte mittlere Wellenlänge des wirksamen Lichtes und der Druck des (ungesättigten) Na-Dampfes gesondert bestimmt, bzw. eliminiert werden. Dies geschah, indem bei sonst unveränderter Anordnung ein schwaches longitudinales Magnetfeld dem absorbierenden Na-Dampf überlagert und die so entstehende Drehung der Polarisationsebene mit der gleichen Lichtquelle und in demselben Na-Dampf gemessen wurde. Dadurch wurde zugleich die Unsicherheit eliminiert, die infolge der spektralen Breite des das Absorptionsrohr durchdringenden Lichtes und des für die verschiedenen Wellenlängen variierenden Effektes entsteht; diese Variation ist für die Doppelbrechung annähernd dieselbe wie für die Drehung, der wirksame Mittelwert kommt daher in beiden Fällen auf gleiche Weise zustande. Es ist nämlich einerseits der Unterschied der Brechungsquotienten für die π- und σ-Komponente in genügender Annäherung

$$(1) \qquad n_\pi - n_\sigma = \frac{\varrho}{4 n_0 \nu_0}\left(\frac{1}{\nu_0^\pi - \nu} - \frac{1}{\nu_0^\sigma - \nu}\right).$$

Dabei ist angenommen, daß durch das elektrische Feld aus der Eigenfrequenz $\nu_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$ die „verschobenen“ Eigenfrequenzen ν_0^π und ν_0^σ entstehen und daß der Brechungsquotient der für ein Gas geringer Dichte nahe einer einzigen Eigenfrequenz außerhalb des Absorptionsbereiches gültigen vereinfachten Gleichung genügt[1])

$$(2) \qquad n = n_0 - \frac{\varrho}{4 \nu_0 n_0 (\nu - \nu_0)},$$

wobei n_0 den Brechungsquotient bedeutet, der in der Umgebung von ν_0 herrschen würde, wenn die betreffende Elektronengattung nicht vorhanden wäre und ν die Frequenz, für den der Brechungsquotient gesucht wird; ferner ist

$$\varrho = 4\pi \mathfrak{N} \frac{e^2}{m}$$

und $\mathfrak{N}$ die der Dampfdichte proportionale „Zahl der Dispersionselektronen“ von der Eigenfrequenz ν_0; in quantentheoretischer Deutung mißt ϱ die Wahrscheinlichkeit des der Frequenz ν_0

---

[1]) Vgl. etwa W. Voigt, Magneto- u. Elektrooptik S. 112ff. 1908.

entsprechenden Quantenüberganges.1) Aus der Gleichung (1) ergibt sich die Phasendifferenz

$$\delta = 2\pi \frac{(n_\pi - n_\sigma)}{\lambda} l_E$$

(l_E = Schichtdicke), wenn man zugleich auf Wellenlängen umrechnet

$$\delta = \frac{\varrho\, l_E \lambda^3}{8\pi c^2} \frac{\lambda_0^\pi - \lambda_0^\sigma}{(\lambda - \lambda_0^\pi)(\lambda - \lambda_0^\sigma)} \,. \tag{3}$$

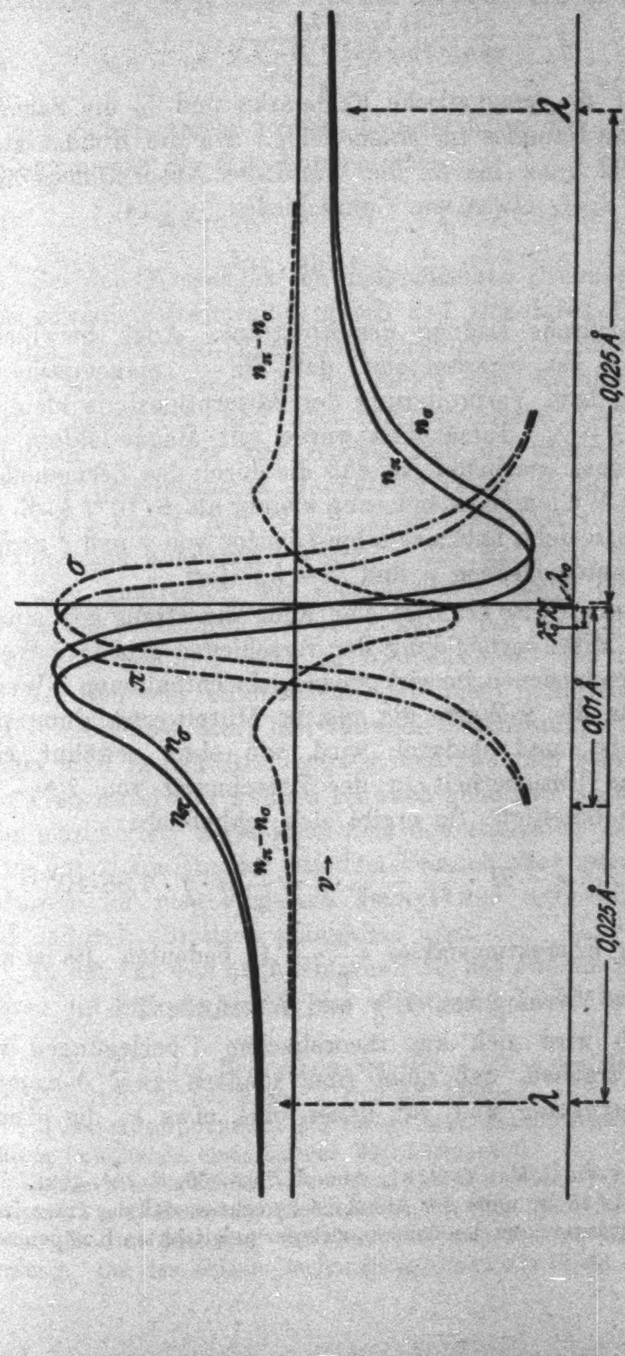
Für $(\lambda - \lambda_0^\pi)(\lambda - \lambda_0^\sigma)$ kann mit einiger Annäherung $(\lambda - \lambda_0)^2$ gesetzt werden, denn die Verschiebung $\lambda_0^\pi - \lambda_0$ beträgt auch bei 30000 Volt/cm nur $0{,}9 \cdot 10^{-3}$ Å.-E.2), während $\lambda - \lambda_0$ etwa $25 \cdot 10^{-3}$ Å.-E. ist, außerdem liegt das wirksame Licht zum Teil auf der länger-, zum Teil auf der kürzerwelligen Seite von λ_0 die relativ zur elektrischen Verschiebung große Breite der Absorptionslinien (~ 0,02 Å.-E., berechnet aus dem Dopplereffekt bei der Temperatur von 200° C und früher interferometrisch gemessen) bewirkt, daß die beiden Kurvenzüge, die den Verlauf von n_π und n_σ darstellen, im vorliegenden Fall sehr nahe beieinanderliegen, so wie in Fig. 3 angedeutet ist; (exakt lassen sich die Verhältnisse graphisch schlecht darstellen, weil die tatsächliche Verschiebung der π-Komponente nur $^1/_{10}$ der Halbweite der Linie beträgt, die ihrerseits gleich dem Abstand der scharfen Wendepunkte der n-Kurven ist). Doch bleibt dadurch unser Schluß unberührt, daß die gemessene Doppelbrechung durch den Abstand der wirksamen Wellenlängen (in Fig. 3 mit λ bezeichnet) von den Schwerpunkten λ_0^π und λ_0^σ der verschobenen Absorptionslinien, also wegen der geringen Verschiebung $\lambda_0^\pi - \lambda_0$ in genügender Annäherung durch den Abstand $\lambda - \lambda_0$ bestimmt ist.

Entsprechendes gilt für die magnetoratatorischen Messungen; denn die magnetische Drehung der Polarisationsebene berechnet sich unter den entsprechenden Voraussetzungen,

---

1) Vgl. R. Ladenburg, Ztschr. f. Phys. 4. S. 451. 1921.

2) Berechnet aus der früher (a. a. O.) gemessenen Verschiebung von 0,01 Å.-E. bei 100000 Volt/cm unter Voraussetzung des quadratischen Einflusses der Feldstärke. Bei der endlichen Breite der Absorptionslinien entsteht tatsächlich bei diesen Versuchen nur eine (einseitige) Verbreiterung, keine Aufspaltung.



Berechneter Verlauf der Brechungsquotienten der π- und σ-Welle und der Doppelbrechung ($n_\pi - n_\sigma$) in der Umgebung der D_2-Linie des Na-Dampfs bei einem elektrischen Felde von etwa 30000 Volt/cm.

Fig. 8.

und zwar mit Berücksichtigung des anomalen Zeemaneffekts an D_2 zu[1])

$$\chi = \frac{14\varrho\, l_H\, e\, H\, \lambda_0^4}{48 n_0 c\, 2mc\, 4\pi^2 c^3 (\lambda - \lambda_0)^2}; \tag{4}$$

Hier ist H die magnetische Feldstärke und l_H die Schichtdicke des Na-Dampfes im Magnetfelde. Da die Kondensatorplatten nicht ganz bis an die Wand des Absorptionsgefäßes reichen, ist l_H/l_E etwas von l verschieden ($\sim 1{,}14$),

$$\frac{e}{mc} = 1{,}765 \cdot 10^7$$

ist die spezifische Ladung des Elektrons. Auch bei dieser Gleichung (4) ist vorausgesetzt, daß die — magnetische — Aufspaltung, bzw. Verbreiterung der Absorptionslinie klein ist gegenüber $\lambda - \lambda_0$. Tatsächlich wurde mit Magnetfeldern von unter 40 Gauss gearbeitet, so daß die durch den Zeemaneffekt entstehende Wellenlängenänderung kleiner als $6 \cdot 10^{-4}$ Å.-E. ist.

Wie man sieht, heben sich bei Division von χ und δ gerade die unbekannten Größen ϱ und $(\lambda - \lambda_0)^2$ fort.

Auf diese Weise erübrigt sich auch die, streng genommen, notwendige Mittelwertsbildung der verschieden großen δ-Werte über die verschiedenen, im wirksamen Licht enthaltenen λ-Werte, da eben für die χ-Werte die gleiche Mittelwertsbildung vorzunehmen ist, und dadurch wird, wie oben erwähnt, eine beträchtliche Unsicherheit in der Berechnung von $\lambda_0^\pi - \lambda_0^\sigma$ automatisch beseitigt. So ergibt sich schließlich:

$$\lambda_0^\pi - \lambda_0^\sigma = \frac{\delta}{\chi} H \cdot \frac{7}{24} \frac{e\lambda_0^2}{\pi m c^2} \cdot f = \frac{\delta}{\chi} H \cdot f \cdot 1{,}88 \cdot 10^{-13}, \tag{5}$$

falls f den Korrektionsfaktor $\frac{l_H}{l_E} \sim 1{,}14$ bedeutet. Es ist also lediglich die Messung von δ, χ und H erforderlich.

In § 5 wird sich aus theoretischen Überlegungen von Kramers ergeben, daß nicht eine, sondern zwei σ-Komponenten zu erwarten sind, von denen eine, etwa σ_1, die gleiche

---

[1]) Vgl. z. B. R. Minkowski, Ann. d. Phys. 66. S. 206. 1921. Der Zahlenfaktor 14/48 ist unter der Annahme berechnet, daß das Intensitätsverhältnis der inneren zu den äußeren zirkular polarisierten Komponenten 3 : 1 ist.

Verschiebung wie die π-Komponente erleidet. Ist das Intensitätsverhältnis $\frac{\varrho_{\sigma_2}}{\varrho_\pi} = \gamma$, dann folgt mit derselben Annäherung wie (1)

$$n_0^{\pi} - n^{\sigma_2} = \frac{\varrho}{4 n_0 \nu_0} \gamma \left(\frac{1}{\nu_0^{\pi} - \nu} - \frac{1}{\nu_0^{\sigma_2} - \nu} \right), \tag{1a}$$

so daß sich nunmehr für die Verschiebung der σ_2- gegen die π-Komponente die Gleichung ergibt:

$$\lambda_0^{\pi} - \lambda_0^{\sigma_2} = \frac{\delta}{\chi} H \frac{f}{\gamma} \cdot 1{,}88 \cdot 10^{-13}. \tag{5a}$$

Bei den Messungen der magnetischen Drehung χ entsteht eine gewisse Schwierigkeit durch den zirkularen Dichroismus. In den durch das Magnetfeld zirkular polarisierten Komponenten wird entweder nur die rechts oder die links rotierende Welle absorbiert und das durchgelassene Licht dadurch elliptisch.¹) In der Tat zeigten sich bei unseren Versuchen mit dem longitudinalen Magnetfeld [wobei in der Anordnung der Fig. 2 außer den Nicols keine polarisierenden Teile im Strahlengang angebracht waren]²), daß es nicht möglich war, mit dem Analysator das durchtretende Licht der *D*-Linien vollständig auszulöschen, noch auch mit der $\lambda/4$-Platte in irgendeiner Stellung völlig zu kompensieren. Es tritt offenbar ein Gemisch von elliptischem und linear polarisiertem Licht auf.³) Es gelingt diese hier störende Erscheinung zu beseitigen, indem man in den Strahlengang, und zwar am besten noch vor den Polarisator ein zweites schwach geheiztes Na-Absorptionsrohr einschaltet. Dies absorbiert den schmalen Bezirk in der Mitte der *D*-Linien, der bei dem Versuch ohne zweites Absorptionsrohr im magnetisierten Dampf nur teilweise absorbiert und dadurch elliptisch polarisiert wird.

In der Tat war nach Einschaltung des zweiten Absorptionsrohres die Störung durch das elliptische Licht beseitigt, und

---

1) Vgl. Voigts Rechnungen im Hdb. d. El. u. des Magn. (herausg. v. L. Graetz), Bd. IV, S. 451 u. S. 570ff. 1920.

2) Das Absorptionsrohr *AR* befand sich dabei zwischen den durchbohrten Polschuhen eines kleinen Elektromagneten.

3) Ein solcher Effekt ist verschiedentlich vermutet worden (z. B. von H. Starke u. J. Herweg, Phys. Ztschr. 14. S. 1. 1913), aber W. Voigt (a. a. O. S. 578) bestreitet bei diesen Versuchen die Richtigkeit der Deutung. Bei den obigen Beobachtungen tritt der Effekt zweifellos auf.

es konnte nunmehr die Drehung gemessen werden.1) Allerdings betrug die Genauigkeit nur 10—20%, aber die untersuchte Erscheinung ist auch nicht genauer definiert, da ja die Drehung, wie oben hervorgehoben, innerhalb des durchgelassenen Wellenbezirks variiert.

Bei dem oben genannten Versuch bei 30000 Volt/cm, bei dem die Phasendifferenz der elektrischen Doppelbrechung 6° betrug, war z. B. eine magnetische Feldstärke von 35 Gauss erforderlich, um eine Drehung von 6° zu erzeugen. Somit folgt aus Gleichung (5)

$$\lambda_0^\pi - \lambda_0^\sigma = + 0{,}75 \cdot 10^{-3}\,\text{Å.-E.}\ (\pm 0{,}15),$$

d. h. die π-Komponente ist um 0,75 Tausendstel Å.-E. stärker verschoben als die σ-Komponente und zwar nach Rot, wie die früheren Untersuchungen gezeigt hatten; aus denselben Messungen des elektrischen Effektes bei 100—160000 Volt/cm berechnet man für die Verschiebung bei 30000 Volt/cm, da sie dem Quadrat der Feldstärke proportional ist,

$$\lambda_0^\pi - \lambda_0 = 0{,}88 \cdot 10^{-3}\,\text{Å}.$$

So folgt

$$\frac{\lambda_0^\pi - \lambda_0^\sigma}{\lambda_0^\pi - \lambda_0} \sim 0{,}85\,.$$

Bei etwas variierter Dampfdichte und geänderter elektrischer Feldstärke ergab sich für dies Verhältnis sogar nahe zu 1, d. h. daß die σ-Komponente sehr viel weniger als die π-Komponente verschoben wird. Hiermit sind die früheren direkteren

---

1) Wegen der verschieden großen ϱ-Werte ist natürlich die Drehung an D_2 und D_1 verschieden groß, so daß bei einer bestimmten Analysatorstellung immer nur entweder das D_2- oder das D_1-Licht ausgelöscht wird. Ähnliche Versuche haben vor einem Jahr Gerlach und Schütz publiziert, indem sie als Lichtquelle eine Nernstlampe benutzten (vgl. Naturw. 1923, S. 637; s. a. H. Schütz, Phys. Ztschr. 24. S. 459. 1923). Sie fanden hierbei die bemerkenswerte Tatsache, daß man auf diese Weise die Absorption des Dampfes bei außerordentlich niedrigen Drucken noch feststellen kann, wo Absorptionslinien ohne Magnetfeld nicht zu erkennen sind. So konnten auch wir nach dieser Methode noch bei 10^{-5} mm Druck bei 3 cm Schichtdicke einen Magneteffekt leicht nachweisen, während keine Spur von Absorptionslinien ohne Magnetfeld bei der verwendeten Auflösung sichtbar war.

Versuche nicht in Einklang, da eine so geringe Verschiebung der σ-Komponente kaum hätte wahrgenommen werden können.

Verwertet man aber die oben erwähnten und in § 5 näher zu besprechenden theoretischen Überlegungen, daß 2σ-Komponenten entstehen, von denen die σ_1-Komponente *ebensoweit* wie die π-Komponente verschoben und die σ-Komponente γ-mal so intensiv wie die π-Komponente ist, so folgt aus Gleichung (5a) für die Verschiebung der σ_2-Komponente der γ-Teil des obigen Wertes. Für die Verhältniszahl γ findet man nach dem Korrespondenzprinzip (nach freundlichen Mitteilungen von Hrn. H. A. Kramers und Hrn. W. Thomas) $^3/_4$. Daher ergibt sich bei dem obengenannten Versuch für das Verhältnis

$$\frac{\lambda_0^{\pi} - \lambda_0^{\sigma_2}}{\lambda_0^{\pi} - \lambda_0} \sim 1,1 ;$$

aus dem andern, oben genannten Versuch, folgt etwa 1,35. Mithin würde die σ_2-Komponente gar nicht oder sogar ein wenig nach Violett verschoben. Die Genauigkeit der angegebenen Zahlen ist naturgemäß gering, der mögliche Fehler ist auf etwa 20—25$^0/_0$ zu schätzen. Durch das Zusammenwirken der stark verschobenen σ_1 und der wenig verschobenen intensiveren σ_2-Komponente ist die früher direkt beobachtete mäßige Verschiebung der σ-Komponente verständlich.¹)

§ 5. Theoretische Überlegungen; die elektrische Aufspaltung der Terme.²)

Auf Grund des Adiabatenprinzips muß man nach einer uns freundlichst brieflich mitgeteilten Überlegung von H. A. Kramers erwarten, daß für die elektrische Aufspaltung der Terme dieselben Quantenzahlen maßgebend sind, wie für die magnetische Aufspaltung. Aus der Analyse des Zeemaneffektes

---

1) Ist z. B. $\Delta\lambda_{\sigma_2} \sim {}^1/_9\,\Delta\lambda_{\pi}$, so berechnet sich die Verschiebung des Schwerpunktes der σ_1 und der dreimal so intensiven σ_2-Komponente zu ${}^1/_3\,\Delta\lambda_{\pi}$, in Übereinstimmung mit den früheren Beobachtungen.

2) Diese Überlegungen haben wir bereits in den Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. S. 420, 1925 mitgeteilt.

folgt, daß der s-Term des Na in zwei Terme mit $m = \pm {}^1/_2$ spaltet, der p_1-Term, der in Sommerfelds neuer Bezeichnung der D_1-Linie und der inneren Quantenzahl $j = {}^1/_2$ entspricht, ebenfalls in zwei Terme $m = \pm {}^1/_2$, dagegen der p_2-Term ($j = {}^3/_2$) in die vier Terme $m = \pm {}^3/_2$ und $m = \pm {}^1/_2$. Da der elektrische Effekt an den D-Linien, wie früher gezeigt wurde — im Gegensatz zu dem Starkeffekt an den Wasserstoff- und wasserstoffähnlichen Linien —, nicht der Feldstärke selbst, sondern ihrem Quadrat proportional ist — ist, ebenfalls nach Kramers, zu erwarten, daß die Aufspaltung für numerisch gleiche, aber entgegengesetzte Werte von m dieselbe ist. Nun liefert der Übergang $m = \pm {}^1/_2 \longrightarrow m = \pm {}^1/_2$ nach dem Korrespondenzprinzip sowohl eine σ – ($\Delta m = \pm 1$), als eine π-Komponente ($\Delta m = 0$), dagegen der Übergang

$$m = \pm {}^3/_2 \longrightarrow m = \pm {}^1/_2$$

nur eine σ-Komponente (vgl. Fig. 4).

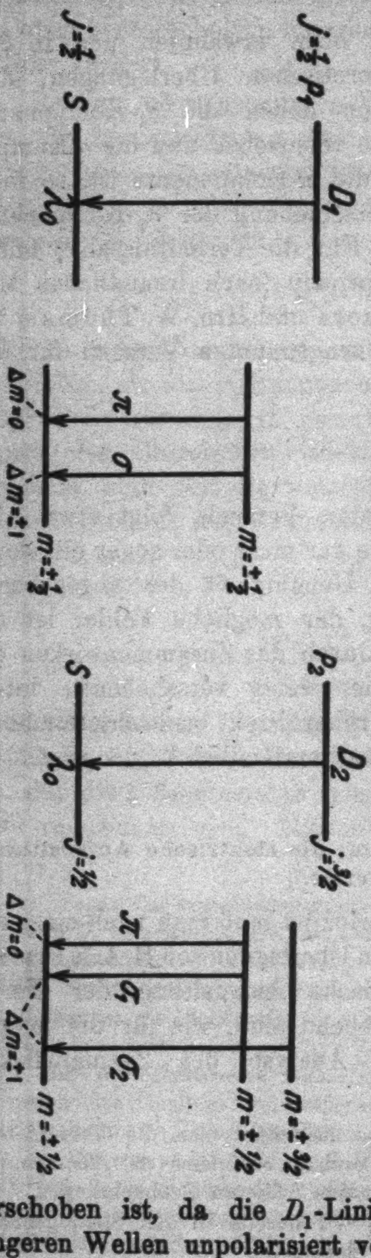


Fig. 4. Elektrische Aufspaltung der p- und s-Terme des Na-Atoms.

Wir erhalten mithin auf Grund unserer Messungen folgendes Bild: p_1 liefert im elektrischen Felde ein Doppelniveau $\pm {}^1/_2$, das stärker als das Doppelniveau des s-Terms verschoben ist, da die D_1-Linie im elektrischen Felde nach längeren Wellen unpolarisiert verschoben wird. Etwa dieselbe

Verschiebung, wie p_1 zeigt das (Doppel)-Niveau p_2 für $m = \pm {}^1/_2$, da die π-Komponente von D_2 etwa ebenso stark wie D_1 verschoben wird. Dagegen ist das Niveau $m = \pm {}^3/_2$ sehr viel weniger (ähnlich wie das s-Niveau oder sogar noch weniger) verschoben; dieses liefert beim Übergang in das s-Niveau $m = \pm \frac{1}{2}$ die σ_2-Komponente.

Es ist bemerkenswert, daß sich die gewonnenen Ergebnisse mit den Zeemaneffektmessungen nicht vereinen lassen, wenn man die Niveaus durch ganze Quantenzahlen kennzeichnet. Die halben Quantenzahlen scheinen hier tatsächlich unvermeidlich zu sein.[1]

Die Größe der Wellenlängenänderung von D_1 und der π-Komponente von D_2 beträgt nach den früheren Messungen etwa 0,01 Å.-E. bei 100000 Volt/cm.

Auf Grund der obigen Überlegungen kann man ohne weiteres aus dem Zeemaneffekt die Zahl der zu erwartenden elektrischen Komponenten im quadratischen Effekt einer anderen Linie ableiten, z. B. ergibt sich so für die Hg-Linie 2537 ($1S - 2p_2$) folgendes Bild: aus dem S-Term entsteht ein Term $m = 0$, aus dem $2p_2$-Term zwei Terme $m = \pm 1$ und 0, so daß eine π- und eine davon verschiedene σ-Komponente zu ererwarten sind.

§ 6. Der elektrische Effekt an den Resonanzlinien des Na (von R. Ladenburg).

In einer vorläufigen Mitteilung vor etwa 1 Jahre wurde von dem einen von uns[2]) bereits kurz von Versuchen berichtet, in denen der Einfluß des elektrischen Feldes auf die Resonanzlinien des Na nachgewiesen wurde. Die Versuche mußten aus äußeren Gründen vor ihrem Abschluß unterbrochen und konnten bisher nicht fortgesetzt werden, die vorliegenden Beobachtungen sind jedoch durchaus im Einklang mit den im vorigen Paragraphen gezogenen Folgerungen betreffs der elektrischen Aufspaltung der Niveaus des Na und sollen deshalb hier zusammenfassend kurz besprochen werden.

---

[1] Hierauf haben uns die Herren W. Thomas und H. A. Kramers brieflich aufmerksam gemacht.

[2] R. Ladenburg, Die Naturwiss. 12. S. 414. 1924.

Der Nachweis des direkten elektrischen Effektes an den *D*-Linien gelang auf folgende Weise (vgl. die Skizze der Versuchsanordnung Fig. 2): Die Resonanzstrahlung wurde mit der beschriebenen Na-Lampe in dem zu den Absorptionsversuchen benutzten Gefäß zwischen den im Abstand von 1,3 mm einander gegenüberstehenden Kondensatorplatten erzeugt und trat nach oben aus, wurde durch ein total reflektierendes Prisma in die Horizontale abgelenkt und durch ein zweites heizbares Absorptionsgefäß oder durch ein Nikol bzw. ein Wollastonprisma hindurch betrachtet. Wegen des erforderlichen sehr niedrigen Dampfdruckes und des engen beobachtbaren Raumes zwischen den Kondensatorplatten ist die Helligkeit der Resonanzstrahlung unter den genannten Verhältnissen trotz der intensiven erregenden Na-Lichtquelle gering, und die untersuchten Erscheinungen sind nur in verdunkeltem Raum mit adaptiertem Auge beobachtbar, so daß von einer Trennung der beiden *D*-Linien vorläufig abgesehen werden mußte. Das zweite Absorptionsrohr (im folgenden Rohr *B* genannt) wurde in einem mit Fenstern versehenen kleinen elektrischen Ofen auf 50—100° geheizt, so daß die Resonanzstrahlung zum größeren Teil absorbiert wurde und nur noch schwach erkennbar war. Bei Erregen des elektrischen Feldes von 60—100000 Volt/cm trat dann eine deutliche Aufhellung ein, die offenbar durch die Frequenzverschiebung der Resonanzlinien gegenüber den Absorptionslinien zustande kommt. Der Effekt ist besonders deutlich, wenn die Temperatur und der Dampfdruck im Absorptionsgefäß *B* niedrig gehalten werden, so daß man bereits mit den genannten relativ geringen Feldstärken im Resonanzgefäß auskommt; bei höheren Feldstärken tritt leicht bisweilen ein störendes Glimmen zwischen den Kondensatorplatten auf.

Bei Beobachtung der Resonanzstrahlung durch ein Wollastonprisma hindurch erscheint ohne Feld die π-Komponente, d. h. die senkrecht zum einfallenden Strahl schwingende Komponente wesentlich heller als die σ-Komponente (in Übereinstimmung mit den bekannten Versuchen von Wood und Dunoyer). Bei Erregen des elektrischen Feldes und Betrachtung durch das schwach geheizte Absorptionsrohr *B* hindurch werden beide Komponenten, auch die σ-Komponente, deutlich verstärkt — ein weiterer Beweis, daß auch diese durch das elektrische Feld verschoben wird.

Was die quantitative Seite betrifft, so berechnet man für die Halbweite der *D*-Linien des Absorptionsgefäßes bei 50° C 0,008 Å.-E.; ein Feld von 100000 Volt/cm gibt nach den früheren Messungen eine Verschiebung der π- (und der schwächeren σ_1) Komponente von D_2 sowie der D_1-Linie von etwa 0,01 Å.-E.; daher ist es gut verständlich, daß die verschobenen Resonanzlinien zum großen Teil aus dem Absorptionsbereich der *D*-Linien des Rohres *B* heraustreten und daß sowohl π- als σ-Licht deutlich verstärkt wird.

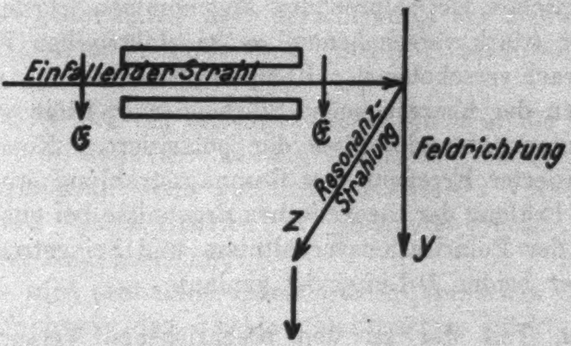


Fig. 5.

Bei Verwendung *von polarisiertem Licht zur Anregung* wurden keine wesentlich neuen Erscheinungen beobachtet, wie auch nach den gewonnenen Ergebnissen der Termaufspaltung zu erwarten ist, solange man die *D*-Linie nicht getrennt beobachtet. War der elektrische Vektor des erregenden Lichtes parallel der Feldrichtung *Y* (vgl. Fig. 5), so erschien ohne Feld die π-Komponente ($\parallel Y$) heller als die andere Komponente; bei Anregung mit parallel *Z* schwingendem Licht waren π- und σ-Komponte annähernd gleich hell (in Übereinstimmung mit Versuchen von Wood und Ellet). Erregung eines elektrischen Feldes, das eine deutliche Aufhellung der Gesamtresonanzstrahlung durch das Absorptionsrohr *B* hindurch betrachtet ergeben hatte, änderte an den relativen Intensitätsverhältnissen der beiden Komponenten bei polarisierter Anregung nichts Wesentliches.[1]) In der Tat ersieht man aus dem Niveauschema im elektrischen Feld (Fig. 4), daß Anregung mit π-Licht im elektrischen Feld das Niveau $m = \pm \frac{1}{2}$ erzeugt, aus dem sowohl bei D_2 wie bei D_1 bei Rückkehr in das Ausgangsniveau neben dem π-Licht auch σ-Licht ausgestrahlt wird. Bei Anregung mit σ-Licht soll bei D_2 sowohl das Niveau $m = \pm \frac{3}{2}$ als $m = \pm \frac{1}{2}$ entstehen, so daß in Resonanz neben der σ-Komponente auch die π-Komponente auftreten muß; bei D_1 soll aus dem angeregten $m = \pm \frac{1}{2}$-Niveau neben der σ-Komponente ebenfalls die π-Komponente entstehen, so daß die beobachteten Erscheinungen tatsächlich nach dem Niveauschema erwartet werden müssen. Würde, wie ursprünglich, vor den Messungen der elektrischen Doppelbrechung angenommen wurde, bei D_2, neben der (stark verschobenen) π- im elektrischen Felde nur *eine* (schwach verschobene) σ-Komponente entstehen, so müßte man wegen der überwiegenden Stärke der D_2-Linie wesentlich andere Intensitätsverhältnisse der polarisierten Komponenten bei polarisierter Erregung der Resonanzstrahlung erwarten.

Eine Prüfung der theoretischen Ergebnisse bei quantitativer Messung der Polarisationsverhältnisse und bei getrennter Erregung der beiden D-Linien ist geplant.

Einen Teil der zu den beschriebenen Versuchen verwendeten Apparate haben wir vom Japan- und vom Elektrophysikausschuß der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft erhalten, wofür wir auch an dieser Stelle unsern aufrichtigen Dank aussprechen möchten.

§ 7. Zusammenfassung der Ergebnisse.

1. Es wird eine positive elektrische Doppelbrechung des Na-Dampfes in der nahen Umgebung der D_2-Linie experimentell

---

[1] Besondere Versuche zeigten, daß das Magnetfeld der Heizspule, das zu etwa 8 Gauss bestimmt wurde, keinen Einfluß ausübte, da vorübergehendes Ausschalten der Spule nichts an den Erscheinungen änderte, auch ein Einfluß störender fremder Gase kann nicht vorliegen, da das Vakuum im Resonanzgefäß bei diesen Versuchen besonders gut war; trotz wochenlanger Verwendung des Rohres bei häufiger Heizung ohne Auspumpen stieg der Druck nicht über $3 \cdot 10^{-4}$ mm; bei den entscheidenden Versuchen wurde das Rohr auf unter 10^{-5} mm ausgepumpt und fremde Dämpfe wurden durch flüssige Luft ferngehalten.

nachgewiesen, während sie an der D_1-Linie nicht nachweisbar, sicher weniger als $^1/_{10}$ so groß wie an der D_2-Linie ist.

2. Dieser Effekt hat mit der üblichen Ursache der elektrischen Doppelbrechung (des Kerreffekts), nämlich der Orientierung asymmetrischer Atome im Felde, nichts zu tun; er beruht vielmehr auf der früher nachgewiesenen elektrischen Verschiebung der D_2-Linien (dem quadratischen Starkeffekt), indem an D_2 die π- und σ-Komponente verschieden stark nach Rot verschoben werden; an D_1 jedoch werden beide Komponenten gleich stark verschoben.

3. Aus der Größe der Doppelbrechung wird durch gleichzeitige Messung der magnetischen Drehung der Polarisationsebene der Unterschied der Verschiebung der Schwerpunkte der π- und σ-Komponente zu etwa 0,001 Å.-E. bei 30000 Volt/cm bestimmt.

4. Auf Grund der Meßergebnisse kann man die Lage der elektrischen Niveaus der zu den D-Linien gehörigen p- und s-Terme festlegen, wenn man nach Kramers Vorschlag die magnetischen Quantenzahlen in geeigneter Weise für den elektrischen Fall übernimmt.

5. Es wird schließlich nach älteren Versuchen des einen (L.) der Nachweis des direkten elektrischen Effekts an den Resonanzlinien des Na geführt, und es werden die Erscheinungen bei polarisierter Anregung (allerdings ohne Trennung der D-Linien) beschrieben, die mit der unter 4. genannten elektrischen Niveauaufspaltung durchaus im Einklang sind.

(Eingegangen 17. Oktober 1925.)

4. *Eine besondere Form der Glimmentladung im transversalen Magnetfeld;*[1]

von Wilhelm Groth.

(Aus dem Physikalischen Institut der Universität Kiel.)

1. Einleitung.

Im Jahre 1913 untersuchte R. J. Strutt[2]) die Glimmentladung zwischen konaxialen Zylinderelektroden in einem der Achse parallelen Magnetfeld und fand eine beträchtliche Herabsetzung der Brennspannung gegen den feldlosen Fall z. B. von 12000 auf 300 Volt; der Innenzylinder diente als Kathode. Der Gedanke, daß die im Magnetfeld eintretende azimutale Abkrümmung der Kathodenstrahlen und die damit zusammenhängende Verlängerung ihres Weges, der nun nicht mehr einfach dem Radius folgt, diese Veränderung veranlasse, wurde durch einen Versuch gestützt, indem längs eines Radius eine isolierende Wand (Glimmer) von außen her eingesenkt wurde, so daß Bewegungen quer zum Radius behindert wurden. Die Spannung stieg an — besonders rasch, wenn der Innenrand der Wand sich der Kathode näherte — und erreichte die Größenordnung, die sie ohne Magnetfeld zeigt, sobald die Wand die Kathode berührte. Obwohl also Bewegungen mit tangentialer Komponente wirklich stattfinden, konnte Strutt doch, wie er betont, in der Leuchterscheinung selbst, die eine äquatoriale Scheibe bildet, niemals eine spiralige Struktur wahrnehmen. Kossel[3]), der diese Erscheinungen näher studierte, fand indes, daß bei bestimmten Werten des Magnetfeldes die Scheibe des positiven Lichts in regelmäßig angeordnete spiralige Lichtfäden zerfällt. Die vorliegende Arbeit enthält eine nähere Untersuchung dieser Erscheinung und kommt zum Ergebnis, daß es sich hier nicht etwa um einzelne Bahnen der Entladung, sondern um positive Schichten handelt, die ungewöhnlicher-

---

1) Nach der Kieler Dissertation, eingereicht am 17. Dezember 1923.

2) R. J. Strutt, Proc. Roy. Soc. London 89. S. 68. 1913.

3) W. Kossel, Jahrb. d. Rad. u. El. XVIII. S. 348. 1922.

weise so angeordnet sind, daß jede einzelne von ihnen auf gekrümmtem Wege von der Anode zur Kathode sich erstreckt.

2. Versuchsanordnung.[1])

Die Anordnung der Elektroden und Magnetpole stimmte mit der bei Strutt und Kossel benutzten überein. Als Kathode dient ein Aluminiumzylinder *K* (Fig. 1) von 10 mm Länge und 13 mm Durchmesser, der zwischen kleine konische Polschuhe *Fe Fe* geschraubt ist, die die Kraftlinien des außen liegenden Magneten *N S* innerhalb des Rohres noch einmal zusammenfassen, so daß sie zum großen Teil nahe der Kathoden-

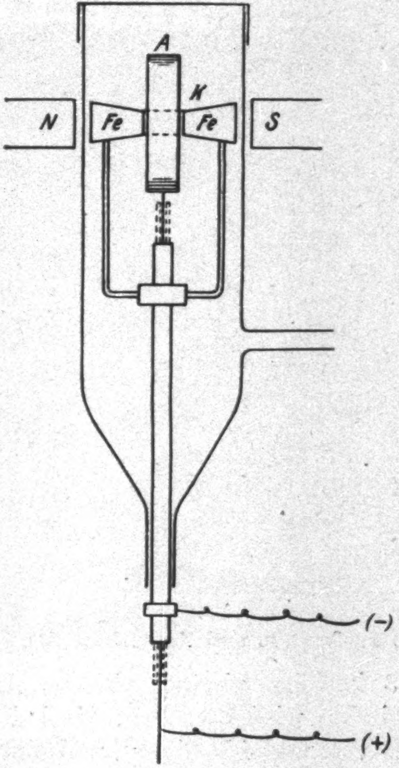


Fig. 1.

---

1) Über die technischen Einzelheiten der Anordnung und der einzelnen Versuchsgruppen ist in der Dissertation eingehender berichtet.

oberfläche hinstreichen. Die Anode besteht aus einem 10 mm breiten, vernickelten Blechring *A*. Alles weitere über die Anordnung ist aus Fig. 2 zu entnehmen. Das Rohr erscheint hier zweimal, in der rechten Hälfte, die die Schaltung für den Entladungsstrom gibt, in Aufsicht, in der linken Hälfte, die die Schaltung des Magnetstroms angibt, im Grundriß. Die Rohrfüllung war Wasserstoff, er wurde zuerst durch das angedeutete Palladiumrohr aus einer Flamme, später durch Pyrogallol und konz. Schwefelsäure aus einer Bombe entnommen.

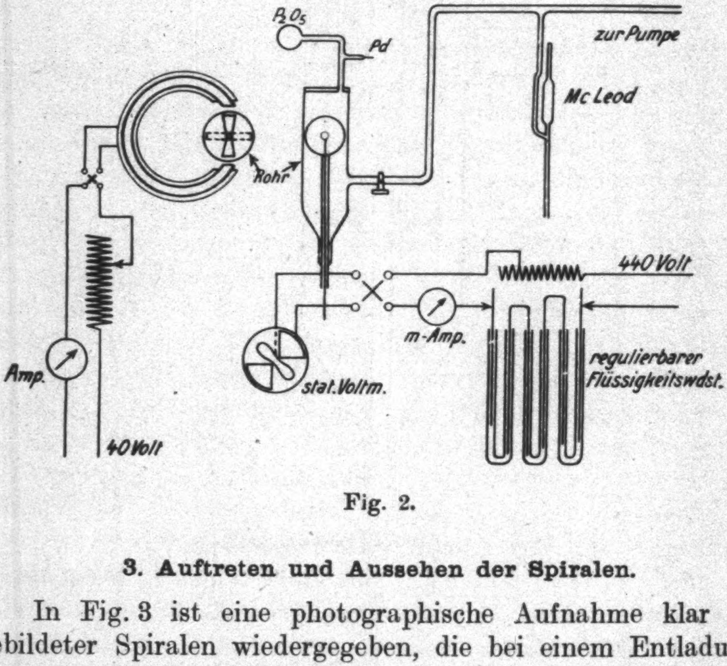


Fig. 2.

3. Auftreten und Aussehen der Spiralen.

In Fig. 3 ist eine photographische Aufnahme klar ausgebildeter Spiralen wiedergegeben, die bei einem Entladungsstrom von 320 Volt und 4 Milliamp. und einem Magnetisierungsstrom von 3,2 Amp. aufgenommen wurde. In der linken Hälfte der Figur wird ein Teil der Spiralen durch den Pol des äußeren Magneten verdeckt, der vertikale dunkle Streifen rührt von dem Haltedraht der Polschuhe her. Die Anzahl der Spiralen beträgt in dem vorliegenden Falle sechs. Die magnetischen Kraftlinien verlaufen von vorne nach hinten; Umkehr des Magnetfeldes ergibt einen entgegengesetzten Krümmungssinn der Spiralen (Fig. 4). Der Wechsel der Lichterscheinungen mit wechselndem Magnetfeld spielt sich dann in den Hauptzügen folgendermaßen ab. Eine gute Ausbildung der Spiralen wird bei Drucken zwischen 0,1 bis 0,4 mm erhalten. Bei diesen Drucken kann bei der angewandten elektromotorischen Kraft bereits ohne Magnetfeld eine Entladung bestehen, die das Gebiet zwischen den Elektroden und darüber hinaus den größeren Teil des Rohrs mit rosafarbenem Licht ausfüllt. Schon in einem schwachen Magnetfeld kontrahiert sich die Glimmentladung zu einer äquatorialen Scheibe innerhalb des Anodenringes.

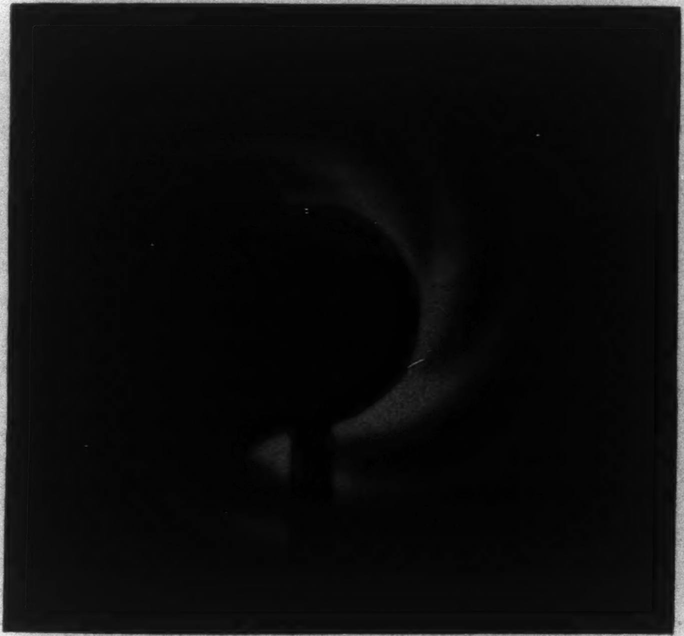


Fig. 3.

Die beiden Dunkelräume und das negative Glimmlicht sind deutlich zu erkennen. Magnetfelder, die einem Magnetstrom von 0,2—0,3 Amp. entsprechen, ergeben bei Entladungsstromstärken von mehreren Milliamperes u. U. konzentrische ringförmige Schichten, die sehr oft das Aussehen bläulich-rosafarbener Doppelschichten haben. Weiter gesteigertes Magnetfeld kontrahiert den Kathodendunkelraum und das negative Glimmlicht. Die Schichten vergehen bald in der heller werdenden äquatorialen Scheibe. Bei etwa 1 Amp. Magnetstrom ist der Kathodendunkelraum ganz verschwunden, eng um die Kathode legt sich ein bläulich-weißer Ring, der Rest des negativen Glimmlichts (vgl. Fig. 4). Nach außen folgt leicht abgesetzt das positive Licht, eine rosafarbene Scheibe, die sich bei den benutzten Stromstärken bis zum Anodenring erstreckte. Die Lichtscheibe ist bei diesen Magnetfeldern in der Nähe der Kathode nur etwa 2 mm stark, nach außen sitzt sie mit diffuserem schwächerem Licht breit auf dem Anodenring auf. Diese Lichtscheibe ist es nun, die bei ganz bestimmten Einzelwerten des Magnetfeldes in die auffallende Spiralenfigur zerfällt.[1] Bis zu 2,5 Amp. Magnetstrom ist der Rest des negativen Glimmlichts neben den bestehenden Spiralen noch deutlich zu erkennen, die Spiralen setzen dann scheinbar tangential an dem Glimmlicht an. Bei höheren Magnetfeldern wird das negative Glimmlicht so stark kontrahiert, daß es nicht mehr für sich zu unterscheiden ist. Die Spiralen, die unter diesen Verhältnissen beobachtet wurden, schienen mit den inneren Enden unmittelbar bis an die Kathode heranzureichen.

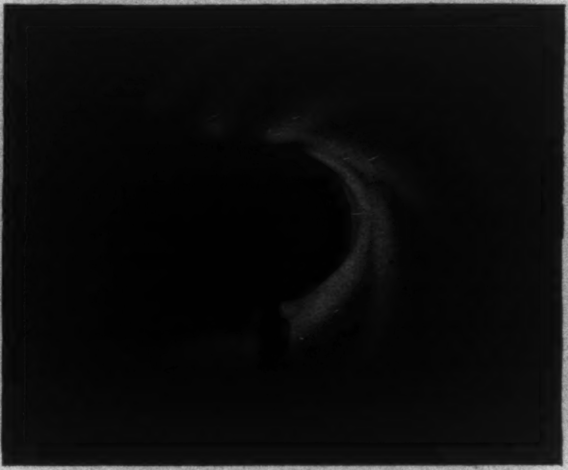


Fig. 4.

Bei geringer Änderung des Drucks, des Entladungs- oder Magnetstromes tritt sehr bald ein Unruhigwerden der Spiralen, dann Unschärfe und schließlich Vergehen in dem positiven

---

[1] Vgl. W. Kossel, a. a. O., S. 348.

Licht auf. Am besten zu verfolgen ist das Verhalten der Spiralen bei Änderung des *Magnetfeldes.* Es gelang damit nacheinander mehrere Spiralausbildungen zu erhalten, und zwar nahm die Zahl der Spiralen bei gesteigertem Magnetfeld um jeweils *eine* zu. Als Beispiel gelte:

Magnetstrom in Amp.	Zahl der Spiralen
3,2	6
3,8	7
4,6	8

Durch alleinige Änderungen von Entladungsstrom und Druck konnten wohl die Spiralen zum Verschwinden gebracht, aber keine neuen Spiralgebiete hervorgerufen werden. Das Optimum der schärfsten Spiralausbildung lag bei einem Druck von etwa 0,1 bis 0,2 mm. Innerhalb dieses Bereiches entsprechen sich in der Wirkung auf die Entladungsform Anwachsen des Druckes, Abnahme des Magnetfeldes und des Entladungsstroms. Bei Drucken größer als 0,4 mm wurde eine deutliche Spiralausbildung nicht mehr erhalten, die Äste waren nur andeutungsweise im positiven Glimmlicht zu erkennen. Bei niedrigeren Drucken andererseits kann die Erscheinung verwickeltere Formen annehmen; so erschien bei $p = 0{,}04$ mm und einem Strom von 5 Milliamp. bei ganz bestimmten Werten des Magnetfeldes um die Kathode herum ein Kranz von 35 bis 40 kleinen Spiralästen, Länge der Spiralen etwa 9 mm. Die Krümmung der kleinen Spiralen war gleichgerichtet den großen, die daneben bestehen konnten.

4. Prüfung des Gedankens, daß die Spiraläste die Bahnen von Kathoden oder „K_1"-Strahlen seien.

Um von den Bewegungen der an der Kathode ausgelösten Elektronen, die bei den hier verwendeten Drucken nach gastheoretischer Rechnung freie Wege von der Größenordnung eines halben Zentimeter zurücklegen können, ein Bild zu bekommen, wurde das magnetische und elektrische Feld im Bereich der Entladung ausgemessen. Über die Richtung der Magnetkraftlinien orientiert das an den herausgenommenen Polschuhen gewonnene Feilspanbild (Fig. 5). Die Stärke des Feldes wurde ballistisch mit sieben konzentrisch in der Äquatorialebene angebrachten Probespulen ausgetastet, deren Radien 6,5—25 mm betrugen. Fig. 6 zeigt die durch Differenzbildung sich ergebende Feldstärke als Funktion des Radius für eine Reihe von Stromstärken im Magneten. Wir geben stets diese Stromstärke an, um das Magnetfeld zu kennzeichnen; die Feldstärkenwerte für verschiedene Orte sind dann den Kurven zu entnehmen. Die Ausmessung des elektrischen Feldes geschah mit einer durch Schliffdrehung verschiebbaren Sonde, deren Träger außerhalb der Entladung blieb, und die nur mit der Spitze (Platindraht ⌀ 0,1 mm) von der Seite in die

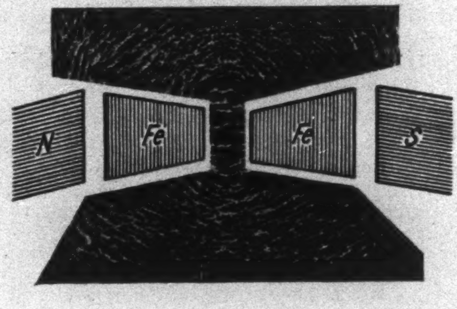


Fig. 5.

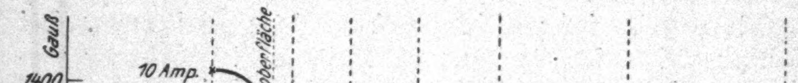


Fig. 6.

Ebene der Entladung eingeführt wurde. Bei bestehenden Spiralen wurde bei einer Gesamtentladungsspannung von etwa 300 Volt, die durchschnittlich bei den angewandten Magnetfeldern herrschte, in einer Entfernung Kathode—Sonde von 0,2 mm ein Spannungsabfall von 200—220 Volt gemessen. Der Kathodendunkelraum hat sich unter Einwirken des Magnetfeldes stark kontrahiert und ist bereits bei den mittleren gebrauchten Feldstärken nicht mehr wahrnehmbar. Die Sonde befindet sich in einer Entfernung von 0,2 mm von der Kathode schon im Glimmlicht, einem Bereich hoher Ionisation, wo gegen eine Sondenmessung nichts einzuwenden ist. Unter Zugrundelegung der bestehenden elektrischen und magnetischen Felder berechnet man für die Elektronenbahnen Krümmungsradien in der Größenordnung von 0,6—0,7 mm. Die Elektronen können also die allernächste Nähe der Kathode überhaupt nicht verlassen. Bei den angewandten Drucken muß es aber häufig vorkommen, daß die Elektronen sich an neutrale Gasteilchen anlagern, so daß z. T. negativ geladene H-Atome und H_2-Moleküle bestehen. Die Krümmungsradien betragen, wenn die Teilchen bereits angelagert 300 Volt durchfallen haben, bei einer mittleren magnetischen Feldstärke 4—6 cm, entsprechen also in der Größenordnung denen der gefundenen Bahnspuren. Es gelang auch, unter Drucken von 0,1—0,2 mm und sehr geringen Entladungsstromstärken Lichterscheinungen aufzufinden, die denselben Krümmungssinn besaßen wie ihn ein Kathodenstrahl haben würde, und deren Krümmungsradien einige Zentimeter betrugen. Die leichter hervorzurufenden, bei höheren Stromstärken entstehenden und kräftigeren Spiralen aber, die zuerst beobachtet worden sind und den Anlaß zu dieser Untersuchung gaben, weisen den entgegengesetzten Krümmungssinn auf, wie er einem Kathodenstrahl zukäme. Sie könnten also nur als Masseteilchen angesehen werden, die nach der Beschleunigung im Kathodendunkelraum nach Art der K_1-Strahlen Goldsteins[1]) durch Umladung *positiv* geworden sind, außerhalb des Kathodenfalls also nun dem Felde entgegenlaufen und demnach auch im Magnetfeld entgegengesetzt abgelenkt werden. Indes ergaben Versuche, in denen das starke Feld an der Kathode reproduziert

---

1) E. Goldstein, Verh. d. D. Phys. Ges. 4. S. 229. 1902.

wurde, unter Verwendung von rotationssymmetrischen Anoden, die nur einen Raum von 2—2,5 mm Tiefe zwischen sich und der Kathode freiließen und ein Loch oder einen Spalt enthielten oder ganz aus Netz bestanden, daß irgendwelcher Durchtritt von Strahlung in keinem Fall beobachtet wurde. Damit erscheint die Möglichkeit, in den Speichen die Bahnen bewegter positiv geladener Teilchen zu sehen, abgeschnitten.

Als eine Möglichkeit zum Verständnis der auffallenden ganzzahligen Unterteilung der Leuchterscheinung bei bestimmten magnetischen Feldstärken wurde von Kossel die Hypothese genannt, daß die an der Kathode erzeugten langsamen Elektronen unter Wirkung des Magnetfeldes die Nähe der Kathode z. T. nicht verließen, sondern in Zykloidenbahnen ständig zur Kathode zurückkehrten. Bei bestimmten Feldstärken würde gerade wieder ein Fußpunkt auf den Ausgangspunkt fallen, und da das Kathodengebiet für die ganze Entladungserscheinung bestimmend ist, könnte die diskrete Unterteilung des nach außen anschließenden Gebietes hierdurch verursacht sein. Nach den hier angeführten Druck- und Feldmessungen müssen die an der Kathode ausgelösten Elektronen die vermuteten sprungartigen Bahnen in der Tat beschreiben. Indes scheint es nicht möglich, die diskrete Unterteilung der Entladung allgemein hierauf zurückzuführen, denn die Rechnung ergibt die Größenordnung von 30 Bögen, was zwar mit der Speichenzahl der kleinen, bei einigen hundertstel Millimetern Druck beobachteten Spiralen übereinstimmt, bei den großen, bei einigen zehntel Millimetern auftretenden aber ein Mehrfaches der beobachteten Zahl darstellt.

5. Nachweis, daß es sich um Schichten handelt.

Eine andere Möglichkeit, die Natur der Spiralen zu deuten, besteht darin, die Spiraläste als deformierte Schichten des positiven Lichts aufzufassen. Damit stände im Einklang, daß die Spiraläste nahezu tangential an der Kathode ansetzen und noch eine gewisse Strecke längs des Anodenringes verlaufen. Sehr befremdend ist dann aber zunächst, daß jede einzelne Schicht von der nächsten Nähe der Kathode bis dicht an die Anode reicht. In der Tat ließen sich nun Bedingungen auffinden, bei denen unmittelbar verfolgt werden konnte, wie die Spiraläste sich aus normalen kreisförmigen Schichten bilden. Die einzelnen Schritte dieses Überganges waren nur bei Anwendung hohen Außenwiderstandes (Ströme < 1 Milliamp.) einigermaßen

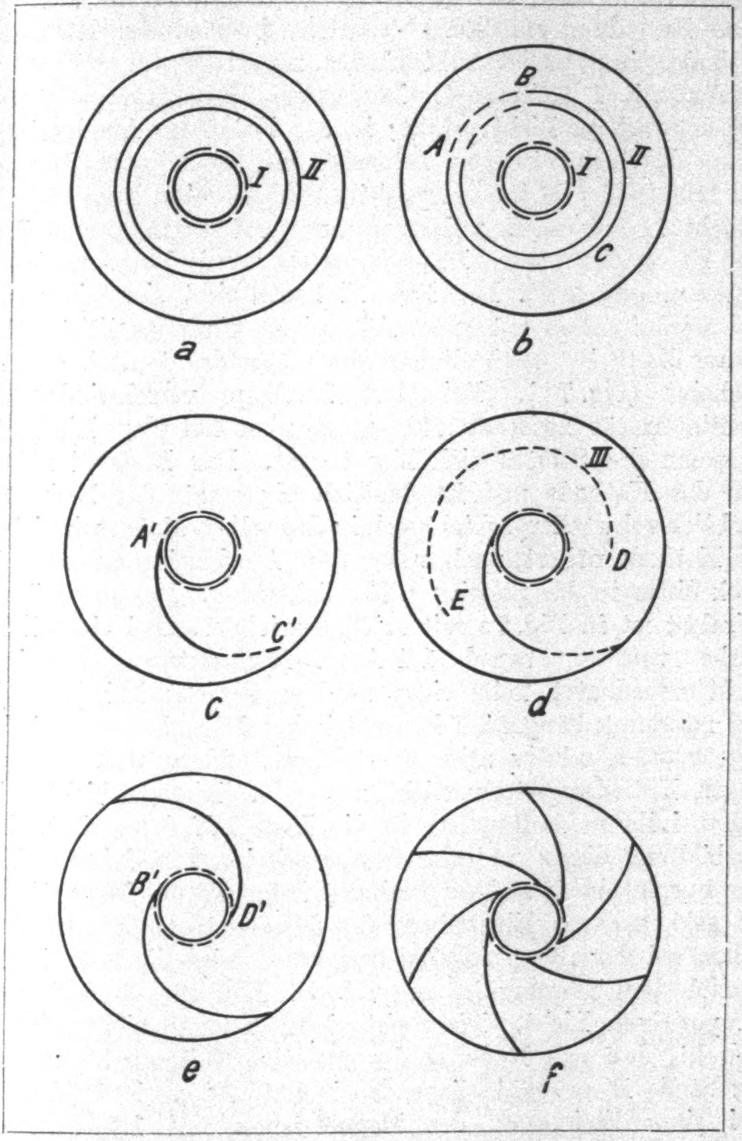


Fig. 7a—f.

stabil zu beobachten. Die einzelnen Stufen sind in den Figg. 7a—f schematisch angedeutet. Der Druck betrug

0,04 mm, der Verlauf der magnetischen Kraftlinien erfolgte von vorne nach hinten. Bei 0,8 Amp. Magnetstrom — ohne Magnetstrom wäre bei den vorliegenden geringen Drucken keine Entladung möglich — besteht in nächster Nähe der Kathode ein deutlich erkennbares negatives Glimmlicht, in Fig. 7a mit *I* bezeichnet. Der ganze übrige Raum ist mit sehr schwachem Licht erfüllt; in der Nähe des Anodenringes nimmt das Licht etwas an Intensität zu. Gesteigertes Magnetfeld läßt in der Mitte des positiven Lichts eine konzentrische Schicht II entstehen, welche anfangs auf ihrem ganzen Umfang zu verfolgen war. Das Magnetfeld wurde langsam bis auf 1,1 Amp. gesteigert. Der Ring II kontrahiert sich ein wenig und wird in dem größeren Teil seines Umfangs lichtstärker bis auf die Stelle *AB* im linken oberen Quadranten, die diffuser erscheint (Fig. 7b). Bei etwa 1,2 Amp. verschwindet die Lichtintensität zwischen *AB* ganz, man hat den Eindruck, als wenn die Schicht sich hier trennt. Das Ende *A* nähert sich der Kathode und ist deutlich abgesetzt, das Ende *CB* wird lichtschwächer, schiebt sich in demselben Maße, wie sich *A* der Kathode nähert, nach außen dem Anodenring zu und geht stark diffus in das positive Glimmlicht über. Der so gebildete Spiralast ist in Fig. 7c mit *A'C'* bezeichnet. Bei einer Feldstärke von annähernd 1,4 Amp. Magnetstrom erscheinen leicht angedeutet Teile einer zweiten Schicht III (Fig. 7d). Ein zusammenhängender konzentrischer Ring kommt bei den angewandten relativ schwachen Magnetfeldern und dem geringen Entladungsstrom nicht zustande. Diese Schicht zeigt sich bei ihrem Auftauchen in die Lage *DE* deformiert. Die Ausbildung dieses unterbrochen erscheinenden Ringes (III) war nur in einem äußerst geringen Intervall des Magnetfeldes bei sehr genauer Einstellung des Magnetstroms zu erhalten. Schon bei der allergeringsten Steigerung wird die linke Hälfte ähnlich dem Vorgang in der Schicht II diffus und vergeht im positiven Licht. Die rechte Hälfte der Schicht wird so gedreht, daß das Ende *D* das negative Glimmlicht an dem der Stelle *B'* gegenüberliegenden Punkte *D'* erreicht (Fig. 7e). Bei einer Steigerung des Magnetstroms auf 1,5—1,7 Amp. werden diese beiden spiralförmig gekrümmten Schichten für einen Augenblick verwaschen, es tauchen dann plötzlich *vier* Spiralen auf, noch weitere Verstärkung läßt einen fünften und sechsten Spiralast entstehen (Fig. 7f). Von einer photographischen Wiedergabe mußte abgesehen werden, da die Lichtintensität zu gering war, und die Spiralen während einer längeren Belichtungszeit nicht genügend ruhig standen.

Zunächst ist zu fragen, ob der *Sinn* der Krümmung der Spiraläste qualitativ dem entspricht, wie er für Schichten zu erwarten wäre. Wie schon oben bemerkt, ist er dem Krümmungssinn entgegengesetzt, der den Bahnen geladener Teilchen entspricht. Im Falle der Fig. 3 z. B. hätten von der Kathode ausgehende Elektronen im Sinn des Uhrzeigers herauszufliegen, also nicht den Spiralästen zu folgen, sondern sie zu durchqueren. Es entspricht dies qualitativ der gewohnten Regel, daß die Schichten von nicht durch Magnetfelder beeinflußten Entladungen quer zur Entladungsbahn stehen. Daß der Winkel zwischen Stromlinie und Schicht auch im Magnetfeld noch 90° beträgt, ist freilich zu bezweifeln. Es ist bekannt, daß die Schichten sich in einem zylindrischen Entladungsrohr bei transversalem Magnetfeld neigen. Für die Neigungsrichtung wurde von Pellat[1]) folgende Regel gefunden: „Ein Beobachter, der sich in der Rohrachse befindet und in Richtung der magnetischen Kraftlinien blickt, sieht die Schichten von links nach rechts ansteigend. Die Schichtfläche enthält die Richtung des Magnetfeldes. Es ist gleich, ob sich die Anode oder Kathode zu Füßen des Beobachters befindet. Falls die Richtung des Entladungsstromes gewechselt wird, bleibt die Neigung der Schichten dieselbe wie vorher. Erst wenn das Magnetfeld umgekehrt wird, nehmen die schräg gestellten Schichten eine entgegengesetzte Neigung an.“ Die Beobachtungen lassen durchweg eine Neigung im Sinne der Pellatschen Regel zu. Wendet man auf die vorliegenden Schichten diese Regel an, um den Verlauf der Stromlinien zu schätzen, so sind die Stromlinien in noch engeren Spiralen nach außen zu führen als bei normalem Durchsetzen der Schicht.

Besonders problematisch aber wird bei dieser ungewöhnlichen Anordnung von Schichten der Potentialverlauf. Von den nicht durch Magnetfelder deformierten Schichten ist man gewohnt anzunehmen, daß sie quer zum Potentialgefälle stehen, und daß in jeder einzelnen ein stärkeres Potential-

---

1) H. Pellat, Compt. rend. **133**. S. 1200. 1901.

gefälle stattfindet. Die Schicht oder schärfer der Schichtkopf wird als Äquipotentialfläche angesehen. Geht man etwa von der Kathode aus, so steigt man von Schicht zu Schicht zu höheren Potentialwerten auf, bis die Anode erreicht ist. Wie aber soll das möglich sein, wenn jede einzelne Schicht von der Kathode zur Anode reicht? Hiernach erschien der Versuch besonders interessant, in den Spiralästen Sondenmessungen vorzunehmen, um den Potentialschritt quer zu ihrer Richtung und den Potentialverlauf längs ihrer Richtung festzustellen. Indes entzogen die Spiraläste sich dieser Absicht dadurch, daß sie beim Eintauchen der Sonde stets verschwanden und einer gleichförmigen Scheibe Platz machten. Liegt die Sonde unmittelbar auf der Kathodenoberfläche oder befindet sie sich einige zehntel Millimeter davon entfernt, so bildet der Sondendraht stets die Ausgangsstelle eines Spiralastes, die übrigen Äste sind wie vorher symmetrisch verteilt. Wird die Sonde bis auf 1,2 mm von der Kathode entfernt, so bleiben die einzelnen Spiralen andeutungsweise bestehen, eine wohldefinierte Ausbildung kann aber auch durch Änderung des Magnetfeldes und der Spannung nicht mehr erreicht werden. Eine Sondenlage noch weiter außerhalb hebt die Spiralausbildung vollkommen auf, die ganze Entladungserscheinung zeigt dann gleichförmiges Aussehen. Die Sondenmessungen ergaben einen gleichförmigen Potentialabfall im äußeren Gebiete; die Aufnahme des vermuteten Potentialsprunges quer zu den Schichten wurde durch ihr Verschwinden vereitelt. Der hohe Kathodenfall freilich ist, da die Sonde im negativen Glimmlicht die Spiralen nicht zerstört, bei bestehenden Spiralen aufgenommen, so daß seine Werte für theoretische Überlegungen angewendet werden dürfen. Außerdem zeigte sich, daß es für den gesamten Potentialfall vom Kathodenglimmlicht zur Anode wenig ausmacht, ob Spiralen bestehen oder eine gleichförmige Scheibe. Er beträgt 60—70 Volt, also mehr, als etwa der Überquerung einer einzelnen Schicht entspricht (10—12 Volt in Wasserstoff nach Wehner).¹)

Wie erst später bemerkt wurde, hat Wehner²) 1910 an Schichten in linearen Rohren ohne Magnetfeld festgestellt, daß sie von Platinsonden so stark gestört wurden, daß auch

---

1) F. Wehner, Ann. d. Phys. 32. S. 49. 1910.

2) F. Wehner, a. a. O., S. 72.

dort Potentialmessungen nicht möglich waren; auch hierin findet also qualitative Übereinstimmung mit dem Verhalten regulärer Schichten statt. Wehner zeigte, daß das Platin durch seine Wechselwirkung mit dem Gas zum Glühen erhitzt werden kann. Er sagt: „Die Störung der Platinsonden in Wasserstoff scheint auf einem Vorgang zu beruhen, der mit der Fähigkeit des Platins, Gase zu absorbieren oder an seiner Oberfläche zu verdichten zusammenhängt. Es trat nämlich die eigenartige Erscheinung auf, daß die Sonde jedesmal, wenn das Rohr längere Zeit ohne Entladung gestanden hatte, bei Eintritt der Entladung lebhaft zu glühen begann. Nach längerem Entladungsdurchgang hörte das Glühen dann auf, trat aber regelmäßig wieder ein, wenn die Entladung längere Zeit ausgesetzt hatte.“ Man darf wohl annehmen, daß hier die neuerdings von Wood an Wolfram studierte Vereinigung von atomistischem zu molekularem Wasserstoff stattfindet.

6. Einige Betrachtungen zum de la Riveschen Versuch.

Bevor die Spiraläste als Schichten erkannt waren, wurde versucht, sich darüber zu orientieren, ob sie in einem erkennbaren Zusammenhang mit den im Magnetfeld auftretenden Bewegungserscheinungen des positiven Glimmlichts stehen, die bei höherem Druck beobachtet und gewöhnlich nach de la Rive benannt werden, der 1849 zuerst solche Bewegungen des Glimmlichts im axialsymmetrischen Felde beschrieb. Wir führen von diesen Versuchen einiges an, da sich, trotzdem z. T. bei intermittierendem Strom beobachtet wurde, gleich einige einfache Angaben über das Verhalten dieser wenig studierten Erscheinung ergaben, die vielleicht noch interessante Beiträge zur Aufklärung der Vorgänge in der positiven Säule liefern mag. Unter Verwendung der oben angegebenen Elektrodenanordnung wurde der „de la Rivesche Versuch“ reproduziert. Eine gleichförmige Rotationsgeschwindigkeit wurde am vorteilhaftesten mit einer vernickelten Drahtringanode erhalten. Die zur Aufrechterhaltung des Stromes bedingte höhere Spannung lieferte ein Funkeninduktor oder eine größere Influenzmaschine. Als Gasfüllung dienten Stickstoff und Wasserstoff; die Drucke wurden von 0,2—25 cm variiert. Die Entladung erfolgte bei höheren Drucken in Form eines Stromfadens, die Strombahn erschien auch während der Rotation stets gestreckt. Die Rotation erfolgte schneller und gleichmäßiger, falls der Aluminiumkern, der von den magnetischen Kraftlinien bevorzugt beeinflußt werden konnte, als Kathode diente.

In Wasserstoff erfolgt das Einsetzen einer rotierenden Entladung schon bei höheren Drucken, etwa 25 cm. Der Entladungsfaden ist anfänglich sehr gut gegen den übrigen Raum abgegrenzt, der Rotationsraum zeigt bei den hohen Drucken noch kein Entladungslicht. Wird der Druck auf 20 cm erniedrigt, so verbreitert sich das Lichtband über 2 mm, die Lichtintensität ist geringer geworden, besonders die Begrenzung erscheint diffus. Wird etwas weiter evakuiert, so zeigt der gesamte Rotationsraum schwaches rötliches Licht. Es kann aber noch verfolgt werden, wie die Entladung weiter in dieser lichtschwachen Scheibe rotiert, die Ränder des Entladungsbandes gehen dabei gleichsam in die Scheibe über. Bei Luft

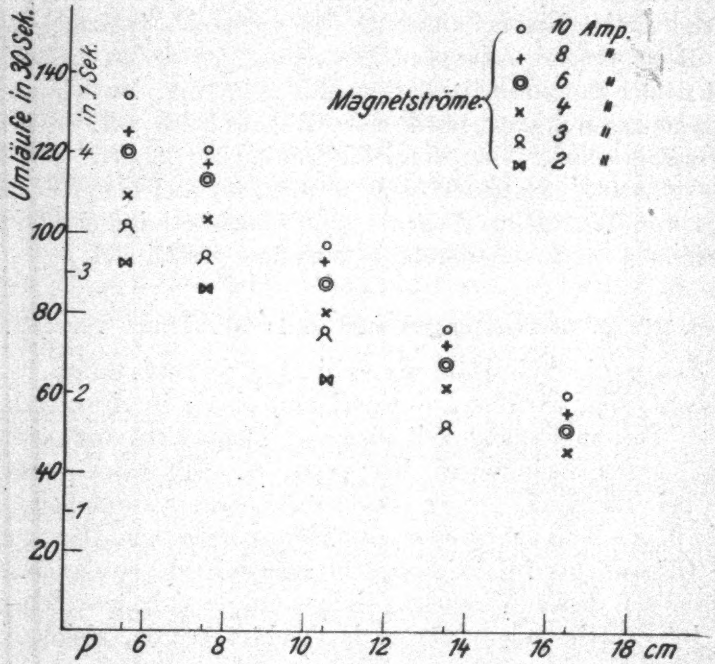


Fig. 8.

und Stickstoff tritt letztere Erscheinung erst bei bedeutend niedrigeren Drucken, kleiner als 7 cm, auf.

Nachstehend folgen einige Angaben über die Abhängigkeit der Umlaufsgeschwindigkeiten vom Druck, Magnetfeld und Stromstärke. Eine Abnahme des Druckes bedingt eine Erhöhung der Umlaufsgeschwindigkeit (vgl. Fig. 8); die naheliegende Vermutung, daß etwa die Umlaufsgeschwindigkeit dem Drucke umgekehrt proportional sei, führt nicht zu einer brauchbaren Darstellung. Steigerung des Magnetfeldes ergibt eine lineare Zunahme der Umlaufszahlen, vgl. graphische Wiedergabe in Fig. 9. Es sind die mittleren magnetischen Feldstärken in einer Entfernung von 7,1 mm von der Kathodenmitte (vgl. Fig. 6) angegeben. Durch Erhöhung der Unterbrechungszahl bei Verwendung eines Funkeninduktors oder Vermehrung der Tourenzahl einer Influenzmaschine wurde ebenfalls eine Steigerung der Umlaufszahlen bewirkt.

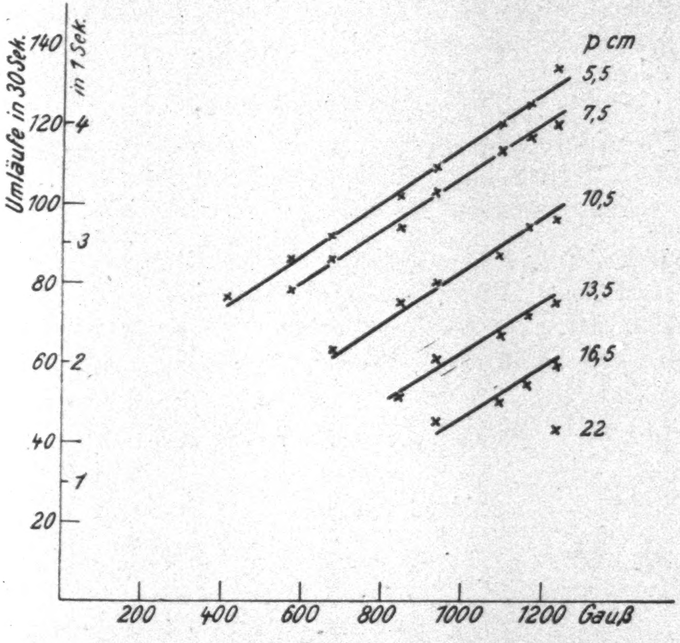


Fig. 9.

Zur Prüfung des anfänglich in Frage gezogenen Gedankens, die Spiralerscheinung sei etwa eine „stroboskopische Wirkung“

an solchen Entladungsfäden, veranlaßt durch den bei niedrigem Druck zu erwartenden raschen Umlauf (Fig. 8) und eine automatische Unterbrechung der Entladung, wurde noch die Beobachtung von Kossel, daß bei Bestehen der Spiralen ein im Hauptstrom eingeschaltetes Telephon schweigt, während die Nachbarzustände um so raschere Wechsel zeigen, je weiter man sich vom Spiralzustand entfernt, durch Beobachtung des passend ausgeblendeten Leuchtens eines Astes im rotierenden Spiegel unterstützt. Es ergab sich ein gleichförmiges Band: die Spiralen existieren unter Gleichstrom.

7. Zusammenfassung.

Es wird gezeigt, daß in einer Glimmentladung im transversalen Magnetfelde Schichten bestehen können, von denen jede einzelne von der Kathode zur Anode reicht.

Hrn. Prof. Kossel, der diese Arbeit angeregt und mir bei Ausführung derselben durch zahlreiche gute Ratschläge geholfen hat, spreche ich an dieser Stelle nochmals meinen ergebensten Dank aus.

(Eingegangen 25. November 1925.)

Wir werden darauf aufmerksam gemacht, daß nicht Eduard Weber und Ernst Heinrich Weber, deren Porträts in Nr. 13 veröffentlicht wurden, die Verfasser des im Jahre 1825 erschienenen Werkes „Wellenlehre auf Experimente gegründet“ sind, sondern Wilhelm Weber und Ernst Heinrich Weber.

Verlag der „Annalen der Physik“.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Pfeiffer's

Neu! D.R.P. angem. Neu!

Ganz aus Stahl!

Litteratur:

STINTZING, Phys. Zeitschr. 1922, pag. 469; Zeitschr. f. techn. Physik 1922, Nr. 12, pag. 369.

Quecksilber-Dampfstrahlpumpe

Saugleistung:

15 Liter auf Aussetzen jeder Entladung in **10 Sekunden** vom Vorvakuum ab.

Listen von Abtlg. „A“ anfordern

Arthur Pfeiffer, Wetzlar 1

Inhalt

Seite

1. **Bernhard Gündel.** Beiträge zur Frage der Wärmekonvektion 697
2. **R. Tomaschek.** Über Versuche zur Auffindung elektrodynamischer Wirkungen der Erdbewegung in großen Höhen I 743
3. **Walter Wessel.** Sind magnetische Momente der Atomkerne durch α-Strahl-Ablenkung nachweisbar? 757

Mit Namenregister zum Jahrgang 1925.

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: München, Kolberger Straße 16.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft können die Annalen zu einem Vorzugspreis beziehen.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik" üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

1925. № 24.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 78.

1. *Beiträge zur Frage der Wärmekonvektion;*
von Bernhard Gündel.

Einleitung.

In den nachstehenden Ausführungen sollen stationäre Flüssigkeitsströmungen besprochen werden, die infolge einer durch eine bestimmte Temperaturverteilung bewirkten Inkonstanz der Massendichte unter dem Einfluß der Schwerebeschleunigung zustande kommen. Bei diesen Strömungen wirken vermöge der Beweglichkeit der Flüssigkeitsteilchen die Wärmeleitung und der konvektive Wärmetransport gleichzeitig — eine Tatsache, die z. B. die Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit von Flüssigkeiten gegenüber der von festen Körpern wesentlich erschwert hat.

Die Untersuchung dieser Strömungen ist Gegenstand schon vieler Abhandlungen gewesen, doch hatten sie im allgemeinen nur spezielle, oft von experimentellen Absichten bedingte Ziele oder betrafen generelle Eigenschaften der Differentialgleichungen des Problems. Die theoretischen Arbeiten befassen sich vorwiegend mit dem Problem der Abkühlung eines heißen Körpers in einem flüssigen oder gasförmigen Medium oder dienen der Ausarbeitung eines Verfahrens zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit von Flüssigkeiten und Gasen.

Die ersten mathematischen Formulierungen des Abkühlungsproblems unter Einrechnung der Konvektion sind schon von Fourier[1]) und Poisson[2]) gegeben worden, doch geben beide keine speziellen oder allgemeineren Lösungen des Problems. Im Jahre 1879 gab A. Oberbeck[3]) die approximative Berechnung einer speziellen Strömung, die er durch eine Entwicklung nach Potenzen des Wärmeausdehnungskoeffizienten gewann. Zwei Jahre später veröffentlichte L. Lorenz[1]) eine Arbeit über ein spezielles Problem, zu dem er durch Abkühlungsversuche bei der Wärmeleitfähigkeitsbestimmung von Metallen geführt wurde; er berechnete die stationäre Strömung in der Nähe einer heißen, vertikalen Platte, um die Ergebnisse experimentellen Untersuchungen über Abkühlung dienstbar zu machen. An weiteren Arbeiten aus dem Gebiet der Wärmeleitung und Wärmekonvektion sind noch die Abhandlungen von Weber[2]) (1880), Graetz[3]) (1883), Ebeling[4]) (1908) und Weber[5]) (1917) zu zitieren.

---

[1]) J. B. J. Fourier, Oeuvres de Fourier (Darboux's Edition. t. II. p. 275ff. 1888).

[2]) D. Poisson, Théorie math. de la chaleur (1835); vgl. A. Russell, Phil. Mag. 20. S. 591. 1910 sowie auch R. Seeliger, Phys. Zeitschr. 26. S. 282ff. 1925.

[3]) A. Oberbeck, Wied. Ann. 7. S. 291. 1879.

Ein wesentlich neuer Gesichtspunkt kam in die Frage der Wärmekonvektion durch die Forschungen von Boussinesq[6]), der die Differentialgleichungen des Abkühlungsproblems durch eine geeignete Transformation von den Materialkonstanten befreite und hierdurch zu einer Modellregel gelangte. Rossell[7]) griff in seiner Abhandlung vom Jahre 1910 auf diese Modellbetrachtungen Boussinesq's zurück und lieferte Berechnungen für die Abkühlung von Kreiszylindern und elliptischen Zylindern in einem Flüssigkeitsstrome. Sehr ausführlich werden die Modellregeln zwecks experimenteller Auswertungen von Davis[8]) behandelt, der in drei Aufsätzen die verschiedenen Gesichtspunkte des Problems bespricht.

Während bei den zitierten Arbeiten im allgemeinen spezielle Strömungsfälle im Vordergrunde standen — meist Fälle von aktuellem Interesse für Abkühlungsfragen, für die man eine geeignete Berechnungsmethode ausfindig zu machen suchte —, soll in der vorliegenden Arbeit insofern ein entgegengesetzter Weg eingeschlagen werden, als zu einem be-

---

1) L. Lorenz, Phys. Ann. 13. S. 582. 1881.

2) H. F. Weber, Wied. Ann. 10. S. 103. 1880.

3) L. Graetz, Phys. Ann. 18. S. 79. 1883.

4) H. Ebeling, Phys. Ann. 27. S. 391. 1908.

5) S. Weber, Phys. Ann. 54. S. 456. 1917.

6) V. J. Boussinesq, Théorie analytique de la chaleur. II. p. 154ff. bes. p. 174ff. 1903.

7) A. Russell, Phil. Mag. 20. S. 591. 1910.

8) A. H. Davis, Phil. Mag. 40. S. 692. 1920; 43. S. 329. 1922; 44. S. 920. 1922.

stimmten allgemeinen Lösungsansatz die durch ihn leicht zugänglichen speziellen Fälle aufgesucht werden sollen.

1. Problemstellung und mathematische Formulierung des Problems.[1]

Die Grundgleichungen, von denen man auszugehen hat, sind die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho\,\mathfrak{v}) = 0\,, \tag{1}$$

die Bewegungsgleichung einer Flüssigkeit mit innerer Reibung:

$$\varrho \cdot \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{f} - \operatorname{grad} p + \lambda\,\Delta\mathfrak{v} + \frac{\lambda}{3}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{v}\ ^{2)} \tag{2}$$

sowie die mit dem von der Wärmekonvektion herrührenden inneren Vektorprodukt $-(\mathfrak{v}\operatorname{grad}\tau)$ versehene Wärmeleitungsgleichung (wobei von Strahlungswirkungen abgesehen wird):

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \mu\,\Delta\tau - (\mathfrak{v}\operatorname{grad}\tau)\,. \tag{3}$$

In diesen Gleichungen bedeuten: $\mathfrak{v}$ den Geschwindigkeitsvektor der Flüssigkeit, ϱ die Massendichte der Flüssigkeit, $\mathfrak{f}$ den Vektor der auf die Flüssigkeit wirkenden Kraftdichte, p den hydrostatischen Druck, λ den Koeffizienten der Flüssigkeitsreibung, τ die Temperatur, μ den Temperaturleitungskoeffizienten.[3]

Das Symbol d/dt bezeichnet einen im bewegten Element gebildeten Differentialquotienten, $\partial/\partial t$ ortsfeste Differentiation. Der Charakter und das Vorzeichen des in Gleichung (3) eingefügten Konvektionsgliedes sind leicht aus der für jeden Skalar gültigen Formel

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial\tau}{\partial t} + (\mathfrak{v}\operatorname{grad}\tau)$$

zu ersehen, wenn man beachtet, daß für den Fall der Konvektion

$$\frac{d\tau}{dt} = \mu\,\Delta\tau \quad \text{ist.}$$

---

[1] Zu diesen Betrachtungen vgl. auch A. Oberbeck, Wied. Ann. 7. S. 291. 1879.

[2] Vgl. E. Madelung, Math. Hilfsm. d. Physikers, 2. Aufl. 1925. S. 209.

[3] Es gilt die Beziehung $\mu = \frac{w}{\varrho \cdot c} = \frac{\text{Wärmeleitfähigkeit}}{\text{Dichte} \times \text{spez. Wärme}}$.

Für stationäre Strömungen hat man zu setzen:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0.$$

Die Kontinuitätsgleichung (1) geht hierdurch über in

$$\operatorname{div}(\varrho\,\mathfrak{v}) = 0.$$

In unseren Betrachtungen werden wir die Dichte ϱ an allen den Stellen der Gleichungen, wo sie rein mechanische Bedeutung hat und ihre Inkonstanz lediglich eine unwesentliche Korrektion zur Folge hat, als eine Konstante ϱ_0 auffassen. Wir werden also die Flüssigkeit als inkompressibel behandeln. Dort, wo diese Inkonstanz hingegen als Strömungsursache erscheint, ist sie selbstverständlich zu berücksichtigen. Mithin ist $\operatorname{div}\mathfrak{v} = 0$.

Die Bewegungsgleichung (2) geht vermöge

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\operatorname{grad})\mathfrak{v}, \quad \operatorname{div}\mathfrak{v} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} = 0$$

über in

$$\mathfrak{f} - \operatorname{grad}\left(p + \frac{\varrho_0 v^2}{2}\right) + \lambda\,\Delta\,\mathfrak{v} + \varrho_0[\mathfrak{v}\operatorname{rot}\mathfrak{v}] = 0.$$

Die Gleichung (3) der Wärmeströmung wird

$$\mu\,\Delta\,\tau - (\mathfrak{v}\operatorname{grad}\tau) = 0.$$[1]

Die Volumkraftdichte $\mathfrak{f}$ bestimmt sich als

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{g}\cdot\varrho,$$

wobei $\mathfrak{g}$ den Vektor der Fallbeschleunigung bedeutet. Beschränkt man sich auf Temperaturbereiche, innerhalb deren die Wärmeausdehnung stark angenähert linear mit der Temperatur verläuft, so ist

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{1 + \alpha(\tau - \tau_0)}.$$

Hierin ist α der kubische Ausdehnungskoeffizient der Flüssigkeit, ϱ_0 die Dichte derselben bei der festen Temperatur τ_0. $\alpha(\tau - \tau_0)$ ist eine kleine Größe, mithin setzen wir:

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{g}\cdot\varrho_0\cdot\bigl(1 - \alpha(\tau - \tau_0)\bigr).$$

---

[1] Wegen $\operatorname{div}\mathfrak{v} = 0$ ist diese Gleichung auch in der Form zu schreiben: $\operatorname{div}(\mu\operatorname{grad}\tau - \mathfrak{v}\,\tau) = 0$, d. h. der Vektor der Wärmeströmung ist quellenfrei.

Die Gleichungen, mit denen wir uns hier zu befassen haben, sind also:

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{div}\mathfrak{v} = 0,$$

$$\text{(5)} \qquad \mathfrak{g}\,\varrho_0\left(1-\alpha(\tau-\tau_0)\right) - \operatorname{grad}\left(p+\frac{\varrho_0 v^2}{2}\right) + \lambda\,\Delta\mathfrak{v} + \varrho_0[\mathfrak{v}\operatorname{rot}\mathfrak{v}] = 0,$$

$$\text{(6)} \qquad \mu\,\Delta\tau - (\mathfrak{v}\operatorname{grad}\tau) = 0.^{1)}$$

2. Aufstellung von Rekursionsgleichungen für Strömungen von verschwindendem Einfluß der Flüssigkeitsträgheit.

Zunächst sollen Strömungen betrachtet werden, bei denen die Geschwindigkeit klein ist, sodaß in Gleichung (5) die in $\mathfrak{v}$ quadratischen Glieder, die der Trägheit der Flüssigkeit Rechnung tragen, vernachlässigt werden können. Wir erhalten hier die Gleichungen:

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{div}\mathfrak{v} = 0,$$

$$\text{(2)} \qquad \mathfrak{g}\,\varrho_0\left(1-\alpha(\tau-\tau_0)\right) - \operatorname{grad}p + \lambda\,\Delta\mathfrak{v} = 0,$$

$$\text{(3)} \qquad \mu\,\Delta\tau - (\mathfrak{v}\operatorname{grad}\tau) = 0.$$

Dies ist ein System von partiellen Differentialgleichungen für $\mathfrak{v}$, τ und p; (1) und (3) sind skalare Gleichungen, (2) eine vektorielle. Gleichung (3) enthält das quadratische Glied $(\mathfrak{v}\operatorname{grad}\tau)$, das die Berechnung spezieller Fälle insofern erschwert, als es jede Aufstellung und Superposition partikulärer Lösungen unmöglich macht.

Wir betrachten im Folgenden die Gleichungen (1), (2) und (3) im Zweidimensionalen, also Strömungen, bei denen sich für jeden Schnitt senkrecht zu einer bestimmten Richtung dasselbe Strömungsbild ergibt und alle Komponenten in dieser Richtung verschwinden. Bildet man von Gleichung (2) die Rotation, so erhält man leicht die im Zweidimensionalen skalare Gleichung

$$\varrho_0\cdot\alpha[\mathfrak{g}\operatorname{grad}\tau] + \lambda\,\Delta\operatorname{rot}\mathfrak{v} = 0.$$

Hierbei ist zu beachten, daß wir durch die Rotationsbildung keine Lösungsteile der Geschwindigkeit und der Temperatur verlieren, da p in unseren Gleichungen nur in der Form von $\operatorname{grad}p$ auftritt, wir also alle Teile der Gleichung, die Gradient eines Potentials sind, zu $\operatorname{grad}p$ gehörend rechnen können.

---

1) Die Größen μ und λ gelten als Konstanten, ihre Abhängigkeit von der Temperatur tritt in praktischen Fällen i. A. wohl selten in Erscheinung.

Wir legen die x-Achse horizontal nach rechts gerichtet, die y-Achse senkrecht zu ihr nach oben; demgemäß ist $g_x = 0$ und $g_y = -g$ und unsere Gleichungen lauten:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \tag{4}$$

$$\gamma \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x} + \lambda \Delta \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = 0, \quad \gamma = \varrho_0 \alpha g, \tag{5}$$

$$\mu \Delta \tau - v_x \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x} - v_y \cdot \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0. \tag{6}$$

Die Lösung dieser Gleichungen setzen wir in Form von Doppelsummen an:

$$v_x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} \cdot x^m \cdot y^n, \tag{A}$$

$$v_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n} \cdot x^m \cdot y^n, \tag{B}$$

$$\tau - \tau_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{m,n} \cdot x^m \cdot y^n. \tag{C}$$

In der Erstreckung der Summen auf Potenzprodukte $x^m \cdot y^n$ von nur positiven, von 0 verschiedenen m und n liegt keine Beschränkung der Allgemeinheit der physikalischen Probleme, da in ihnen Singularitäten der Geschwindigkeit und der Temperatur im Endlichen nicht auftreten und wir bei physikalischen Problemen immer einen Punkt als Koordinatenursprung wählen können, für den $v_x = v_y = 0$ ist und dessen τ wir als τ_0 bezeichnen. Die Dichte ϱ_0 der oben angestellten Betrachtungen ist die Dichte der Flüssigkeit am Koordinatenanfangspunkt.

Setzt man diese Doppelsummen in die Gleichungen (4), (5) und (6) ein, so berechnet man folgende Koeffizientenbeziehungen.

Aus Gleichung (4):

$$A_{m,n} = -\frac{n+1}{m} \cdot B_{m-1,\,n+1}. \tag{I.}$$

Die $A_{0,n}$ und $B_{m,0}$ bleiben hier noch frei verfügbare Koeffizienten.

Aus Gleichung (5) bei Berücksichtigung von I.:

$$\text{II.}\quad\begin{cases} -\frac{\gamma}{\lambda}\cdot C_{m,n} = (m+1)(m+2)\cdot B_{m+2,n} \\ \qquad\qquad + 2\cdot(n+1)(n+2)\cdot B_{m,n+2} \\ \qquad\qquad + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{(m-1)\cdot m}\cdot B_{m-2,n+4} \\ \qquad\qquad\qquad (\text{für } m > 1). \\ -\frac{\gamma}{\lambda}\cdot C_{1,n} = 6\cdot B_{3,n} + 2(n+1)(n+2)\cdot B_{1,n+2} \\ \qquad\qquad - (n+1)(n+2)(n+3)\,A_{0,n+3} \\ \qquad\qquad\qquad (\text{für } m = 1). \end{cases}$$

Für $m = 0$ liefert Gleichung (5) keine Koeffizientenrelation.

Aus Gleichung (6) bei Berücksichtigung von I. und Einführung geeigneter Laufindizes:

$$\text{III.}\quad\begin{cases} \mu\left(C_{m+2,n}\cdot(m+1)(m+2) + C_{m,n+2}\cdot(n+1)(n+2)\right) \\ \qquad\qquad = (m+1)\sum\limits_{q+s=n} A_{0,q}\cdot C_{m+1,s} \\ \qquad\qquad -\sum\limits_{\substack{p+r=m\\ q+s=n+1}} \frac{q\cdot r - s\cdot(p+1)}{p+1}\cdot B_{p,q}\cdot C_{r,s} \qquad p, q, r, s \geqq 0. \end{cases}$$

Es fragt sich nun, ob dieses System der Gleichungen I, II u. III zwischen den Koeffizienten der Doppelsummen eine rekursive Ermittlung gestattet, d. h. ob die Gleichungen immer in den Indizes höchste Glieder enthalten, die in den dem Grad der entsprechenden $x^m\cdot y^n$ nach vorangehenden oder nachfolgenden Gleichungen nicht ebenfalls höchste Koeffizienten sind. Gleichung I verbindet stets Glieder gleich hohen Grades, wie sich aus der Gleichheit der Indexquersumme auf beiden Seiten der Gleichung ergibt. Sie dient zur Berechnung der $A_{m,n}$ aus den $B_{m,n}$ (abgesehen von den $A_{0,n}$), und es fragt sich mithin nur, ob die Relationen II und III eine rekursive Ermittlung der $B_{m,n}$, $A_{0,n}$ und $C_{m,n}$ gestatten. In Gleichung II treten die $B_{m,n}$ bzw. $A_{0,n}$ durchweg mit Indizes behaftet auf, deren Summe um 2 größer ist als die der Indizes des auf der linken Seite der Gleichung stehenden $C_{m,n}$ bzw. $C_{1,m}$. Die $B_{m,n}$ bzw. $A_{0,n}$ sind hier also die höchsten Glieder und treten als solche nur dann, aber auch immer dann auf, wenn man von den $C_{m,n}$ mit einer um 2 kleineren Indexquersumme ausgeht. Leiten sich nun die $C_{m,n}$ nach Gleichung III aus tieferen $B_{m,n}$, $A_{0,n}$ und $C_{m,n}$ ab, so haben wir ein Rekursionssystem vor uns. Tatsächlich sind in III die $C_{m,n}$ auf der linken Seite der Gleichung einmal und nur einmal die höchsten Koeffizienten, denn da $A_{0,0} = B_{0,0} = 0$ ist, treten in den Produktsummen als höchste Koeffizienten die $C_{m,n}$, $B_{m,n}$, $A_{0,n}$ mit einer Indexquersumme auf, die um 2 kleiner ist als die der auf der linken Seite stehenden $C_{m,n}$.

Bei dem Berechnen jeder neuen Koeffizientendiagonale — unter einer solchen wollen wir die Gesamtheit der Koeffizienten der Glieder eines Grades $x^m \cdot y^n$ verstehen — hat man die Gleichungen II und III in allen möglichen m und n anzusetzen, für die $m + n + 2$ gleich dem Grad der zu bestimmenden Glieder $B_{m,n} x^m \cdot y^n$, $A_{0,n} \cdot y^n$ und $C_{m,n} x^m \cdot y^n$ ist. Man erkennt hierbei, daß man, um die Koeffizienten einer Diagonale zu erhalten, d. h. durch niedere auszudrücken, lineare Gleichungssysteme aufzulösen hat, bei denen die Anzahl der Unbekannten und die der Gleichungen zwischen ihnen mit steigendem Grad der Potenzglieder $x^m \cdot y^n$ wachsen. Beim Ansetzen einer neuen Diagonale von Koeffizienten bleiben je nach der Art des speziellen Problems mehr oder weniger Freiheiten für die zu berechnenden Koeffizienten, über die man bei der Erfüllung der Randbedingungen zu verfügen hat. Man ersieht aus der Wirkungsweise der Gleichungen II und III, daß man im allgemeinen keine abbrechenden Lösungen erwarten kann.

Die Berechnung des Druckes p erfolgt nach Ermittlung der v_x, v_y und τ gemäß den Komponentengleichungen der Bewegungsgleichung (2). Nach ihr ist:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \lambda \Delta v_x,$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = - g \varrho_0 \left(1 - \alpha(\tau - \tau_0)\right) + \lambda \Delta v_y.$$

Die erste dieser Gleichungen ermittelt p bis auf eine Funktion von y allein, man benötigt die zweite von ihnen nur zur Bestimmung der von x freien Glieder der den hydrostatischen Druck darstellenden Doppelsumme.

3. Strömungen mit einer identisch verschwindenden Geschwindigkeitskomponente (triviale Erfüllung der Divergenzbedingung).

Zunächst behandeln wir einige Fälle, bei denen wir prinzipielle Forderungen für die Geschwindigkeitskomponenten aufstellen und die Randbedingungen erst nach Maßgabe der entstehenden Lösungen formulieren.

a) Wir suchen eine Strömung, für die $v_z \equiv 0$ ist. Hier sind also alle $A_{m,n} = 0$, und gemäß Gleichung I verschwinden alle $B_{m,n} = 0$ für $n > 0$, es existieren lediglich die $B_{m,0}$. Nach Relation II sind dann nur $C_{m,0}$ und $C_{0,n}$ vorhanden. Ein wenig komplizierter liegen die Verhältnisse bei Gleichung III. Für $m = 0$ ist:

$$\mu \cdot C_{0,n+2}(n+1)(n+2) = 0, \quad \text{sofern} \quad n \lesseqgtr 0,$$
$$(C_{2,0} + C_{0,2}) = 0, \quad \text{sofern} \quad n = 0 \text{ ist.}$$

Setzt man in III $m > 0$, $n = 1$, so ist:

$$\sum_{\substack{p+r=m\\ q+s=2}} \frac{q \cdot r - s \cdot (p+1)}{p+1} \cdot C_{r,s} B_{p,q} = -2\, C_{0,2} \cdot B_{m,0} = 0,$$

und da nicht alle $B_{m,0}$ verschwinden, muß $C_{0,2} = -C_{2,0} = 0$ sein. Mithin existieren nur die $B_{m,0}$, $C_{m,0}$ nebst $C_{0,1}$.[1] Für $m > 0$, $n = 0$ erhält man:

$$\mu \cdot C_{m+2,0}(m+1)(m+2) - C_{0,1} \cdot B_{m,0} = 0,$$

für $m > 0$, $n > 0$ ergibt sich:

$$C_{0,n+1} \cdot B_{m,0} = 0,$$

und diese Beziehung fordert kein Verschwinden der $B_{m,0}$, da für $n > 1$ $C_{0,n} = 0$ ist; unsere Rechnungen tragen also keine Widersprüche in sich, da die Rekursionen uns nicht von höheren Koeffizienten, deren Verschwinden generell gefordert ist, zu neuen Gleichungen für tiefere Koeffizienten führen, über die schon rekursiv verfügt ist.

Der Fall, daß $v_z \equiv 0$ ist, führt mithin zu den Rekursionsgleichungen:

$$B_{m+2,0} = -\frac{\gamma}{\lambda} \cdot \frac{1}{(m+1)(m+2)} \cdot C_{m,0},$$
$$C_{m+2,0} = +\frac{C_{0,1} \cdot B_{m,0}}{\mu (m+1)(m+2)},$$

wobei $C_{2,0} = 0$ ist, d. h. alle $B_{4k,0} = C_{4k+2,0} = 0$ sind.

---

[1] Abgesehen ist von dem irrelevanten $C_{0,0} = \tau_0$.

Es ist ein Leichtes, diese von den vier Konstanten $C_{1,0} = A$; $C_{0,1} = B$; $B_{1,0} = a$; $B_{2,0} = b$ ausgehenden Rekursionen durchzuführen.

1. Zunächst betrachten wir den Fall, daß $C_{0,1} = B = 0$ ist. Wir erhalten unmittelbar die sehr einfache Lösung:

$$v_x \equiv 0,$$
$$v_y = a x + b x^2 - \frac{\gamma \cdot A}{6 \lambda} x^3,$$
$$\tau = \tau_0 + A x,$$

mit den uns für die Erfüllung von Randbedingungen zur Verfügung stehenden Konstanten A, a, b, τ_0.

Mit dieser Lösung können wir die Strömung zwischen zwei vertikalen parallelen Platten von verschiedener, aber auf jeder derselben konstanten Temperatur darstellen. Die Ebenen mögen die Lagegleichungen $x = + \frac{d}{2}$ und $x = - \frac{d}{2}$ haben, auf der ersteren herrsche die Temperatur τ_1, auf der letzteren τ_2; v_y verschwindet an beiden Platten. Die Berücksichtigung der Randbedingungen liefert:

$$v_x \equiv 0,$$
$$v_y = \frac{\gamma d^2 \cdot (\tau_1 - \tau_2)}{48 \lambda} \cdot \left\{ \left(\frac{2x}{d} \right) - \left(\frac{2x}{d} \right)^3 \right\},$$
$$\tau = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} + \frac{\tau_1 - \tau_2}{2} \cdot \left(\frac{2x}{d} \right);$$

ferner erhält man nach dem auf S. 704 angegebenen Verfahren

$$p = p_0 - g \varrho_0 \cdot y.$$

Hierin ist p_0 eine Integrationskonstante, die wir als den hydrostatischen Druck für $y = 0$ aufzufassen haben; sie hat für unsere Rechnung keine Bedeutung, da in den Gleichungen unseres Problems nur Differentialquotienten von p auftreten.

Die lediglich von x abhängige Geschwindigkeit zeigt für jedes y denselben Verlauf einer ungeraden ganzen rationalen Funktion 3. Grades. Nehmen wir an, es sei $\tau_1 > \tau_2$ — und hierin liegt keine Einschränkung — so ist v_y im Bereich $0 < x < \frac{d}{2}$ positiv und demnach im Intervall $-\frac{d}{2} < x < 0$ negativ von demselben Betrag, und es ereicht für $x = \pm \frac{d}{6} \sqrt{3}$ den Maximalbetrag

$$v_{\max.} = \frac{\gamma d^2 \cdot (\tau_1 - \tau_2)}{216 \cdot \lambda} \cdot \sqrt{3}.$$

Da für alle Bereiche $-\frac{d}{2} \leqq x \leqq +\frac{d}{2}$ (und alle Substanzen) der Ausdruck $\frac{2x}{d} - \left(\frac{2x}{d}\right)^3 \leqq \frac{2}{9}\sqrt{3}$ ist und für verschiedene d an ähnlich gelegenen Stellen $x = x_0$ denselben Wert annimmt, gestattet der Faktor $\gamma \cdot d^3 \cdot (\tau_1 - \tau_2)/48\,\lambda$ unmittelbar die Feststellung, daß die Geschwindigkeit dem Quadrat des Plattenabstandes, der Temperaturspannung $(\tau_1 - \tau_2)$ und dem Produkt $\varrho_0 \alpha$ direkt, dem Faktor der inneren Reibung umgekehrt proportional ist.

2. Ist $C_{0,1} = B > 0$, so bricht die Lösung nicht ab; man rechnet mit den aus den obigen[1] leicht abzuleitenden Rekursionen:

$$B_{m+4,0} = -\frac{\gamma \cdot B}{\mu\lambda} \cdot \frac{B_{m,0}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)},$$

$$C_{m+4,0} = -\frac{\gamma \cdot B}{\mu\lambda} \cdot \frac{C_{m,0}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)},$$

wobei nunmehr auszugehen ist von den Größen

$$C_{1,0} = A; \qquad B_{1,0} = a; \qquad B_{2,0} = b;$$

$$C_{3,0} = \frac{aB}{3!\,\mu}; \qquad B_{3,0} = -\frac{\gamma A}{3!\,\lambda}; \qquad C_{4,0} = \frac{2bB}{4!\,\mu}.$$

Setzt man zur Abkürzung $\frac{\gamma \cdot B}{\mu\lambda} = \nu$, so erhält man die Lösungen:

$$v_x \equiv 0,$$

$$v_y = a\sum_{n=0}^{\infty}(-\nu)^n \cdot \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} + 2b\sum_{n=0}^{\infty}(-\nu)^n \cdot \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} - \frac{\gamma \cdot A}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}(-\nu)^n \cdot \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!},$$

$$\tau = \tau_0 + \frac{2Bb}{\nu\mu} + By + A\sum_{n=0}^{\infty}(-\nu)^n \cdot \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} + \frac{aB}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}(-\nu)^n \cdot \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} - \frac{2bB}{\nu\mu}\sum_{0=n}^{\infty}(-\nu)^n \cdot \frac{x^{4n}}{(4n)!}.$$

---

[1] Vgl. S. 705.

Beachtet man, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-\nu)^n\cdot\frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!}=-\frac{1}{4\varepsilon^3}(\mathfrak{Sin}\,\varepsilon x\cos\varepsilon x-\mathfrak{Cof}\,\varepsilon x\sin\varepsilon x)$$

ist, worin $\varepsilon=\sqrt[4]{\frac{\nu}{4}}=\sqrt[4]{\frac{\gamma\cdot B}{4\lambda\mu}}$ bedeutet, und daß die übrigen Potenzreihen sich aus dieser durch Differentiation herleiten, so erhält unsere Lösung die Form:

$$v_x\equiv 0,$$

$$v_y=\frac{2a\varepsilon^2\lambda+\gamma A}{4\varepsilon^3\lambda}\mathfrak{Sin}\,\varepsilon x\cos\varepsilon x+\frac{2a\varepsilon^2\lambda-\gamma A}{4\varepsilon^3\lambda}\mathfrak{Cof}\,\varepsilon x\sin\varepsilon x$$

$$+\frac{b}{\varepsilon^2}\mathfrak{Sin}\,\varepsilon x\sin\varepsilon x,$$

$$\tau=\tau_0+\frac{bB}{2\mu\varepsilon^4}+By+\frac{2A\mu\varepsilon^2-aB}{4\mu\varepsilon^3}\cdot\mathfrak{Sin}\,\varepsilon x\cos\varepsilon x$$

$$+\frac{2A\mu\varepsilon^2+aB}{4\mu\varepsilon^3}\mathfrak{Cof}\,\varepsilon x\sin\varepsilon x-\frac{bB}{2\mu\varepsilon^4}\mathfrak{Cof}\,\varepsilon x\cos\varepsilon x;$$

an noch willkürlichen Konstanten enthält diese Lösung A, a, B, b, τ_0. Wir bestimmen die verfügbaren Konstanten so, daß die Strömung folgende Randbedingungen erfüllt:

$$v_y=0\quad\text{für}\quad x=+d\quad\text{und}\quad x=-d,$$

$$\tau=\tau_1+By\quad\text{für}\quad x=+d,$$

$$\tau=\tau_2+By\quad\text{für}\quad x=-d.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\mathfrak{Sin}\,\varepsilon d\cos\varepsilon d=P\qquad\mathfrak{Cof}\,\varepsilon d\sin\varepsilon d=Q,$$

so erhält man bei Berücksichtigung der Randbedingungen folgende Lösung[1]):

$$v_x\equiv 0,$$

$$v_y=\frac{\gamma\cdot(\tau_1-\tau_2)}{4\varepsilon^2\cdot\lambda(P^2+Q^2)}\cdot\{Q\cdot\mathfrak{Sin}\,\varepsilon x\cos\varepsilon x-P\cdot\mathfrak{Cof}\,\varepsilon x\sin\varepsilon x\},$$

$$\tau=\frac{\tau_1+\tau_2}{2}+By+\frac{\tau_1-\tau_2}{2(P^2+Q^2)}\cdot\{P\cdot\mathfrak{Sin}\,\varepsilon x\cos\varepsilon x+Q\cdot\mathfrak{Cof}\,\varepsilon x\sin\varepsilon x\};$$

---

[1]) Bei der Berechnung dieser Lösung ergibt sich für den allgemeinen Fall, daß $\sin\varepsilon d$ und $\cos\varepsilon d \mp 0$ sind, unmittelbar $b=0$. Für $\cos\varepsilon d=0$ wird ebenfalls $b=0$; für den Fall, daß $\sin\varepsilon d$ verschwindet, wird b aus naheliegenden Analogie- und Symmetriegründen gleich Null gesetzt.

der hydrostatische Druck wird

$$p = p_0 - g\varrho_0 \cdot y + \frac{\gamma \cdot B}{2} y^2 .$$

Es ist dies ein in mancher Hinsicht eigenartiges Resultat, insofern für hinreichend großes d die Geschwindigkeit v_y neben $x = 0$ und $x = +d$ auch innerhalb des Bereiches $0 \leqq x \leqq d$ Nullstellen besitzt, die i. A. mit Vorzeichenwechsel des v_y verbunden sind. v_y verschwindet nämlich für alle x_n, die der Relation

$$\frac{\mathfrak{Tg}\, \varepsilon x_n}{\operatorname{tg} \varepsilon x_n} = \frac{\mathfrak{Tg}\, \varepsilon d}{\operatorname{tg} \varepsilon d} = \frac{P}{Q}$$

genügen.

Wir betrachten also die Funktion $\frac{\mathfrak{Tg}\, \varepsilon x}{\operatorname{tg} \varepsilon x}$. Da $\mathfrak{Tg}\, \varepsilon x$ eine stetige Funktion ist, deren Wert für $x > 0$[1]) stets zwischen 0 und 1 liegt und $\frac{1}{\operatorname{tg} \varepsilon x} = \operatorname{ctg} \varepsilon x$ in jedem Bereich $k\pi < \varepsilon x < (k+1)\pi$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ stetig ist und alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, nimmt der Quotient $\frac{\mathfrak{Tg}\, \varepsilon x}{\operatorname{tg} \varepsilon x}$ sicher in allen Bereichen $k\pi < \varepsilon x < (k+1)\pi$, in denen $\mathfrak{Tg}\, \varepsilon x > 0$ ist, alle Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ an, mithin in allen mit Ausnahme des Intervalls $0 < \varepsilon x < \pi$, da $\mathfrak{Tg}\, \varepsilon x$ für $x = 0$ verschwindet und $\frac{\mathfrak{Tg}\, \varepsilon x}{\operatorname{tg} \varepsilon x}$ für $x = 0$ den Wert 1 hat.

Nun verschwindet der Differentialquotient

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\mathfrak{Tg}\, \varepsilon x}{\operatorname{tg} \varepsilon x}\right) = -\varepsilon \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\, \varepsilon x\, \mathfrak{Cof}\, \varepsilon x - \sin \varepsilon x \cos \varepsilon x}{\mathfrak{Cof}^2\, \varepsilon x \sin^2 \varepsilon x}$$

für $x = 0$, wird für $x = k\pi\,(k = 1, 2, 3 \ldots)$ negativ unendlich groß, und wegen

$$|\mathfrak{Sin}\, \varepsilon x| > |\sin \varepsilon x|, \; |\mathfrak{Cof}\, \varepsilon x| > |\cos \varepsilon x| \quad \text{für } x > 0 \text{ und}$$
$$\mathfrak{Sin}\, \varepsilon x > 0, \; \mathfrak{Cof}\, \varepsilon x > 0 \quad \text{für } x > 0$$

ist er durchweg für $x > 0$ negativ. Mithin ist $\frac{\mathfrak{Tg}\, \varepsilon x}{\operatorname{tg} \varepsilon x}$ eine in jedem Bereich $k\pi < \varepsilon x < (k+1)\pi$ monoton fallende Funktion, die in dem Intervall $0 \leqq \varepsilon x \leqq \pi$ von $+1$ bis $-\infty$, in jedem anderen Intervall $k\pi \leqq \varepsilon x \leqq (k+1)\pi$ von $+\infty$ bis $-\infty$ läuft und, abgesehen von dem Bereich $0 \leqq \varepsilon x \leqq \pi$, in jedem

---

[1] Da die in v_y auftretenden Funktionen von x ungerade sind, genügt die Betrachtung für $x > 0$; Analoges gilt dann für $x < 0$.

Intervall jeden Wert zwischen $+\infty$ und $-\infty$ einmal und nur einmal annimmt, in dem Bereich $0 \leqq s x \leqq \pi$ alle Werte von $+1$ bis $-\infty$ einmal und nur einmal.

Für hinreichend große d ist also die Bedingung

$$\frac{\mathfrak{Tg}\, s x_n}{\operatorname{tg} s x_n} = \frac{\mathfrak{Tg}\, s d}{\operatorname{tg} s x} \text{ für } 0 < x_n < d$$

mindestens einmal erfüllt, und v_y hat in dem Bereich $0 < x < d$ mindestens eine Nullstelle und Vorzeichenwechsel. Für diese d erhält man eine Strömung, die zwar stationär ist, indessen im Experiment kaum realisierbar sein und zu Wirbeln und instationären Verhältnissen führen dürfte.

Die obere Grenze $D > 0$ des Bereiches für d, innerhalb dessen $\frac{\mathfrak{Tg}\, s x}{\operatorname{tg} s x}$ nie $\frac{\mathfrak{Tg}\, s d}{\operatorname{tg} s d}$ gleich wird, ist dadurch gegeben, daß $0 < s D < \frac{3}{2}\pi$ und $\mathfrak{Tg}\, s \cdot D = \operatorname{tg} s D$ ist, d. h. $s \cdot D$ ist die obere Grenze des ersten Intervalls, in dem $\frac{\mathfrak{Tg}\, s x}{\operatorname{tg} s x}$ alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ gerade einmal annimmt.

Es sei $\mathfrak{Tg}\, \omega = \operatorname{tg} \omega$, wobei $\pi < \omega < \frac{3}{2}\pi$ ist; dann ist

$$D = \frac{\omega}{s} = \omega \cdot \sqrt[4]{\frac{4 \mu \lambda}{\gamma \cdot B}} \, .$$

Hierin ist ω eine feste, rein mathematische Größe von dem Zahlenwert 3,9266 $(= \frac{5}{4}\pi - 0{,}0004)$. Z. B. wird bei Zimmertemperatur $\tau_0 = 15 - 20^0$ für Wasser

$$D_w = \frac{0{,}52165}{\sqrt[4]{B}} \text{ cm} ,$$

für Olivenöl

$$D_0 = \frac{1{,}0272}{\sqrt[4]{B}} \text{ cm} ,$$

für Luft

$$D_L = \frac{1{,}6339}{\sqrt[4]{B}} \text{ cm} .$$

Je größer B ist, desto kleiner hat man offenbar d zu nehmen, um keine Turbulenz zu erhalten.

Diese Strömungsfälle, die keinen physikalischen Widerspruch in sich tragen, sollen hier nicht weiter verfolgt werden, wir begnügen uns mit dem Resultat, daß es bei jeder Substanz und gegebenen Temperaturvorschrift B für den Ebenenabstand $2d$ einen Bereich $0 < 2d < 2D$ gibt, innerhalb dessen die Entstehung einer stationären Strömung physikalisch möglich ist.

Es sei ferner noch bemerkt, daß für

$$\tau_1 = \tau_2$$

v_y verschwindet; dies entspricht der Tatsache, daß eine horizontale Schichtung einer mit y linear zunehmenden Temperatur zu keiner Strömung führt und im Fall der bei linearer Abnahme der Temperatur vorliegenden Labilität eine eindeutige stationäre Strömung nicht zu erwarten ist.

3. Diese letzte Bemerkung greift bereits dem noch nicht behandelten Fall vor, daß B negativ ist. Setzt man $B = -B'$, $\nu = -\nu'$, wobei B' und ν' positive Größen sind, so erhält man die Rekursionen[1]):

$$B_{m+4,0} = \nu' \cdot \frac{B_{m,0}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)},$$

$$C_{m+4,0} = \nu' \cdot \frac{C_{m,0}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)},$$

und in den Potenzreihen tritt an die Stelle von $(-\nu)^n$ die Potenz ν'^n. Die Zusammenfassung führt auf

$$\sum_{n=0}^{\infty} \nu'^n \cdot \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} = \frac{1}{2\delta^3}(\mathfrak{Sin}\,\delta x - \sin \delta x), \quad \delta = \sqrt[4]{\nu'}$$

und auf die durch Differentiation erhältlichen Funktionen.

Die Rechnung verläuft im übrigen ganz analog der Strömungsberechnung für $B > 0$; sie soll hier, zumal diese Fälle $B < 0$ von geringerem Interesse als die von positivem B sein dürften, nicht durchgeführt werden. v_y verschwindet auch hier identisch für $\tau_1 = \tau_2$ und die Temperatur weist eine horizontale Schichtung $\tau = \tau_0 - B'y$ auf; wir erhalten einen labilen Ruhezustand, sodaß wir das Zustandekommen einer eindeutigen stationären Strömung nicht zu erwarten haben.

b) Im Anschluß hieran soll eine weitere abbrechende Lösung der Differentialgleichungen kurz angegeben werden, die zwar die Grundgleichungen nebst geeigneten Randbedingungen erfüllt, aber keine physikalisch realen Verhältnisse darstellt.

Es sei $v_y \equiv 0$, also alle $B_{m,n} = 0$. Durch ähnliche Betrachtungen wie auf S. 705 gelangt man zu den Gleichungen:

---

[1]) Vgl. S. 707.

Rekursion II in der Form

$$C_{1,n} = \frac{\lambda}{g}(n+1)(n+2)(n+3)\,A_{0,n+3} \quad \text{für } n = 0,1;$$

Rekursion III in der Form

$$\mu C_{0,n+2}(n+1)(n+2) = A_{0,n} \cdot C_{1,0} + A_{0,n-1} \cdot C_{1,1} \quad \text{für } n = 1,2,3,4,5.$$

Die Ausgangsgrößen sind $A_{0,1} = a$; $A_{0,2} = b$; $C_{0,1} = B$; $C_{1,0} = A$; $C_{1,1} = C$, und nach einfacher Rechnung erhält man die Lösung:

$$v_x = ay + b \cdot y^2 + \frac{\gamma A}{6\lambda} \cdot y^3 + \frac{\gamma C}{24\lambda} y^4;$$

$$v_y \equiv 0;$$

$$\tau = \tau_0 + Ax + By + Cxy + \frac{aA}{6\mu} y^3 + \frac{bA + aC}{12\mu} y^4 + \frac{1}{20\mu} \cdot \left(\frac{\gamma A^2}{6\lambda} + bC\right) y^5 + \frac{\gamma AC}{144\mu\lambda} y^6 + \frac{\gamma C^2}{1008\mu\lambda} \cdot y^7.$$

Es ist dies natürlich ein experimentell-physikalisch sinnloses Resultat. Anschaulich kann man diese Strömungsbilder dadurch deuten, daß bei $x = \pm\infty$ Temperaturen herrschen, die daselbst Kräfte nach oben bzw. unten bewirken, denen durch die berechnete Flüssigkeitsbewegung in stationärer Weise Rechnung getragen wird.

4. Allgemeine Fälle.

(Nicht triviale Erfüllung der Divergenzbedingung.)

Vorbemerkungen.

Wir gehen nun zu allgemeineren Fällen über. Schon oben wurde darauf hingewiesen, daß das rekursive Rechnen diagonalweise vor sich geht. Bei der Berechnung einer Koeffizientendiagonale aus der bzw. den vorangehenden Diagonalen treten je nach der Art des speziellen Problems mehr oder weniger Freiheitsgrade für die neu zu bestimmenden Koeffizienten auf; umfaßt z. B. des Gleichungsystem II m Gleichungen, so ist die Anzahl der gesuchten nächsthöheren $B_{m,n}$ bzw. $A_{0,n}$ im allgemeinen Fall $(m+4)$; hat man ein Gleichungssystem III von m Gleichungen, so vermitteln diese $(m+2)$ nächsthöhere $C_{m,n}$; man erhält also im ganzen bei jeder neuen Koeffizientendiagonale 6 noch freie Größen, die man zur Erfüllung der Randbedingungen zu verwenden hat. Wählt man ihren Wert willkürlich, so erhält man das Bild von Strömungen, die stationär möglich sind, die indessen kein physikalisches Interesse haben, da alle physikalisch realen Fälle Randbedingungen für v_x, v_y und τ an denselben Flächen mit sich bringen, deren Befriedigung nur durch systematische Verfügung über die freien Koeffizienten zu erreichen ist.

Sind die Gleichungen $y = f(x)$ der die Strömungen begrenzenden Flächen und die an ihnen gegebenen Temperaturvorschriften ungerade Funktionen dergestalt, daß sie für $(-x, -y)$ entgegengesetzt gleiche Werte zu denen von $(+x, +y)$ annehmen, so wird gemäß der physikalischen Konstellation der Strömungsverlauf sowie die Temperaturverteilung derart sein, daß v_x, v_y und $(\tau - \tau_0)$ in gegenüberliegenden Koordinatenquadranten entgegengesetzte Werte haben; mithin weisen dann die Doppelsummen für v_x, v_y und $(\tau - \tau_0)$ nur Glieder $x^m \cdot y^n$ auf, für die $m + n$ eine ungerade Zahl ist. Wir werden uns im folgenden mit Fällen dieser Symmetrie befassen, doch bevor wir an die Berechnung von Strömungen gehen, soll an dieser Stelle eine physikalisch wesentliche Einteilung der Grenzflächen in strömungsaktive und strömungspassive vorgenommen werden.

Strömungsaktiv heiße eine Fläche, an der die Temperatur vorgeschrieben ist; die Fläche vermittelt der Strömung Wärme oder nimmt von ihr Wärme entgegen. Der Temperaturabfall bzw. -anstieg in normaler Richtung verschwindet an ihr nicht identisch; die Fläche ist wärmedurchlässig.

Strömungspassiv heiße eine Fläche, an der das identische Verschwinden der Normalkomponente des Temperaturgradienten gefordert ist. Weder gibt die Fläche der Strömung Wärme, noch nimmt sie Wärme von ihr, die Temperatur stellt sich an ihr ein und ist nicht vorzuschreiben; diese Fläche ist wärmeundurchlässig.

Wir werden Fälle mit nur aktiven und Fälle mit aktiven und passiven Flächen behandeln; es ist evident, daß Strömungen von nur passiver Begrenzung unmöglich sind.

a) Strömungen mit nur strömungsaktiven Wandungen.

1. Als erster Fall von nur strömungsaktiver Begrenzung soll die Strömung berechnet werden, die entsteht, wenn man von zwei senkrecht aufeinander stehenden Ebenen, von denen

die eine horizontal, die andere vertikal verläuft, die vertikale auf konstanter Temperatur hält, während man auf der anderen für linearen Anstieg oder Abfall der Temperatur sorgt.

Hier ist also:

$$v_x\big|_{y=0} = 0, \quad v_y\big|_{y=0} = 0, \quad v_x\big|_{x=0} = 0, \quad v_y\big|_{x=0} = 0;$$
$$\tau\big|_{x=0} = \tau_0, \qquad \tau\big|_{y=0} = \tau_0 + A\,x.$$

Die Konstellation für $\mathfrak{v}$ und τ auf den Grenzebenen ergibt für die Strömung die angegebene Symmetrie zweimaliger Spiegelung an den Koordinatenachsen; wir haben also nur die Koeffizientèndiagonalen zu berücksichtigen, für die $m + n$ eine ungerade Zahl ist. Die Randbedingungen für v_x, v_y und τ fordern:

$$B_{m,0} = 0, \quad B_{0,n} = 0; \quad B_{m,1} = 0, \quad A_{0,n} = 0;$$
$$C_{0,n} = 0, \quad C_{m,0} = 0 \text{ für } m > 1, \quad C_{1,0} = A.$$

Man sieht, daß hierdurch beim Fortschreiten um eine Diagonale die sechs Freiheitsgrade der $A_{m,n}$, $B_{m,n}$ und $C_{m,n}$ restlos ausgenutzt werden. Wir berechnen sukzessive unter Berücksichtigung dieser Bedingungen die Koeffizienten der Glieder des 1., 3., 5., 7. und 9. Grades und erhalten, wenn wir $\varkappa = \frac{\gamma A}{\mu \lambda}$ setzen,

$$v_x = \mu \left\{ + \frac{\varkappa}{4} x^2 \cdot y + \frac{\varkappa^2}{720} x^5 \cdot y^2 - \frac{\varkappa^2}{864} x^3 \cdot y^4 + \ldots \right\},$$

$$v_y = \mu \left\{ - \frac{\varkappa}{4} x y^2 - \frac{\varkappa^2}{432} x^4 \cdot y^3 + \frac{\varkappa^2}{1440} x^2 \cdot y^5 + \ldots \right\},$$

$$\tau = \tau_0 + A \left\{ x + \frac{\varkappa}{48} x^4 \cdot y + \frac{49 \varkappa^2}{34560} x^5 \cdot y^4 \right.$$
$$\left. - \frac{17 \varkappa^2}{17280} x^3 \cdot y^6 + \frac{17 \varkappa^2}{161280} x y^8 + \ldots \right\}$$

und nach dem auf S. 704 angegebenen Verfahren

$$p = p_0 - g \varrho_0 y + \mu \lambda \left\{ \frac{\varkappa}{2} x \cdot y - \frac{\varkappa^2}{288} x^2 \cdot y^4 + \frac{\varkappa^2}{288} x^4 \cdot y^2 \right.$$
$$\left. + \frac{\varkappa^2}{2160} x^6 + \frac{\varkappa^2}{4320} \cdot y^6 + \ldots \right\};$$

hierbei treten in v_x, v_y keine Glieder 9. Grades, in p keine 8. Grades auf.

Es ergibt sich für die Umgebung des 0-Punktes das folgende, die Verhältnisse lediglich qualitativ und im Interesse der Deutlichkeit übertreibend darstellende Bild:

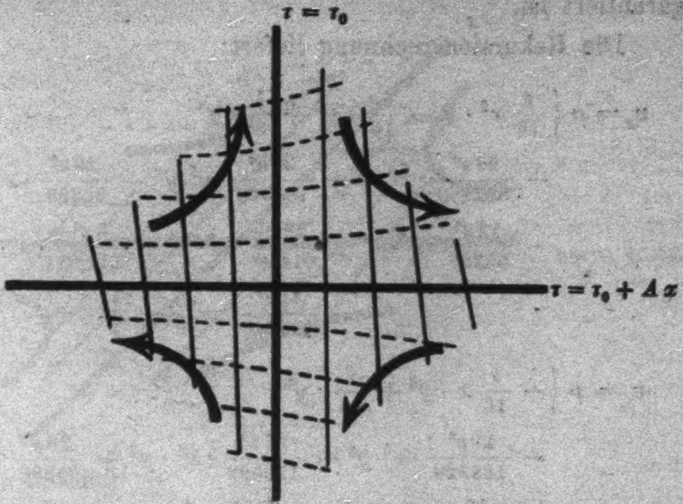


Fig. 1.

Hierin geben die Pfeile die Strömungsrichtung an, die ausgezogenen Linien sind die konstanter Temperatur, die punktierten die konstanten Druckes, wobei die Temperatur in Richtung der positiven x-Achse, der Druck in Richtung der negativen y-Achse steigt.

2. Als zweiten Fall mit nur aktiven Wänden behandeln wir die Strömung zwischen den Ebenen $y = 0$ und $y = x$, wenn auf der ersteren eine linear ansteigende oder abfallende und auf der letzteren konstante Temperatur vorgeschrieben ist.

Die Doppelsummen (A), (B) und (C) haben neben den Rekursionsgleichungen folgende Bedingungen zu erfüllen:

für die Ebene $y = 0$:

$$B_{m,1} = 0, \quad B_{m,0} = 0 \quad \text{für alle } m \geqq 0,$$
$$C_{m,0} = 0 \text{ für } m > 1, \quad C_{1,0} = A;$$

für die Ebene $y = x$:

$$\sum_{m+n=2k+1} A_{m,n} = 0, \quad \sum_{m+n=2k+1} B_{m,n} = 0, \quad \sum_{m+n=2k+1} C_{m,n} = 0,$$
$$\text{für alle } k \geqq 0,$$

denn für $y = x$ gehen die Doppelsummen in Potenzreihen in x oder y allein über, deren identisches Verschwinden durch das Verschwinden aller Koeffizienten von x^{2k+1} oder y^{2k+1} garantiert ist.

Die Rekursionsrechnung liefert:

$$\begin{aligned} v_x = \mu \Big\{ & \frac{\varkappa}{16} x^2 \cdot y - \frac{3\varkappa}{16} x y^2 + \frac{1}{8} \varkappa y^3 \\ & + \frac{29\varkappa^2}{552960} \cdot x^6 \cdot y + \frac{37\varkappa^2}{184320} \cdot x^5 \cdot y^2 - \frac{29\varkappa^2}{55296} \cdot x^4 \cdot y^3 \\ & - \frac{13\varkappa^2}{55296} \cdot x^3 \cdot y^4 + \frac{29\varkappa^2}{61440} \cdot x^2 \cdot y^5 + \frac{7\varkappa^2}{61440} \cdot x \cdot y^6 \\ & - \frac{11\varkappa^2}{138240} \cdot y^7 + \ldots \Big\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_y = \mu \Big\{ & - \frac{\varkappa}{16} x \cdot y^2 + \frac{\varkappa}{16} \cdot y^3 \\ & - \frac{29\varkappa^2}{184320} \cdot x^5 \cdot y^2 - \frac{37\varkappa^2}{110592} \cdot x^4 \cdot y^3 + \frac{29\varkappa^2}{55296} \cdot x^3 \cdot y^4 \\ & + \frac{13}{92160} \varkappa^2 x^2 \cdot y^5 - \frac{29\varkappa^2}{184320} \cdot x \cdot y^6 - \frac{\varkappa^2}{61440} \cdot y^7 + \ldots \Big\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau = \tau_0 + A \Big\{ & x - y + \frac{\varkappa}{384} x^4 \cdot y + \frac{\varkappa}{192} x^2 \cdot y^3 \\ & - \frac{\varkappa}{96} x \cdot y^4 + \frac{\varkappa}{384} y^5 + \ldots \Big\}; \end{aligned}$$

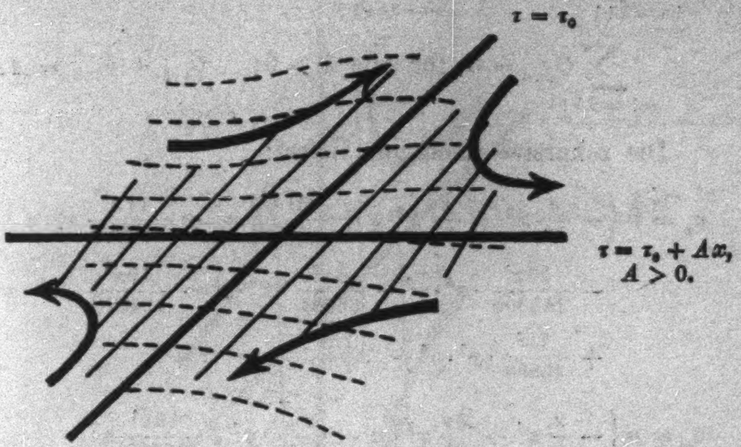
der hydrostatische Druck wird

$$\begin{aligned} p = p_0 - g \varrho_0 y + \mu \lambda \Big\{ & - \frac{3\varkappa}{16} x^2 + \frac{7\varkappa}{8} x \cdot y - \frac{5\varkappa}{16} y^2 + \frac{37\varkappa^2}{552960} \cdot x^6 \\ & - \frac{29\varkappa^2}{92160} \cdot x^5 \cdot y + \frac{11\varkappa^2}{36864} \cdot x^4 \cdot y^2 \\ & - \frac{29\varkappa^2}{27648} x^3 \cdot y^3 + \frac{37\varkappa^2}{36864} \cdot x^2 \cdot y^4 \\ & - \frac{221\varkappa^2}{92160} \cdot x \cdot y^5 + \frac{203\varkappa^2}{552960} \cdot y^6 + \ldots \Big\}. \end{aligned}$$

In v_x und v_y treten keine Glieder 9. Grades, in τ keine 7. Grades und in p keine 8. Grades auf. Die Koeffizienten des 9. Grades in τ sind ihrem absoluten Betrage nach

$$< \frac{\varkappa^2 \cdot |A|}{11000}.$$

Für die Umgebung des 0-Punktes erhält man das folgende, lediglich den Charakter des Strömungsverlaufs wiedergebende Bild:



Hierin bedeutet:

——→ = Strömungsrichtung,
—— = τ = const.,
- - - - = p = const.;

τ steigt in Richtung der positiven x-Achse,
p in Richtung der negativen y-Achse.

Fig. 2.

3. Ein drittes Beispiel von nur strömungsaktiven Wänden sei die Strömung, die zwischen den Ebenen $x = 0$ und $y = x$ entsteht, wenn die Temperatur auf der ersteren konstant gehalten wird und auf der letzteren linear ansteigt bzw. abfällt.

Die Randbedingungen sind hier:

$$v_x|_{x=0} = 0, \qquad v_y|_{x=0} = 0, \qquad \tau|_{x=0} = \tau_0;$$
$$v_x|_{y=x} = 0, \qquad v_y|_{y=x} = 0, \qquad \tau|_{y=x} = \tau_0 + Ax;$$

sie kommen durch folgende Koeffizientenbedingungen zum Ausdruck:

für die Ebene $x = 0$:

$$A_{0,n} = 0, \qquad B_{0,n} = 0, \qquad C_{0,n} = 0,$$

für die Ebene $y = x$:

$$\sum_{m+n=2k+1} A_{m,n} = 0, \qquad \sum_{m+n=2k+1} B_{m,n} = 0, \qquad \text{für alle } k \geqq 0,$$

$$\sum_{m+n=2k+1} C_{m,n} = 0 \text{ für alle } k > 0; \qquad C_{0,1} + C_{1,0} = A.$$

Die rekursive Rechnung liefert:

$$v_x = \mu \Big\{ -\frac{\varkappa}{16} x^3 + \frac{\varkappa}{16} x^2 \cdot y + \frac{31\varkappa^2}{921600} x^7 - \frac{11\varkappa^2}{122880} x^6 \cdot y - \frac{19\varkappa^2}{153600} \cdot x^5 \cdot y^2 - \frac{5\varkappa^2}{36864} \cdot x^4 \cdot y^3 - \frac{19\varkappa^2}{184320} \cdot x^3 \cdot y^4 + \frac{7\varkappa^2}{40960} \cdot x^2 \cdot y^5 + \ldots \Big\},$$

$$v_y = \mu \Big\{ -\frac{\varkappa}{8} x^3 + \frac{3\varkappa}{16} x^2 \cdot y - \frac{\varkappa}{16} x \cdot y^2 + \frac{19\varkappa^2}{30720} x^7 - \frac{217\varkappa^2}{921600} \cdot x^6 \cdot y + \frac{33\varkappa^2}{122880} \cdot x^5 \cdot y^2 + \frac{19\varkappa^2}{92160} \cdot x^4 \cdot y^3 + \frac{5\varkappa^2}{36864} \cdot x^3 \cdot y^4 + \frac{19\varkappa^2}{307200} \cdot x^2 \cdot y^5 - \frac{7\varkappa^2}{122880} \cdot x \cdot y^6 + \ldots \Big\},$$

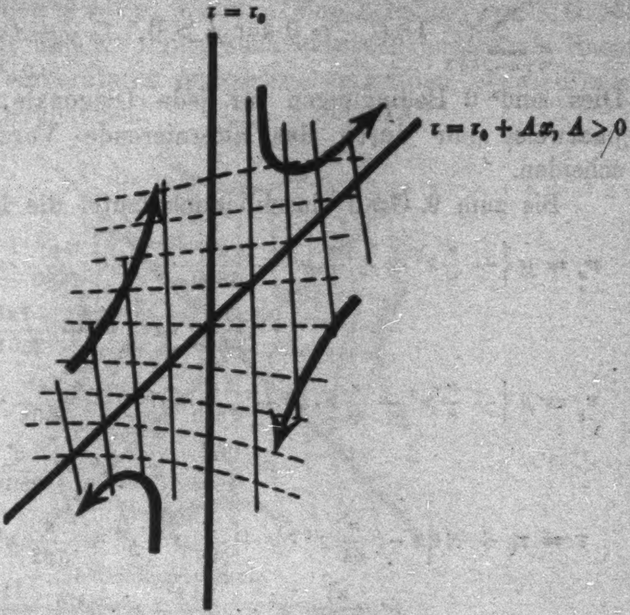
$$\tau = \tau_0 + A \Big\{ x - \frac{\varkappa}{384} x^5 + \frac{\varkappa}{192} x^4 \cdot y - \frac{\varkappa}{192} x^3 \cdot y^2 + \frac{\varkappa}{384} \cdot x \cdot y^4 + \ldots \Big\},$$

$$p = p_0 - g \varrho_0 y + \lambda \mu \Big\{ -\frac{3\varkappa}{16} x^2 + \frac{\varkappa}{8} x \cdot y + \frac{3\varkappa}{16} y^2 + \frac{179\varkappa^2}{921600} x^6 - \frac{43\varkappa^2}{61440} \cdot x^5 \cdot y - \frac{19\varkappa^2}{20480} \cdot x^4 \cdot y^2 + \frac{11\varkappa^2}{18432} \cdot x^3 \cdot y^3 - \frac{19\varkappa^2}{61440} x^2 \cdot y^4 + \frac{7\varkappa^2}{20480} x \cdot y^5 + \frac{19\varkappa^2}{921600} y^6 + \ldots \Big\}.$$

In dieser Lösung treten in τ keine Glieder des 7. Grades, in v_x und v_y keine 9. und in p keine Glieder 8. Grades auf.

Nennt man den linearen Temperaturanstieg bzw. Abfall auf der Ebene $y = x$ pro Längeneinheit ω, so ist die Größe $A = \omega \sqrt{2}$ zu setzen.

Das den Charakter der Strömung von positivem Δ für die unmittelbare Umgebung des 0-Punktes veranschaulichende Bild ist das folgende:



Es bedeuten wiederum:

⟶ die Strömungsrichtung,
—— die Kurven konstanter Temperatur,
- - - - die Kurven konstanten Druckes,

τ steigt in Richtung des positiven x, p in Richtung des negativen y.

Fig. 3.

4. Als letzte dieser spiegelsymmetrischen Strömungen mit ausschließlich aktiven Wandungen werde der Fall behandelt, daß die Geschwindigkeit an den Ebenen $y = x$ und $y = -x$ verschwindet und die Temperatur an ihnen beiden denselben linearen Verlauf $\tau|_{x=\pm y} = \tau_0 + \Delta x$ hat.

Es gelten folgende Koeffizientenbedingungen:

für die Ebene $x = y$:

$$\sum_{m+n=2k+1} A_{m,n} = 0, \qquad \sum_{m+n=2k+1} B_{m,n} = 0, \qquad \text{für } k \geqq 0,$$

$$\sum_{m+n=2k+1} C_{m,n} = 0 \text{ für } k > 0, \quad C_{1,0} + C_{0,1} = \Delta;$$

für die Ebene $x = -y$:

$$\sum_{m+n=2k+1} (-1)^m \Delta_{m,n} = 0, \quad \sum_{m+n=2k+1} (-1)^m \cdot B_{m,n} = 0, \quad \text{für } k \geqq 0,$$

$$\sum_{m+n=2k+1} (-1)^m C_{m,n} = 0 \text{ für } k > 0, \quad C_{1,0} - C_{0,1} = \Delta.$$

Dies sind 6 Bedingungen für jede Diagonale, welche sich paarweise nur durch das alternierende Vorzeichen unterscheiden.

Bis zum 9. Grad einschließlich lautet die Lösung:

$$v_x = \mu \left\{ -\frac{\varkappa}{8} x^2 \cdot y + \frac{\varkappa}{8} y^3 - \frac{\varkappa^2}{7680} \cdot x^7 + \frac{7\varkappa^2}{7680} \cdot x^5 \cdot y^2 \right.$$
$$\left. - \frac{5\varkappa^2}{4608} \cdot x^3 \cdot y^4 + \frac{7\varkappa^2}{23040} \cdot x \cdot y^6 + \ldots \right\},$$

$$v_y = \mu \left\{ -\frac{\varkappa}{8} x^3 + \frac{\varkappa}{8} x \cdot y^2 + \frac{7\varkappa^2}{7680} \cdot x^6 \cdot y - \frac{7\varkappa^2}{4608} \cdot x^4 \cdot y^3 \right.$$
$$\left. + \frac{3\varkappa^2}{4608} \cdot x^2 \cdot y^5 - \frac{\varkappa^2}{23040} \cdot y^7 + \ldots \right\},$$

$$\tau = \tau_0 + \Delta \left\{ x - \frac{\varkappa}{64} x^4 \cdot y + \frac{\varkappa}{96} x^2 \cdot y^3 + \frac{\varkappa}{192} y^5 \right.$$
$$+ \frac{\varkappa^2}{32256} x^9 - \frac{11\varkappa^2}{53760} x^7 \cdot y^2 + \frac{11\varkappa^2}{11520} \cdot x^5 \cdot y^4$$
$$\left. - \frac{23\varkappa^2}{23040} \cdot x^3 \cdot y^6 + \frac{\varkappa^2}{4608} \cdot x \cdot y^8 + \ldots \right\},$$

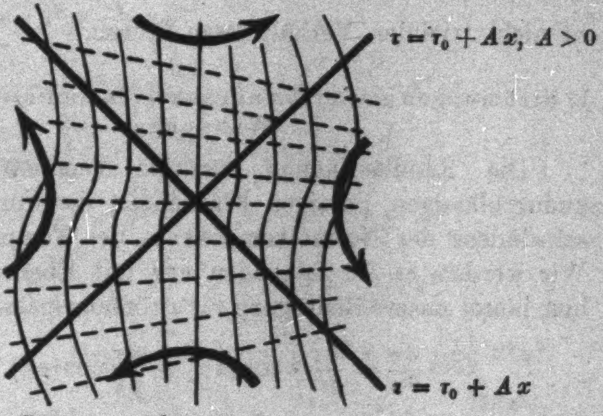
$$p = p_0 - g \varrho_0 y + \mu \lambda \left\{ -\frac{\varkappa}{2} x \cdot y - \frac{7\varkappa^2}{11520} x^6 + \frac{\varkappa^2}{768} \cdot x^4 \cdot y^2 \right.$$
$$\left. + \frac{\varkappa^2}{768} x^2 \cdot y^4 + \frac{\varkappa^2}{1280} \cdot y^6 + \ldots \right\}.$$

Ist der lineare Temperaturanstieg bzw. -abfall pro Längeneinheit auf der Ebene $x = y$ gegeben durch ω, so ist wiederum $\Delta = \omega\sqrt{2}$ zu setzen.

Den Charakter dieser Lösung für die Umgebung des 0-Punktes gibt Fig. 4, S. 721.

Hiermit soll die Berechnung spiegelsymmetrischer Strömungsfälle mit nur aktiven Wänden abgeschlossen, nur einige Bemerkungen sollen noch angefügt werden.

Die hier berechneten Fälle gestatteten die Durchführung der rekursiven Bestimmung der Koeffizienten unter gleichzeitiger Berücksichtigung und diagonalweiser Einrechnung der Randbedingungen. Diese Fälle sind noch einiger Erweiterungen fähig, insofern, als an dem Verfahren generell nichts geändert wird, wenn statt der Ebenen $x = \pm y$, $x = 0$ oder $y = 0$ Begrenzungsflächen $y = cx$, worin c eine beliebige reelle Größe ist, angewandt und an ihnen auch eventuell andere als linear verlaufende Temperaturen vorgeschrieben werden, etwa e-Funktionen oder dergleichen.



·——➤ Strömungsrichtung,
——— Kurven konstanter Temperatur,
- - - - - Kurven konstanten Druckes.
τ steigt mit positivem x, p mit negativem y.
Fig. 4.

Eine weitere Bemerkung betrifft die spiegelsymmetrischen Fälle, bei denen an irgendwelchen Ebenen $y = cx$ lineares Verhalten der Temperatur vorgeschrieben ist. Führt hier die Berechnung der Glieder ersten Grades der Doppelsummen zu

$$C_{1,0} = 0,\ C_{0,1} \neq 0,\ A_{1,0} = A_{0,1} = B_{1,0} = B_{0,1} = 0,$$

so kommt man i. A. zu der trivialen Lösung

$$v_x \equiv 0,\ v_y \equiv 0,\ \tau = \tau_0 + C_{0,1}\,y,$$

da in Rekursion II niemals ein $C_{0,n}$ Ausgangskoeffizient für höhere $B_{m,n}$ und $A_{0,n}$ ist und alle Rekursionsgleichungen und Randbedingungen homogene Gleichungen für die zu bestimmenden Koeffizienten liefern. Diese Triviallösungen stellen eine stabile oder labile Temperaturschichtung dar, bei der die Temperatur für $y = \text{const.}$ einen festen Wert hat. So führen beispielsweise die Randbedingungen

$$\tau|_{x=0} = \tau_0 + Ay,\ \tau|_{y=0} = \tau_0,\ \mathfrak{v}|_{x=0} = \mathfrak{v}|_{y=0} = 0 \text{ oder}$$
$$\tau|_{x=y} = \tau_0 + Ay,\ \tau|_{y=0} = \tau_0,\ \mathfrak{v}|_{x=y} = \mathfrak{v}|_{y=0} = 0$$

zu trivialen Lösungen, während z. B. die Fälle

$$\tau|_{x=0} = \tau_0 + Ay,\ \tau|_{x=y} = \tau_0,\ \mathfrak{v}|_{x=0} = \mathfrak{v}|_{x=y} = 0,$$
$$\tau|_{x=0} = \tau_0 + Ay,\ \tau|_{y=0} = \tau_0 + Bx,\ \mathfrak{v}|_{x=0} = \mathfrak{v}|_{y=0} = 0 \text{ und}$$
$$\tau|_{x=y} = \tau_0,\ \tau|_{x=-y} = \tau_0 + Ax,\ \mathfrak{v}|_{x=y} = \mathfrak{v}|_{x=-y} \text{ und ähnliche}$$

zu nicht trivialen Verhältnissen führen.

b) Strömungen mit strömungsaktiven und strömungspassiven Wandungen.

Die Randbedingung für die Temperatur an wärmeundurchlässigen, passiven Flächen ist die Forderung des Verschwindens der Normalkomponente des Temperaturgradienten. Wir werden es im folgenden nur mit Ebenen zu tun haben; hier lautet unsere Bedingung für strömungspassive, ebene Wände

$$\frac{\partial \tau}{\partial n} = \frac{\partial \tau}{\partial x} \cdot \cos(n\,x) + \frac{\partial \tau}{\partial y} \cos(n\,y) = 0.$$

Man erkennt leicht, daß die Erfüllung der Randbedingungen für Ebenen von der Gleichung $y = c\,x$ wiederum bei jeder Diagonale geschehen kann.

1. Als erstes Beispiel einer spiegelsymmetrischen Strömung mit einer passiven Wand behandeln wir den Fall, daß die Geschwindigkeit an den Ebenen $y = 0$ und $y = x$ verschwindet. $y = 0$ sei eine passive, $x = y$ eine aktive Wand mit dem vorgeschriebenen Temperaturverlauf $\tau|_{x=y} = \tau_0 + Ax$.

Die Randbedingungen fordern von den Koeffizienten für die Ebene $y = 0$:

$$\left.\begin{aligned} B_{m,0} = 0,\quad A_{m,0} = 0, \text{ also } B_{m,1} = 0,\\ C_{m,1} = 0 \left(\text{wegen } \left.\frac{\partial \tau}{\partial y}\right|_{y=0} = 0\right), \end{aligned}\right\} \text{ für alle } m \geqq 0,$$

für die Ebene $y = x$:

$$\sum_{m+n=2k+1} B_{m,n} = 0,\quad \sum_{m+n=2k+1} A_{m,n} = 0,\quad \text{für alle } k \geqq 0,$$

$$\sum_{m+n=2k+1} C_{m,n} = 0 \text{ für } k > 0,\quad C_{1,0} = A.$$

Die Rekursionsrechnung liefert:

$$
\begin{aligned}
v_x = \mu \Big\{ & \frac{1}{16}\varkappa x^2 y - \frac{3}{16}\varkappa x y^2 + \frac{1}{8}\varkappa y^3 \\
& + \frac{\varkappa^2}{368640} x^6 y + \frac{27\varkappa^2}{368640} x^5 y^2 - \frac{\varkappa^2}{36864} x^4 y^3 - \frac{9\varkappa^2}{36864} x^3 y^4 \\
& + \frac{9\varkappa^2}{368640} x^2 y^5 + \frac{91\varkappa^2}{368640} x y^6 - \frac{14\varkappa^2}{184320} y^7 + \cdots \cdot \Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_y = \mu \Big\{ & - \frac{1}{16}\varkappa x y^2 + \frac{1}{16}\varkappa y^3 \\
& - \frac{3\varkappa^2}{368640} x^5 y^2 - \frac{9\varkappa^2}{73728} x^4 y^3 + \frac{\varkappa^2}{36864} x^3 y^4 \\
& + \frac{27\varkappa^2}{184320} x^2 y^5 - \frac{3\varkappa^2}{368640} x y^6 - \frac{13\varkappa^2}{368640} y^7 + \cdots \Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\tau = \tau_0 + \Delta \Big\{ x + \frac{\varkappa}{96} x^2 y^3 - \frac{\varkappa}{64} x y^4 + \frac{\varkappa}{192} y^5 + \cdots \Big\},
$$

$$
\begin{aligned}
p = p_0 - g \varrho_0 y + \lambda\mu \Big\{ & - \frac{3}{16}\varkappa x^2 + \frac{7}{8}\varkappa x y + \frac{3}{16}\varkappa y^2 \\
& + \frac{\varkappa^2}{40960} x^6 - \frac{\varkappa^2}{61440} x^5 y - \frac{3\varkappa^2}{8192} x^4 y^2 \\
& + \frac{\varkappa^2}{18432} x^3 y^3 + \frac{73\varkappa^2}{24576} x^2 y^4 - \frac{193\varkappa^2}{61440} x y^5 \\
& + \frac{247\varkappa^2}{368640} y^6 + \cdots \Big\} .
\end{aligned}
$$

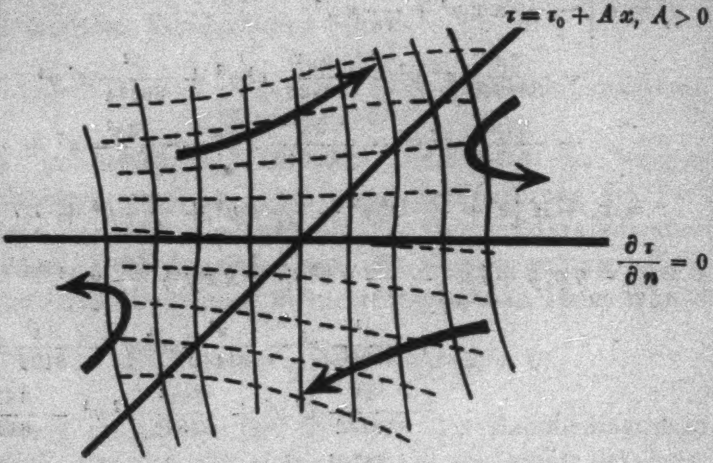
Hierin enthalten v_x und v_y keine Glieder 9. Grades, p keine 8. Grades und τ keine Glieder 7. Grades und es ist

$$
|C_{m,n}|_{m+n=9} < \frac{\varkappa^2 \cdot |\Delta|}{18000} .
$$

Dieser Fall führt, obwohl die Konstellation derjenigen ähnlich ist, die bei ausschließlicher Aktivität der Wände zu Trivialitäten führte, nicht zu stabiler oder labiler Ruhe und horizontaler Temperaturschichtung, da diese nicht die Bedingung $\left.\frac{\partial \tau}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$ erfüllt. Das die Strömung in der 0-Punktsumgebung wiedergebende Orientierungsbild (Fig. 5, S. 724) zeichnet sich dadurch aus, daß die Kurvenschar $\tau = \text{const.}$ die y-Achse orthogonal schneidet.

An dieser Stelle sei eine Bemerkung eingefügt. Die Betrachtungen, die wir angestellt haben, fußen restlos auf der Annahme, daß alle in Rede stehenden Funktionen v_x, v_y, τ und p und deren Differentialquotienten stetige Funktionen sind.

Man wird erwarten, daß die dem soeben behandelten Fall verwandte Anordnung $\mathfrak{v}|_{x=0} = 0$, $\mathfrak{v}|_{y=0}$, $\left.\frac{\partial \tau}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$, $\tau|_{x=0} = \tau_0 + A y$ zu einer stationären Strömung führt. Beim rekursiven Rechnen kommt man indessen zu Widersprüchen, da $\left.\frac{\partial \tau}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$ für den der Ebene $y = 0$ angehörenden Punkt $x = 0$, $y = 0$ der Forderung $\tau|_{x=0} = \tau_0 + A y$ widerspricht.


$\tau = \tau_0 + A x,\ A > 0$
$\frac{\partial \tau}{\partial n} = 0$

——→ Strömungsrichtung,
—— τ = const., τ steigt mit positiver x-Richtung,
- - - - p = const., p steigt mit negativer y-Richtung.

Fig. 5.

$\left.\frac{\partial \tau}{\partial y}\right|_{y=0}$ weist für $x = 0$ eine Unstetigkeit auf, mithin kann der generelle Ansatz $\left.\frac{\partial \tau}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$ unter Annahme der Stetigkeit nicht zum Ziel führen. Analoge Verhältnisse weist der Fall auf, daß:

$$\left.\frac{\partial \tau}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \tau|_{y=0} = \tau_0 + A x, \quad \mathfrak{v}|_{x=0} = 0, \quad \mathfrak{v}|_{y=0} = 0,$$

desgleichen der Fall, daß

$$\left.\frac{\partial \tau}{\partial n}\right|_{x=-y} = 0, \quad \tau|_{x=+y} = \tau_0 + A x, \quad \mathfrak{v}|_{x=+y} = 0, \quad \mathfrak{v}|_{x=-y} = 0 \text{ ist.}$$

2. Wir berechnen noch folgende spiegelsymmetrische Strömung: Die Geschwindigkeit möge an den Ebenen $x = y$ und $x = 0$ verschwinden, die Wand $x = y$ sei passiv, also

$\left.\frac{\partial \tau}{\partial n}\right|_{x=y} = 0$, die Ebene $x = 0$ sei aktiv mit der Vorschrift $\tau|_{x=0} = \tau_0 + Ay$.

Die Randbedingungen für die Geschwindigkeit geben sich in den Koeffizientengleichungen wieder:

$$\left.\begin{array}{l} A_{0,n} = 0, \qquad B_{0,n} = 0, \\ \sum\limits_{\substack{m+n=2k+1 \\ m>o}} \frac{n+1}{m} B_{m-1,n+1} = 0, \quad \sum\limits_{m+n=2k+1} B_{m,n} = 0 \end{array}\right\} \text{für jedes } k \geqq 0.$$

Die Randbedingung für die Temperatur für die Wand $x = 0$ ist $C_{0,n} = 0$ für $n > 1$ nebst $C_{0,1} = A$; für die passive Wand $x = y$ leitet sich folgende Relation ab:

$$\left.\frac{\partial \tau}{\partial n}\right|_{x=y} = \left.\left(-\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y}\right)\right|_{x=y} = 0;$$

Diese Bedingung verknüpft nur Koeffizienten $C_{m,n}$ gleichhohen Grades und führt zu der Beziehung:

$$\sum_{m+n=2k+1} (n-m) \cdot C_{m,n} = 0;$$

hierbei ist zu beachten, daß wegen $m + n = 2k + 1$ der Fall $m = n$ nicht eintritt.

Man erhält die Lösung:

$$\begin{aligned} v_x = \mu \Big\{ & -\frac{\varkappa}{16} x^3 + \frac{\varkappa}{16} x^2 y \\ & + \frac{13\varkappa^2}{184320} x^7 - \frac{61\varkappa^2}{184320} x^6 y + \frac{37\varkappa^2}{92160} x^5 y^2 \\ & + \frac{5\varkappa^2}{55296} x^4 y^3 - \frac{37\varkappa^2}{110592} x^3 y^4 + \frac{19\varkappa^2}{184320} x^2 y^5 + \ldots \Big\}, \end{aligned}$$

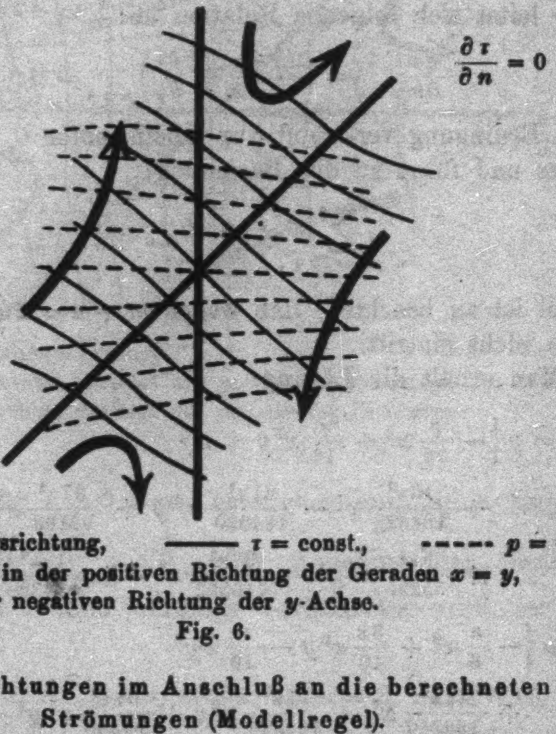
$$\begin{aligned} v_y = \mu \Big\{ & -\frac{\varkappa}{8} x^3 + \frac{3\varkappa}{16} x^2 y - \frac{\varkappa}{16} x y^2 \\ & + \frac{13\varkappa^2}{138240} x^7 - \frac{91\varkappa^2}{184320} x^6 y + \frac{61\varkappa^2}{61440} x^5 y^2 - \frac{37\varkappa^2}{55296} x^4 y^3 \\ & - \frac{5\varkappa}{55296} x^3 y^4 + \frac{37\varkappa^2}{184320} x^2 y^5 - \frac{19\varkappa^2}{552960} x y^6 + \ldots \Big\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau = \tau_0 + A \Big(& x + y - \frac{\varkappa}{128} x^5 + \frac{\varkappa}{48} x^4 y \\ & - \frac{\varkappa}{64} x^3 y^2 + \frac{\varkappa}{384} x y^4 + \ldots \Big), \qquad \left| C_{m,n} \right|_{m+n=9} < \frac{\varkappa^2 |A|}{11000} \cdot \end{aligned}$$

$$p = p_0 - g\varrho_0 y + \lambda\mu\Big\{-\frac{3\varkappa}{16}x^2 - \frac{\varkappa}{8}xy + \frac{11\varkappa}{16}y^2 + \frac{847\varkappa^2}{552960}x^6 - \frac{173\varkappa^2}{92160}x^5y + \frac{37\varkappa^2}{36864}x^4y^2 + \frac{29\varkappa^2}{27648}x^3y^3 - \frac{37\varkappa^2}{36864}x^2y^4 + \frac{19\varkappa^2}{92160}xy^5 + \frac{37\varkappa^2}{552960}y^6 + \dots\Big\}.$$

Das Orientierungsbild für die Umgebung des 0-Punktes ist hier das folgende:

$\tau = \tau_0 + Ay,\ A > 0$



——➤ Strömungsrichtung, ——— τ = const., - - - - - p = const.
τ steigt in der positiven Richtung der Geraden $x = y$,
p in der negativen Richtung der y-Achse.

Fig. 6.

c) Betrachtungen im Anschluß an die berechneten Strömungen (Modellregel).

Die Dimension des Faktors $\varkappa = \frac{A g \varrho_0 a}{\mu\lambda}$ ist die einer negativen 4. Längenpotenz. Aus dem Rechenverfahren der ermittelten Strömungen ersieht man, daß der Exponent von $\varkappa$ stets um 1 steigt, wenn der Grad von $x^m \cdot y^n$ um 4 wächst; es besteht mithin die Möglichkeit, durch geeignete Koordinatentransformation Reihen für v_x, v_y, τ und p zu gewinnen, welche die physikalischen Konstanten nur noch mittelbar enthalten. Setzt man nämlich

$$x' = \sqrt[4]{\varkappa}\cdot x, \qquad y' = \sqrt[4]{\varkappa}\cdot y,$$

so gehen unsere Lösungen in Ausdrücke der Form über

$$v_x = \mu\sqrt[4]{\varkappa}\cdot\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{m+n=4p+3} a_{m,n}\, x'^m\cdot y'^n,$$

$$v_y = \mu\sqrt[4]{\varkappa}\cdot\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{m+n=4p+3} b_{m,n}\cdot x'^m\cdot y'^n,$$

$$\tau = \tau_0 + \frac{A}{\sqrt[4]{\varkappa}}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{m+n=4p+1} c_{m,n}\cdot x'^m\cdot y'^n,$$

$$p = p_0 - \frac{g\varrho_0 y'}{\sqrt[4]{\varkappa}} + \lambda\mu\sqrt[4]{\varkappa}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{m+n=4p+2} d_{m,n}\, x'^m\cdot y'^n.$$

Ohne Einschränkung kann man hier $\varkappa > 0$, also $\sqrt[4]{\varkappa}$ reell annehmen, da man für $\varkappa < 0$ die Koordinatentransformation vornehmen kann, nachdem man das eventuell negative Vorzeichen von $\varkappa^n$ vor das ganze Glied $a_{m,n}\cdot\varkappa^p\cdot x^m\cdot y^n$ gesetzt hat. Die Koordinaten x', y' sind dimensionslos. Diese Reihendarstellung gestattet eine generelle Aussage über die Größe der Geschwindigkeit. Wir nehmen an, es existiere für unsere Lösungen in den x, y ein Konvergenzbereich, dessen Grenzen von $\varkappa$, also von den Konstanten der Substanz und A abhängig sind.[1] Durch die Koordinatentransformation erhält man Reihen in den x', y', deren Konvergenzbereich nur von den rein numerischen Koeffizienten $a_{m,n}\ldots$, abhängt. Für alle Substanzen hat man also in den x', y' denselben Konvergenzbereich, innerhalb dessen unsere Reihen die größten Werte

$$R_{v_x} = \max\left|\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{m+n=4p+3} a_{m,n}\, x'^m\cdot y'^m\right| \quad \text{und analog } R_{v_y},$$

R_τ und R_p haben mögen; auch diese Größen R sind unabhängig von den physikalischen Konstanten der verschiedenen Substanzen. Innerhalb des Konvergenzbereiches ist demnach

---

[1] Das folgende gilt in noch umfassenderem Sinn, falls der Konvergenzbereich von $\varkappa$ unabhängig sein sollte.

$$|v_x| \leqq \mu \sqrt[4]{\varkappa} \cdot R_{v_x}, \qquad |v_y| \leqq \mu \sqrt[4]{\varkappa}\, R_{v_y},$$

$$|\tau - \tau_0| \leqq \frac{A}{\sqrt[4]{\varkappa}} R_\tau,$$

$$|p - p_0 + g \varrho_0 y| \leqq \mu \lambda \sqrt[2]{\varkappa}\, R_p.$$

Wir ersehen hieraus, daß unsere Voraussetzung kleiner Geschwindigkeit, unter der wir die Trägheit vernachlässigten, für Stoffe von geringer Wärmeleitfähigkeit[1]) und solchen großer innerer Reibung erfüllt ist; auch Substanzen von geringer Wärmeausdehnung zeitigen langsame Bewegung, doch sind dies i. A. Erwägungen von nur formalem Interesse, da für jede Flüssigkeit alle Konstanten gegeben sind und uns eine Willkür in der Variation derselben nicht freisteht; maßgebend für die Größenordnung der Geschwindigkeit ist das Produkt $\mu \sqrt{\varkappa}$; die Temperaturleitfähigkeit μ dürfte insofern eine Ausnahmestellung vor den anderen Substanzkonstanten einnehmen, als die vierte Wurzel aus $\varkappa$ selbst für extreme Werte von $\varkappa$ in normaler Größenordnung bleibt, sodaß extrem große oder kleine μ von hervortretendem Einfluß auf die Geschwindigkeit sein dürften.

Unsere Reihendarstellung in den x', y' gibt bis auf die Faktoren bzw. Summanden vor den Summen für alle Substanzen dasselbe Bild; das effektive Strömungsbild erhält man dann durch Streckung gemäß $x = \frac{x'}{\sqrt[4]{\varkappa}}$, $y = \frac{y'}{\sqrt[4]{\varkappa}}$. Die Erkenntnis, daß es ein „Normalströmungsbild" gibt, dargestellt durch

$$v_x' = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m+n=4p+3} a_{m,n}\, x'^m \cdot y'^n$$

und analoge Formeln für v_y', τ' und p', wobei

$$\mathfrak{v} = \mu \sqrt[4]{\varkappa} \cdot \mathfrak{v}', \quad \tau = \tau_0 + \frac{A}{\sqrt[4]{\varkappa}} \cdot \tau', \quad p = p_0 - \frac{\varrho_0 g}{\sqrt[4]{\varkappa}} \cdot y' + \lambda \mu \sqrt[2]{\varkappa} \cdot p'$$

---

1) Gemäß $\mu = \dfrac{\text{Wärmeleitfähigkeit}}{\text{Dichte} \times \text{spez. Wärme}}$.

ist, ermöglicht eine Verknüpfung von Strömungen verschiedener Substanzen bei verschiedenem A und damit eventuell eine Beurteilung experimentell unzugänglicher Fälle mit Hilfe anderer, im Experiment realisierbarer Strömungen.

Betrachten wir zwei Strömungen (1) und (2) von gleicher räumlicher Konstellation, aber verschiedenen Konstanten μ_1, λ_1, γ_1, A_1 und μ_2, λ_2, γ_2, A_2, so entstehen ähnliche Strömungsbilder derart, daß für beide Strömungen die Ausdrücke

$$\frac{\mathfrak{v}}{\mu\sqrt[4]{\varkappa}}, \quad (\tau - \tau_0)\cdot\frac{\sqrt[4]{\varkappa}}{A} \quad \text{und} \quad \frac{p - p_0 + g\,\varrho_0\cdot y}{\sqrt[2]{\varkappa}\cdot\mu\,\lambda}$$

an entsprechenden Stellen den gleichen Wert haben; zwei sich entsprechende Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) der beiden Strömungen hängen derart zusammen, daß

$$x_2 = x_1\sqrt[4]{\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}},$$

$$y_2 = y_1\sqrt[4]{\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}}$$

ist, und für die Geschwindigkeit, die Temperatur und den Druck ergibt sich:

$$\left\{\begin{aligned}
v_{x(2)}(x_2, y_2) &= \frac{\mu_2}{\mu_1}\cdot\sqrt[4]{\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}}\cdot v_{x(1)}(x_1, y_1),\\
v_{y(2)}(x_2, y_2) &= \frac{\mu_2}{\mu_1}\cdot\sqrt[4]{\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}}\cdot v_{y(2)}(x_1, y_1),\\
\tau_{(2)}(x_2, y_2) &= \tau_{0(2)} + \frac{A_2}{A_1}\cdot\sqrt[4]{\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}}\cdot\left(\tau_{(1)}(x_1, y_1) - \tau_{0(1)}\right),\\
p_{(2)}(x_2, y_2) &= p_{0(2)} - g\,\varrho_{0(2)}\,y_2 + \frac{\lambda_2\,\mu_2}{\lambda_1\,\mu_1}\cdot\sqrt[4]{\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}}\cdot\big(p_{(1)}(x_1, y_1)\\
&\qquad - p_{0(1)} + g\,\varrho_{0(1)}\,y_1\big).
\end{aligned}\right\}$$

Sind nun für eine experimentell unzugängliche Strömung einer Substanz (2) die Konstanten μ_2, λ_2, γ_2 und A_2 bekannt, so kann man stets das A_1 für eine Strömung einer anderen Substanz (1) angeben, so daß die Koordinaten korrespondierender Punkte in gegebenem Verhältnis stehen. Da nämlich die Beziehung $x_2\sqrt[4]{\varkappa_2} = x_1\sqrt[4]{\varkappa_1}$ gilt, in der

$$\varkappa_1 = \frac{A_1\,\gamma_1}{\mu_1\,\lambda_1}, \quad \varkappa_2 = \frac{A_2\,\gamma_2}{\mu_2\,\lambda_2}$$

ist, so braucht man für die Strömung (1) nur

$$\Delta_1 = \frac{\gamma_2 \mu_1 \lambda_1}{\gamma_1 \cdot \mu_2 \lambda_2} \cdot \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^4 \cdot \Delta_2$$

anzusetzen, um der Forderung des gegebenen Verhältnisses x_2/x_1 korrespondierender Punkte gerecht zu werden.

Mit diesen Betrachtungen gewinnt man also die Möglichkeit, unter Umständen das Bild einer experimentell unzugänglichen Strömung, für die man die strömungsbestimmenden Konstanten μ, λ, γ und Δ kennt, zu entwerfen, indem man zu einer anderen Substanz übergeht, die eine experimentelle Untersuchung der Strömung gestattet, und die hier besprochenen Transformationen durchführt — ein Verfahren, das zudem noch den Vorteil bietet, von dem Konvergenzbereich der Reihen unabhängig zu sein, da es gleichsam eine Art physikalisch-analytischer Fortsetzung darstellt. Die physikalische Anwendbarkeit desselben hängt im wesentlichen davon ab, ob das für den gegebenen Maßstab x_2/x_1 berechnete Δ_1 die physikalischen Voraussetzungen linearen Wärmeausdehnungsverlaufs, Konstanz der Größen λ, μ, γ usw. erfüllt und die Vernachlässigung der Flüssigkeitsträgheit gestattet.

In Anlehnung an die von Boussinesq[1]) und Davis[2]) angestellten Betrachtungen leiten wir die allgemeine Modellregel aus den Grundgleichungen unseres Problems für den Fall ab, daß wir die Trägheit der Flüssigkeit vernachlässigen. Es gilt

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & \gamma \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x} + \lambda \Delta \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = 0, \\ & \mu \Delta \tau - v_x \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x} - v_y \cdot \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \\ & \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \, . \end{aligned} \right.$$

Setzen wir

$$\bar{x} = a x, \quad \bar{y} = a y,$$

$$\bar{v}_x(\bar{x}, \bar{y}) = b \, v_x(x, y), \quad \bar{v}_y(\bar{x}, \bar{y}) = b \, v_y(x, y),$$

$$\bar{\tau}(\bar{x}, \bar{y}) = c \, \tau(x, y),$$

---

1) V. J. Boussinesq, Théorie analytique de la chaleur, II. p. 174 ff. 1903.

2) A. H. Davis, Phil. Mag. 40. S. 692. 1920.

so gilt

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{x}} + \bar{\varDelta}\left(\dfrac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{x}} - \dfrac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{y}}\right) = 0, \\ \bar{\varDelta}\,\bar{\tau} - \bar{v}_x \cdot \dfrac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{x}} - \bar{v}_y \cdot \dfrac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{y}} = 0, \\ \dfrac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{x}} + \dfrac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{y}} = 0, \end{cases}$$

sofern man, wie eine einfache Rechnung zeigt,

$$b = \frac{1}{\mu a}, \qquad c = \frac{\gamma}{\mu \lambda a^3}$$

setzt. Mithin genügen stets, d. h. für jedes a

$$(3)\qquad \bar{v}_x = \frac{1}{\mu a} v_x, \quad \bar{v}_y = \frac{1}{\mu a} v_x, \quad \bar{\tau} = \frac{\gamma}{\mu \lambda a^3} \tau$$

als Funktionen von $\bar{x}$ und $\bar{y}$ den Gleichungen (2), wenn v_x, v_y und τ die Gleichungen (1) erfüllen. Die Randbedingungen bereiten bei dieser Transformation keine Schwierigkeiten, denn wegen durchgehender Voraussetzung stetigen Verhaltens von $\mathfrak{v}$ und τ verschwindet die Geschwindigkeit an entsprechenden Bereichsgrenzen und die Randvorschriften für die Temperatur gehen in Funktionen von entsprechend stetigem Verhalten über.

Da das Gleichungssystem (2) keine Materialkonstanten mehr enthält, ist die Möglichkeit gegeben, die Strömungen verschiedener Substanzen von gleicher räumlicher Anordnung miteinander in Beziehung zu setzen und damit namentlich zu einer Strömung einer Substanz (1) die einer anderen Substanz (2) von gegebenem maßstäblichen Verhalten ausfindig zu machen.

Um aus der Gleichung

$$-\mathfrak{g}\,\varrho_0\left(1 - \alpha(\tau - \tau_0)\right) + \operatorname{grad} p + \lambda \varDelta \mathfrak{v} = 0$$

zu einer Modellregel für p zu gelangen, setzen wir zunächst

$$p = -g\,\varrho_0\, y + p^*;$$

dann gilt, da $\mathfrak{g}$ die Komponenten $g_x = 0$, $g_y = -g$ hat, die folgende Gleichung:

$$(4)\qquad \mathfrak{g} \cdot \varrho_0\, \alpha(\tau - \tau_0) + \operatorname{grad} p^* + \lambda \varDelta \mathfrak{v} = 0;$$

setzen wir $\bar{p}^* = d \cdot p^*$ und gehen hiermit und mit den Relationen (3) in Gleichung (4) ein, so genügen $\bar{\mathfrak{v}}$, $\bar{\tau}$ und $\bar{p}^*$ der Gleichung:

$$\frac{\mathfrak{g}}{g}(\bar{\tau} - \bar{\tau}_0) + \operatorname{grad} \bar{p}^* + \bar{\varDelta} \bar{\mathfrak{v}} = 0,$$

sofern man

$$d = \frac{1}{\lambda \mu a^2}$$

setzt; mithin gesellt sich zu den Transformationen (3) noch die folgende:

$$\bar{p}^* = \frac{1}{\mu \lambda a^2}\{p + g \varrho_0 y\} = \frac{1}{\mu \lambda a^2} p^*.$$

5. Der Doppelsummenansatz unter Berücksichtigung der Flüssigkeitsträgheit.

1. Unsere ursprüngliche, die Trägheit der Flüssigkeit berücksichtigende Bewegungsgleichung war[1]

$$\mathfrak{g} \varrho_0 \left(1 - \alpha(\tau - \tau_0)\right) - \operatorname{grad}\left(p + \frac{\varrho_0 v^2}{2}\right) + \lambda \Delta \mathfrak{v} + \varrho_0 [\mathfrak{v} \operatorname{rot} \mathfrak{v}] = 0.$$

Bildet man hiervon wiederum die Rotation, so erhält man bei Berücksichtigung von $\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$

$$+ \alpha \varrho_0 [\mathfrak{g} \operatorname{grad} \tau] + \lambda \Delta \operatorname{rot} \mathfrak{v} - \varrho_0 (\mathfrak{v} \operatorname{grad}) \operatorname{rot} \mathfrak{v} = 0 \;,$$

in Komponentenform

$$+ \gamma \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x} + \lambda \Delta \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) - \varrho_0 \cdot (v_x \Delta v_y - v_y \Delta v_x) = 0 \;,$$

hierin ist $\gamma = \alpha \varrho_0 g$.

In diese Gleichungen führen wir die Doppelsummen (A), (B) und (C)[2] ein und erhalten für $m > 1$:

$$(\mathrm{II}') \left\{ \begin{aligned} &(m + 1)(m + 2) B_{m+2,n} + 2(n + 1)(n + 2) B_{m,n+2} \\ &\quad + \frac{(n + 1)(n + 2)(n + 3)(n + 4)}{m(m - 1)} B_{m-2,n+4} = - \frac{\gamma}{\lambda} C_{m,n} \\ &\qquad + \frac{\varrho_0}{m \cdot \lambda} \left\{ \sum_{\substack{p+r=m+1 \\ q+s=n}} \left(r(r-1) - p(p-1)\right) A_{p,q} B_{r,s} \right. \\ &\qquad \left. + \sum_{\substack{p+r=m-1 \\ q+s=n+2}} \left(s(s-1) - q(q-1)\right) A_{p,q} B_{r,s} \right\} , \\ &\text{für } m = 1: \\ &6 B_{3,n} + 2(n+1)(n+2) B_{1,n+2} - (n+1)(n+2)(n+3) A_{0,n+3} \\ &\quad = - \frac{\gamma}{\lambda} C_{1,n} + \frac{\varrho_0}{\lambda} \left\{ 2 \sum_{q+s=n} (A_{0,q} B_{2,s} - A_{2,q} B_{0,s}) \right. \\ &\qquad \left. + \sum_{q+s=n+2} s(s-1) - q(q-1) A_{0,q} \cdot B_{0,s} \right\} ; \end{aligned} \right.$$

---

1) Vgl. S. 701, Gl. (5).

2) Vgl. S. 702.

für $m = 0$ sagt diese Rekursionsgleichung über die höheren Koeffizienten wiederum nichts aus.

Die auf der rechten Seite der Gleichungen auftretenden Koeffizienten stehen mindestens eine Diagonale unter den zu berechnenden höheren Koeffizienten, da die Indexquersumme der Produkte $A_{p,q}\cdot B_{r,s}$ $(m + n' + 1)$ ist und $A_{0,0} = B_{0,0} = 0$ ist. Für unsere oben berechneten Fälle, in denen v_x und v_y erst mit dem 3. Grad beginnen, ergibt sich unmittelbar, daß der Einfluß der Trägheit sich erst bei der Berechnung des 7. Grades von v_x und v_y bemerkbar macht.

2. Als Beispiel hierzu soll einer der oben behandelten Fälle mit Berücksichtigung der Trägheit durchgerechnet werden, um Betrachtungen über den Einfluß derselben an einfachem Beispiel anstellen zu können. Hinsichtlich der im 3. Kapitel (S. 705—711) berechneten Strömungen, bei denen $v_x \equiv 0$ ist, zeigt eine einfache Überlegung, daß in ihnen die Strömungsverteilung durch die Trägheit nicht beeinflußt wird. Da nämlich $v_y = f(x)$ und $v_x \equiv 0$ ist, verschwindet das der Flüssigkeitsträgheit Rechnung tragende Glied $(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{v}$, wie es aus der Definition dieses Vektors unmittelbar hervorgeht.

Als Beispiel berechnen wir die auf S. 713—715 behandelte Strömung mit nur aktiven Wänden, den Fall, daß

$$v_x\big|_{x=0} = 0\ ,\quad v_y\big|_{x=0} = 0\ ,\quad v_x\big|_{y=0} = 0\ ,\quad v_y\big|_{y=0} = 0\ ,$$
$$\tau\big|_{x=0} = \tau_0\ ,\quad \tau\big|_{y=0} = \tau_0 + \varDelta x$$

ist.

Man erhält die Lösung:

$$v_x = \mu\left\{\frac{\varkappa}{4}x^2\cdot y + \left(\frac{1}{720} + \frac{1}{320}\cdot\frac{\varrho_0\mu}{\lambda}\right)\varkappa^2\cdot x^5\cdot y^2 - \left(\frac{1}{864} + \frac{1}{192}\cdot\frac{\varrho_0\mu}{\lambda}\right)\varkappa^2\cdot x^3\cdot y^4 + \dots\right\}\ ,$$

$$v_y = \mu\left\{-\frac{\varkappa}{4}x\cdot y^2 - \left(\frac{1}{432} + \frac{1}{192}\cdot\frac{\varrho_0\mu}{\lambda}\right)\varkappa^2\cdot x^4\cdot y^3 + \left(\frac{1}{1440} + \frac{1}{320}\cdot\frac{\varrho_0\mu}{\lambda}\right)\varkappa^2\cdot x^2\cdot y^5 + \dots\right\}\ ,$$

$$\tau = \tau_0 + \varDelta\left\{x + \frac{\varkappa}{48}x^4\cdot y + \left(\frac{49}{34560} + \frac{1}{384}\cdot\frac{\varrho_0\mu}{\lambda}\right)\varkappa^2\cdot x^5\cdot y^4 - \left(\frac{17}{17280} + \frac{11}{5760}\cdot\frac{\varrho_0\mu}{\lambda}\right)\varkappa^2 x^3 y^6 + \left(\frac{17}{161280} + \frac{11}{53750}\cdot\frac{\varrho_0\mu}{\lambda}\right)\cdot\varkappa^2 x y^8 + \dots\right\}.$$

Die Berechnung des hydrostatischen Druckes geschieht analog dem auf S. 704 angegebenen Verfahren, durch welches man $\left(p + \frac{\varrho_0 v^2}{2}\right)$ erhält; man hat also von dem aus ihm gewonnenen Resultat noch $\frac{\varrho_0 v^2}{2}$ abzuziehen, um zu p selbst zu gelangen.

Im Hinblick auf die im Anschluß an dieses Beispiel anzustellenden Betrachtungen sei noch bemerkt, daß die durch die Trägheit in die $B_{m,n}$ und $A_{m,n}$ des 11. Grades gelangenden Anteile die physikalischen Faktoren $\mu \cdot \frac{\varrho_0 \mu}{\lambda} \varkappa^3$ bzw. $\mu \cdot \left(\frac{\varrho_0 \mu}{\lambda}\right)^2 \cdot \varkappa^3$ aufweisen.

3. Es ist evident, daß sich hier die Koeffizienten in physikalischer Hinsicht nicht mehr so einfach aus den Material- bzw. Versuchskonstanten zusammensetzen wie in den früheren Rechnungen, und aus diesem Grunde ist eine einfache Darstellung der Lösung nicht ohne weiteres möglich, doch führt folgende Betrachtung zu einer Übersicht über den Organismus der entstehenden Reihen.

Der Ausdruck $\sigma = \frac{\varrho_0 \mu}{\lambda}$ ist dimensionslos. An Stelle der $\varkappa^p$ treten in den v_x, v_y, τ und p jetzt offenbar alle möglichen Konstanten der Form $\sigma^t \cdot \varkappa^p$ auf, wobei t alle positiven ganzen Zahlen von 0 bis $(p-1)$ durchläuft. Dies kann man durch vollständige Induktion zeigen. Bis zu einem gewissen Grad $(4h+1)$ mögen in den $C_{m,n}$ die Kombinationen

$$\begin{array}{rl}
(1.\ \text{Grad}) & A\,, \\
(5.\ \text{Grad}) & A\varkappa\,, \\
(9.\ \text{Grad}) & A\varkappa\,, \quad A\sigma\varkappa^2\,, \\
\vdots & \quad\vdots \\
((4h+1).\ \text{Grad}) & A\varkappa^h,\ A\sigma\varkappa^h,\ A\sigma^2\cdot\varkappa^h,\ \ldots,\ A\sigma^{h-1}\cdot\varkappa^h
\end{array}$$

und in den $A_{m,n}$ und $B_{m,n}$ die Kombinationen bis zum $(4h-1)$. Grad (da der $(4h+1)$. Grad in v_x und v_y nicht existiert)

$$\begin{array}{rl}
(3.\ \text{Grad}) & \mu\varkappa\,, \\
(7.\ \text{Grad}) & \mu\varkappa^2,\ \mu\sigma\varkappa^2\,, \\
(11.\ \text{Grad}) & \mu\varkappa^3,\ \mu\sigma\varkappa^3,\ \mu\sigma^2\cdot\varkappa^3\,, \\
\vdots & \quad\vdots \\
((4h-1).\ \text{Grad}) & \mu\varkappa^h,\ \mu\sigma\varkappa^h,\ \mu\sigma^2\cdot\varkappa^h,\ \ldots,\ \mu\sigma^{h-1}\cdot\varkappa^h
\end{array}$$

auftreten.

Setzt man die Ermittlungsgleichungen für die $B_{m,n}$ und $A_{m,n}$ des $(4h+3)$. Grades an, so entstehen Kombinationen des Typus

$$\frac{\gamma \cdot A}{\lambda}\sigma^p \cdot \varkappa^h, \qquad p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ (h-1) \quad \text{sowie}$$

$$\frac{\varrho_0}{\lambda} \cdot \mu\sigma^t \cdot \varkappa^r \cdot \mu\sigma^u \cdot \varkappa^s \quad \text{mit} \quad \left\{\begin{array}{c} t = 0, 1, 2, \ldots (r-1), \\ u = 0, 1, 2, \ldots (s-1) \text{ nebst} \\ r + s = h + 1 \end{array}\right\},$$

mithin, wenn man beachtet, daß $\varkappa = \frac{\gamma A}{\mu\lambda}$ und $\sigma = \frac{\varrho_0 \mu}{\lambda}$ ist,

$$\mu\sigma^p \cdot \varkappa^{h+1},\ p = 0, 1, 2, \ldots . h\ ;$$

durch entsprechende Betrachtungen kommt man für τ zu dem Faktortyp $A\sigma^t \cdot \varkappa^{h+1}$, $t = 0, 1, 2, \ldots h$ und für p zu $\lambda\mu \cdot \sigma^t \cdot \varkappa^h$, $t = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots .\ (h-1)$. Unsere Doppelsummen können wir somit in der Form darstellen

$$v_x = \mu\left\{\sum_{r=0}^{\infty}\ \sum_{\substack{(m+n\\=4r+3)}} \left(\sum_{p=0}^{r} a_{m,n,p}\,\sigma^p\right)\varkappa^{r+1} \cdot x^m \cdot y^n\right\},$$

und entsprechende Ausdrücke[1]) für v_y, τ und p, in denen $a_{m,n,p}$, $b_{m,n,p}$, $c_{m,n,p}$ und $d_{m,n,p}$ reine Zahlen sind, lediglich bedingt durch die Rekursionsgleichungen und die Randvorschriften. Man überzeugt sich leicht, daß durch das Auftreten der Produkte $A_{p,q}\,B_{r,s}$ in II′ an der Tatsache, daß nur $A_{m,n}$, $B_{m,n}$ existieren, für die $m+n = 4k+3$ ist, nichts geändert wird. Wir nehmen an, bis zu einem gewissen Grad $(4k+3)$ existierten nur $A_{m,n}$ und $B_{m,n}$ mit $m+n = 4r+3$. Setzen wir jetzt die Rekursionsgleichungen II′ für die nächsthöheren $A_{m,n}$ und $B_{m,n}$ an, die also die Quersumme $(4k+5)$ der Indizes haben, so ist in den Koeffizientenprodukten $A_{p,q} \cdot B_{r,s}$ die Indexquersumme $p+q+r+s = 4k+4 = 4(k+1)$. Da nun diese Zahl nur auf diese Weise

$$4(k+1) = (4p+3) + (4q+1)$$

in ungerade Zahlen zerlegbar ist und Koeffizienten mit $m+n = 4q+1$ unter den tieferen, bekannten Koeffizienten $A_{m,n}$ und $B_{m,n}$ nicht existieren, müssen die Koeffizienten der Indexquersumme $4k+5 = 4(k+1)+1$ wegen Homogenität der

---

1) Vgl. S. 727.

sie bestimmenden Gleichungen verschwinden. Eine analoge Überlegung zeigt, daß lediglich die $C_{m,n}$ existieren, für die $m + n = 4k + 1$ ist.

Aus $\sigma = \frac{\varrho_0 \mu}{\lambda} = \frac{w}{c \cdot \lambda}$, worin w die Wärmeleitfähigkeit und c die spez. Wärme bedeutet, ersieht man, daß der Einfluß der Trägheit mit fallendem μ, d. h. auch mit fallendem w, oder mit wachsendem λ abnimmt; die unter der Voraussetzung verschwindenden Trägheitseinflusses berechneten Lösungen gehen aus den hier angegebenen Reihen hervor, indem man $\sigma = 0$ setzt; inwieweit diese Vernachlässigung berechtigt ist, zeige folgende Tabelle, in der für jede Substanz auch ihr Wert von $\varkappa$ angegeben ist:[1])

Substanz	Temperatur	σ	$\varkappa$
Quecksilber	15°	37,72	3399 A
Luft . . .	15—20°	1,192	133 A
Wasser . .	20—25°	0,1349	12840 A
Olivenöl .	18°	0,0007	854,2 A

Die auf S. 726—732 angestellten allgemeinen Betrachtungen über Normalströmungsbilder kommen hier nicht mehr in Betracht; die Möglichkeit der maßstäblichen Verknüpfung zweier Strömungen ist in der auf S. 726—732 besprochenen Weise nur dann gegeben, wenn man Strömungen derselben Substanz ins Auge faßt, oder wenn die beiden Stoffe dasselben σ haben. So einschränkend die letztere Voraussetzung erscheinen mag, so ist sie eventuell für experimentelle Arbeiten[2]) doch nicht ohne

---

[1]) Die Werte der Konstanten w, λ, a, c, ϱ_0 sind den Tabellen in Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik und Landolt-Börnstein, Tabellen entnommen.

[2]) Für meteorologische Untersuchungen dürften diese Modellregeln kaum in Frage kommen, da für Fälle z. B. linearen Temperaturverhaltens auf den Wandungen schon bei einer maßstäblichen Verkleinerung eines Strömungsbereiches von nur $100 : 1 = a_2 : a_1$ bei gleicher Substanz gemäß

$$A_2 = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^4 \cdot A_1\,, \qquad x_2 = \frac{a_1}{a_2} \cdot x_1\,, \qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{100}$$

der im Experiment anzuwendende Linearitätsfaktor A_2 100^4 mal so groß sein muß als das A_1 des in der Natur betrachteten Bereiches, sodaß der Bereich des linearen Verhaltens der Wärmeausdehnung weit überschritten wird. Andererseits dürfte sich zu Luft, dessen σ ungefähr $= 1$ ist, kaum eine Substanz finden lassen, deren σ ebenfalls $= 1$ ist und diese extremen Verhältnisse genügend mildert.

Wert, zumal es möglich ist, daß zwei Substanzen wesentlich verschiedenes $\frac{\varkappa}{\Delta} = \frac{\gamma}{\lambda\,\mu}$, aber hinreichend gleiches σ aufweisen.

Auch bei Berücksichtigung der Trägheit der Flüssigkeit läßt sich die Modellregel leicht aus den Differentialgleichungen direkt ableiten.[1] Die Gleichungen des Problems sind hier:

$$\gamma \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x} + \lambda\,\Delta\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) - \varrho_0\,(v_x\,\Delta\,v_y - v_y\,\Delta\,v_x) = 0,$$

$$\mu\,\Delta\,\tau - v_x \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x} - v_y \cdot \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0\,; \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,.$$

Die Transformation $\bar{x} = a\,x, \quad \bar{y} = a\,y;$

$$\bar{v}_x(\bar{x},\bar{y}) = b \cdot v_x(x,y)\,, \quad \bar{v}_y(\bar{x},\bar{y}) = b \cdot v_y(x,y);$$
$$\bar{\tau}(\bar{x},\bar{y}) = c \cdot \tau(x,y)$$

führt zu

$$\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{x}} + \lambda\,\bar{\Delta}\left(\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{y}}\right) - \bar{v}_x\,\bar{\Delta}\,\bar{v}_y + \bar{v}_y\,\bar{\Delta}\,\bar{v}_x = 0\,,$$

$$\bar{\Delta}\,\bar{\tau} - \bar{v}_x \cdot \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{x}} - \bar{v}_y \cdot \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{y}} = 0\,,$$

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{y}} = 0; \qquad \bar{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2}\,,$$

sofern

$$b = \frac{1}{\mu\,a}\,, \qquad c = \frac{\gamma}{\lambda\,\mu\,a^3}\,, \qquad \frac{\varrho_0\,\mu}{\lambda} = 1 \text{ ist}.$$

In diesem Fall ist die Möglichkeit einer Modellregel nur bei Substanzen gegeben, für die $\varrho_0 \cdot \mu\,/\,\lambda$ denselben Wert hat. Ist dieser nicht $= 1$, sondern allgemeiner $= \sigma$, so tritt an die Stelle der transformierten Bewegungsgleichung die folgende:

$$\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{x}} + \bar{\Delta}\left(\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{y}}\right) - \sigma\,(\bar{v}_x\,\bar{\Delta}\,\bar{v}_y - \bar{v}_y\,\bar{\Delta}\,\bar{v}_x) = 0\,.$$

4. Eine besondere Bemerkung gelte hier den sogenannten reibungsfreien Flüssigkeiten.

Bei der Behandlung vieler hydrodynamischer Probleme setzt man den Faktor der inneren Reibung $= 0$, da die Flüssigkeitsreibung auf die betreffenden Effekte von verschwindendem Einfluß ist, und spricht demgemäß von reibungsfreien Flüssigkeiten. Diese Qualität der Reibungsfreiheit ist indessen offenbar nur von relativer Bedeutung, und nur in Problemen, in denen die Auswirkung der inneren Reibung als ein unwesentliches Accedens zu dem wesentlichen Effekt hinzutritt, ist man berechtigt, Substanzen hinsichtlich bestimmter physikalischer Phänomene durch $\lambda = 0$ zu idealisieren.

---

[1] Siehe A. H. Davis, a. a. O. 1922; vgl. auch S. Weber, Phys. Ann. 54. S. 456ff. 1917.

In dem hier behandelten Problem spielt die Erscheinung der Flüssigkeitsreibung eine wesentliche Rolle, sie ist in unseren stationären Strömungen untrennbar mit den Phänomenen der Wärmeleitung, Wärmeausdehnung und Fallbeschleunigung verbunden, und ihr Einfluß tritt durchaus nicht als Korrektion zu einem von ihren Einwirkungen qualitativ unabhängigen Effekt. Mathematisch-physikalisch spiegeln sich diese Verhältnisse in dem Auftreten der Größe λ in den Konstanten $\varkappa$ und σ wider; in $\varkappa = \frac{A g \varrho_0 \alpha}{\mu \lambda}$ und $\sigma = \frac{\mu \varrho_0}{\lambda}$ sind alle Materialkonstanten miteinander verkettet, und die Kleinheit von λ allein läßt keine Schlüsse über die Strömung zu.

6. Betrachtungen über andere in Frage kommende Lösungsmethoden.

Im folgenden soll kurz über Lösungsversuche berichtet werden, die nicht zum Ziel geführt haben, die aber die wesentlichen Schwierigkeiten erkennen lassen, welche die Behandlung der Differentialgleichungen unseres Typus bietet. Zunächst sei darauf aufmerksam gemacht, daß infolge des Auftretens quadratischer Glieder in den Differentialgleichungen die in der Physik bei homogenen linearen Differentialgleichungen vielfach anwendbare Methode der Separation der Variablen und der Aufstellung von partikulären Lösungen nicht mehr in Frage kommt. So bleiben im wesentlichen nur die Wege der Rekursionsmethode und des Iterationsverfahrens.

Bei quadratischen Differentialgleichungen kommen für die Rekursionsmethode als Entwicklungselemente nur solche in Betracht, deren Produkt wiederum auf dieselben Elemente führt, mithin Potenzen, Exponentialfunktionen und aus diesen beiden kombinierte Glieder, auf die wir hier kurz eingehen wollen.

1. Hinsichtlich des Ansatzes, nach Gliedern $x^m \cdot y^n$ zu entwickeln, erübrigt sich jede weitere Würdigung.

2. Eine Entwicklung nach den gemischten Gliedern $x^m \cdot e^{ny}$ bzw. $y^m \cdot e^{nx}$ liefert bei $m \geqq 0$, $n \gtreqless 0$ für die quadratische Differentialgleichung keine Rekursion, da in den Koeffizientenrelationen die zu demselben $x^m \cdot e^{ny}$ bzw. $y^m \cdot e^{nx}$ gehörigen Koeffizientenprodukte in nicht mehr endlicher Anzahl auftreten. Mit dem Ansatz eines lediglich positiven n ist keine Symmetrie hinsichtlich der y- bzw. x-Koordinate zu erzielen; um Symmetrieforderungen gerecht zu werden, hat man an Ansätze zu denken, in deren Glieder Kombinationen von e-Funktionen auftreten. Eine Entwicklung nach $x^m \cdot \mathfrak{Sin}\, n y$, $x^m \cdot \sin n y$ u. ä. für $m \geqq 0$, $n \geqq 0$ gestattet nun zwar die Darstellung symmetrischen Verhaltens, doch, ganz abgesehen von der Möglichkeit, überhaupt eine Rekursion gewinnen zu können, führt die Erfüllung der Randbedingungen auf mindestens ebensogroße Schwierigkeiten wie der Ansatz in Potenzen kartesischer Koordinaten.

3. Auch die Entwicklung nach Elementen e^{mx+ny}, $\mathfrak{Sin}(mx + ny)$, $\sin(mx + ny)$ usw. führt nicht zu günstigeren Konstellationen.

Zusammenfassend kann man sagen, daß die Möglichkeit, überhaupt zu einer Rekursion zu gelangen, sehr gering ist und daß sie, abgesehen von der Entwicklung nach $x^m \cdot y^n$, im wesentlichen nur da gegeben ist, wo physikalische Problemforderungen nicht mit den Einschränkungen vereinbar sind, unter denen man ein Rekursionssystem aufstellen kann. Auch bei den naheliegenden Ansätzen in Polarkoordinaten begegnet man denselben Schwierigkeiten.

Auch Iterationsversuche führen zu recht komplizierten Verhältnissen. Es sollte versucht werden, die Strömung in einem unendlich langen, horizontalliegenden Kreiszylinder, an dessen Oberfläche eine symmetrische Temperaturverteilung gegeben ist, ferner die Strömung in einem unendlich langen liegenden Gefäß von rechteckigem Querschnitt zu ermitteln, an dessen beiden Vertikalwänden zwei verschiedene konstante Temperaturen vorgeschrieben und dessen Horizontalwände wärmeundurchlässig sind. Zunächst kam in Betracht, eine schwindendem Einfluß ist, und spricht demgemäß von reibungsfreien Flüssigkeiten. Diese Qualität der Reibungsfreiheit ist indessen offenbar nur von relativer Bedeutung, und nur in Problemen, in denen die Auswirkung der inneren Reibung als ein unwesentliches Accedens zu dem wesentlichen Effekt hinzutritt, ist man berechtigt, Substanzen hinsichtlich bestimmter physikalischer Phänomene durch $\lambda = 0$ zu idealisieren.

In dem hier behandelten Problem spielt die Erscheinung der Flüssigkeitsreibung eine wesentliche Rolle, sie ist in unseren stationären Strömungen untrennbar mit den Phänomenen der Wärmeleitung, Wärmeausdehnung und Fallbeschleunigung verbunden, und ihr Einfluß tritt durchaus nicht als Korrektion zu einem von ihren Einwirkungen qualitativ unabhängigen Effekt. Mathematisch-physikalisch spiegeln sich diese Verhältnisse in dem Auftreten der Größe λ in den Konstanten $\varkappa$ und σ wider; in $\varkappa = \frac{A g \varrho_0 \alpha}{\mu \lambda}$ und $\sigma = \frac{\mu \varrho_0}{\lambda}$ sind alle Materialkonstanten miteinander verkettet, und die Kleinheit von λ allein läßt keine Schlüsse über die Strömung zu.

6. Betrachtungen über andere in Frage kommende Lösungsmethoden.

Im folgenden soll kurz über Lösungsversuche berichtet werden, die nicht zum Ziel geführt haben, die aber die wesentlichen Schwierigkeiten erkennen lassen, welche die Behandlung der Differentialgleichungen unseres Typus bietet. Zunächst sei darauf aufmerksam gemacht, daß infolge des Auftretens quadratischer Glieder in den Differentialgleichungen die in der Physik bei homogenen linearen Differentialgleichungen vielfach anwendbare Methode der Separation der Variablen und der Aufstellung von partikulären Lösungen nicht mehr in Frage kommt. So bleiben im wesentlichen nur die Wege der Rekursionsmethode und des Iterationsverfahrens.

Bei quadratischen Differentialgleichungen kommen für die Rekursionsmethode als Entwicklungselemente nur solche in Betracht, deren Produkt wiederum auf dieselben Elemente führt, mithin Potenzen, Exponentialfunktionen und aus diesen beiden kombinierte Glieder, auf die wir hier kurz eingehen wollen.

1. Hinsichtlich des Ansatzes, nach Gliedern $x^m \cdot y^n$ zu entwickeln, erübrigt sich jede weitere Würdigung.

2. Eine Entwicklung nach den gemischten Gliedern $x^m \cdot e^{ny}$ bzw. $y^m \cdot e^{nx}$ liefert bei $m \geqq 0$, $n \gtreqless 0$ für die quadratische Differentialgleichung keine Rekursion, da in den Koeffizientenrelationen die zu demselben $x^m \cdot e^{ny}$ bzw. $y^m \cdot e^{nx}$ gehörigen Koeffizientenprodukte in nicht mehr endlicher Anzahl auftreten. Mit dem Ansatz eines lediglich positiven n ist keine Symmetrie hinsichtlich der y- bzw. x-Koordinate zu erzielen; um Symmetrieforderungen gerecht zu werden, hat man an Ansätze zu denken, in deren Glieder Kombinationen von e-Funktionen auftreten. Eine Entwicklung nach $x^m \cdot \mathfrak{Sin}\, n y$, $x^m \cdot \sin n y$ u. ä. für $m \geqq 0$, $n \geqq 0$ gestattet nun zwar die Darstellung symmetrischen Verhaltens, doch, ganz abgesehen von der Möglichkeit, überhaupt eine Rekursion gewinnen zu können, führt die Erfüllung der Randbedingungen auf mindestens ebensogroße Schwierigkeiten wie der Ansatz in Potenzen kartesischer Koordinaten.

3. Auch die Entwicklung nach Elementen e^{mx+ny}, $\mathfrak{Sin}(m x + n y)$, $\sin(m x + n y)$ usw. führt nicht zu günstigeren Konstellationen.

Zusammenfassend kann man sagen, daß die Möglichkeit, überhaupt zu einer Rekursion zu gelangen, sehr gering ist und daß sie, abgesehen von der Entwicklung nach $x^m \cdot y^n$, im wesentlichen nur da gegeben ist, wo physikalische Problemforderungen nicht mit den Einschränkungen vereinbar sind, unter denen man ein Rekursionssystem aufstellen kann. Auch bei den naheliegenden Ansätzen in Polarkoordinaten begegnet man denselben Schwierigkeiten.

Auch Iterationsversuche führen zu recht komplizierten Verhältnissen. Es sollte versucht werden, die Strömung in einem unendlich langen, horizontalliegenden Kreiszylinder, an dessen Oberfläche eine symmetrische Temperaturverteilung gegeben ist, ferner die Strömung in einem unendlich langen liegenden Gefäß von rechteckigem Querschnitt zu ermitteln, an dessen beiden Vertikalwänden zwei verschiedene konstante Temperaturen vorgeschrieben und dessen Horizontalwände wärmeundurchlässig sind. Zunächst kam in Betracht, eine einfache plausible Geschwindigkeitsverteilung zu suchen, welche die Randbedingungen befriedigt und die evidente Symmetrie aufwies, um dann durch Verbesserung den Forderungen der Differentialgleichungen iterativ gerecht zu werden. Solche plausible Ansätze für die Geschwindigkeit scheinen indessen nicht in einer zur tatsächlichen Durchführung von Verbesserungen geeigneten Form angebbar zu sein. So wurde dieser Weg rein mathematischer Iteration verlassen und ein anderer beschritten, den man etwa den Weg der physikalisch-iterativen Approximation nennen könnte. Es sollten zuerst Strömungen ermittelt werden, bei denen eine große Wärmeleitfähigkeit, verbunden mit großer innerer Reibung der Substanz, für eine Temperaturverteilung sorgt, welche annähernd der Gleichung $\Delta \tau = 0$ genügt, da bei diesen Strömungen der konvektive Wärmetransport wegen der Kleinheit der Geschwindigkeit vernachlässigt werden kann. Für den Fall des rechteckigen Gefäßes wurde $\tau = \tau_0 + a x$ angenommen und versucht, die Geschwindigkeitskomponenten aus der Bewegungs- und Divergenzgleichung in Anlehnung an das in der Elastizitätstheorie bekannte St. Venantsche Verfahren zu gewinnen, um dann auf Grund der errechneten Geschwindigkeit vermöge $\mu \Delta \tau - (\mathfrak{v} \operatorname{grad} \tau) = 0$ eine neue Temperaturverteilung zu ermitteln und durch Wiederholung dieser Schritte zu Annäherungen auch für Fälle nicht extremer Wärmeleitungs- und Reibungsverhältnisse zu kommen. Schon bei der ersten Approximation stellen sich indessen große Schwierigkeiten ein, zumal die Erfüllung der Randbedingungen in Analogie zur St. Venantschen Methode nicht ohne weiteres möglich ist.

Schluß.

Ehe wir an eine kurze Zusammenfassung unserer Betrachtungen gehen, haben wir noch der Frage nach der Konvergenz der Reihen zu gedenken. Der Konvergenzbeweis bietet bei dem komplizierten Rekursionssystem, das wir vor uns haben, begreiflicherweise ganz wesentliche Schwierigkeiten, und diesbezügliche Überlegungen haben zu keinem greifbaren Resultat geführt. Angesichts der vielen Freiheiten, welche die lediglich den Rekursionsgleichungen genügenden Reihen enthalten, erscheint es höchst unwahrscheinlich, den Konvergenzbeweis allgemein, unter gewissen Voraussetzungen über die Werte der freien Koeffizienten führen zu können; aber auch in speziellen Fällen, soweit sie nicht wie die im 3. Kap. 2. u. 3. behandelten eine Zusammenfassung der Reihen gestatten, ist eine Abschätzung kaum möglich. Es führt zu weit, hier über alle Versuche zu berichten, die in dieser Richtung unternommen wurden; sie führten alle zu keinem Beweis. Die physikalische Plausibilität der unter der Voraussetzung der Konvergenz gewonnenen Strömungsbilder macht es wahrscheinlich, daß die für die betrachteten Spezialfälle berechneten Reihen in einem bestimmten Bereich konvergieren, und läßt die physikalischen Konsequenzen, die wir aus den Lösungen zogen, wohl hinreichend gerechtfertigt erscheinen.

Wir fassen zusammen. Nachdem wir in dem ersten Kapitel die das Problem beherrschenden Gleichungen unter Vernachlässigung physikalisch im allgemeinen unwesentlicher Erscheinungen wie Kompressibilität, Strahlungswirkungen und nicht exakt lineares Verhalten der Wärmeausdehnung abgeleitet hatten, gingen wir auf die trägheitsfreie Strömung ein, die bei Substanzen von großer innerer Reibung und kleiner Temperaturleitfähigkeit und damit kleiner Wärmeleitfähigkeit annähernd realisiert erscheint. Wir suchten Fälle auf, bei denen eine Geschwindigkeitskomponente identisch verschwindet; bei ihnen war sogar die Möglichkeit einer Darstellung der Lösung mit Hilfe trigonometrischer und hyperbolischer Funktionen gegeben. Sodann berechneten wir Strömungen mit strömungsaktiven und strömungspassiven Wandungen, die eine übersichtliche Rekursions- und Randbedingungsrechnung gestatteten. Hierbei ergaben sich Lösungen, die es ermöglichten, jedes Strömungsbild, bei dem die Trägheit eine unwesentliche Rolle spielt, aus einem Normalströmungsbild mit Hilfe einfacher Maßstabsoperationen zu gewinnen und damit auch experimentell unzugängliche Strömungen eventuell durch Vergleich mit anderen, versuchstechnisch zugänglichen zu untersuchen. Wesentliche Einschränkungen in dieser Hinsicht stellen sich ein, wenn der Einfluß der Trägheit der strömenden Substanz nicht vernachlässigt werden kann. Die rekursive Rechnung bietet wenig neue Schwierigkeiten, indessen führt sie zu

Lösungen, die prinzipiell nicht mehr die Einführung einer Normalströmung gestatten, da die durch die Trägheit eingehende Materialkonstante

$$\sigma = \frac{\text{Temperaturleitfähigkeit} \times \text{Dichte}}{\text{Innere Reibung}}$$

die Gewinnung einer von der Substanz nur mittelbar abhängigen Reihendarstellung unmöglich macht. Ein maßstäblicher Strömungsvergleich ist hier nur bei Strömungen desselben Stoffes oder Substanzen von gleichem σ möglich.

Die Anregung zu dieser Arbeit ging von Hrn. Professor Dr. E. Madelung aus, dem ich auch an dieser Stelle für seine freundliche Unterstützung und Beratung meinen ergebensten Dank ausspreche.

(Eingegangen 26. November 1925.)

2. *Über Versuche zur Auffindung elektrodynamischer Wirkungen der Erdbewegung in großen Höhen I;*

von R. Tomaschek.

(Aus dem radiologischen Institut der Universität Heidelberg.)

Die anschauliche Vorstellung gestattet eine Deutung der bis jetzt bekannten Versuche über die Lichtgeschwindigkeit und die Elektrodynamik bewegter Medien durch die Annahme, daß der Äther, als der Träger dieser Erscheinungen, an der Erdoberfläche an den Translationsbewegungen der Erdkugel teilnimmt, im fernen Himmelsraum hingegen im Mittel als relativ zum Fixsternsystem ruhend angesehen werden kann.[1]) Es scheint bei einer derartigen Auffassung geboten, zu versuchen, ob sich die relative Bewegung dieser beiden Äthersysteme, wie sie uns in der Aberration[2]) so deutlich entgegentritt, nicht auch noch in anderen Erscheinungen beobachten läßt. Im Hinblick auf diese Fragestellung waren seinerzeit Interferenzversuche mit dem Lichte außerirdischer Lichtquellen unternommen worden.[3]) Andererseits scheint es nicht aussichtslos in größerer Entfernung von der Erdoberfläche nach solchen Einflüssen zu suchen, da ein Übergang von dem einen System in das andere bei wachsender Entfernung von der Erdoberfläche stattfinden muß, wobei möglicherweise die uns derzeit erreichbaren Höhen bereits zum Nachweis einer genügen-

---

1) Vgl. P. Lenard, Über Äther und Uräther (Verlag Hirzel).

2) P. Lenard, Ann. d. Phys. 73. S. 89. 1923; R. Tomaschek, Ann. d. Phys. 74. S. 136. 1924; Ztschr. f. Phys. 32. S. 397. 1925; P. Lenard, Astron. Nachr. 5373. Die gegen diese Auffassung (z. B. von H. Thirring) erhobenen Einwände können nicht als stichhaltig betrachtet werden, zumal ihnen sämtlich der Nachweis mangelt, daß ihre Ableitungen sich nicht auf ein bevorzugtes Koordinatensystem stützen. Es erscheint daher nicht notwendig hierauf weiter einzugehen.

3) R. Tomaschek, Ann. d. Phys. 73. S. 105. 1924.

den Wirkung ausreichen könnten.[1] In dieser Absicht wurden die im folgenden mitgeteilten Versuche unternommen.

Die Beobachtungen erfolgten in der Zeit von August bis November in verschiedenen Höhen, und zwar zunächst im radiologischen Institut der Universität Heidelberg (120 m). Als zweiter Beobachtungsort wurde die Königstuhlsternwarte gewählt (570 m), wo ein ganz freistehendes Bretterhäuschen zur Verfügung stand und wo vor allem auch das Verhalten der Apparate bei Änderung der Aufstellung geprüft werden sollte. Die Hauptversuche wurden schließlich im Laufe des Oktober am Jungfraujoch in 3457 m Höhe vorgenommen in einem etwa 5 m von einer 80 m hoch ziemlich steil ansteigenden Felswand entfernten, aus Holz gebautem Raum.

Es wurde einerseits auf eine durch eine etwaige Ätherströmung hervorgerufene, magnetische Wirkung eines geladenen, relativ zur Erdoberfläche ruhenden Kondensators und andererseits auf die in einem solchen Falle zu erwartenden Drehkraft geprüft, wobei besondere Sorgfalt darauf verwendet wurde, eine möglichst große Empfindlichkeit der Anordnungen zu erzielen.

I. Magnetisches Feld eines relativ zur Erde ruhenden Kondensators in großer Höhe.

Der eine Ladungsdichte η besitzende Kondensator würde bei einer Geschwindigkeit v relativ zum umgebenden Äther ein magnetisches Feld $4\pi\eta v$ normal zur Bewegungs- und Kraftlinienrichtung hervorrufen.[2] Einen Nachweis des magnetischen Feldes hat bereits W. C. Röntgen[3] versucht (in einer Höhe von 177 m ü. M.), ohne eine für seine Anordnung merkliche Wirkung nachweisen zu können.

---

[1] Hierauf scheinen tatsächlich die in etwa 1750 m Höhe von Herrn D. C. Miller ausgeführten Interferenzversuche zu deuten. Proc. Amer. Acad. 11. S. 306. 1925. Vgl. jedoch die Bemerkungen auf S. 755 des Vorliegenden.

[2] Über die von einem mitbewegten Beobachter hierbei feststellbaren Wirkungen, vgl. H. A. Lorentz, Elektrische und optische Erscheinungen in bewegten Körpern, 2. Auflage (1906), Teubner. Da nach der hier vertretenen Ansicht bis jetzt noch kein Versuch im Ätherstrom unternommen worden ist, andererseits alle Versuche mit tatsächlicher Relativbewegung gegen den Erdäther bisher ein positives Resultat ergeben haben, erscheint gerade die Ausführung obigen Versuches von besonderer Wichtigkeit.

[3] Wied. Ann. 35. S. 26. 1888.

Die im vorliegenden benutzte Anordnung war folgende: Der Kondensator bestand aus zwei 4 mm dicken Messingplatten, von denen die obere 18 cm, die untere 14 cm Durchmesser hatte. In die obere Platte war an ihrer Oberseite eine kreisförmige Vertiefung von 9 cm Durchmesser eingedreht, so daß die Dicke der Platte dort nur 1 mm betrug und die Magnetnadel möglichst nahe an das Kondensatorfeld gebracht werden konnte. Das astatische Magnetnadelpaar befand sich in einem zylindrischen Messinggehäuse, welches in die Vertiefung der oberen Platte eingeschraubt war. Die Länge der zylindrischen Nadeln betrug 7,92 bzw. 7,94 cm; ihr Durchmesser 0,123 cm; ihre magnetischen Momente 94,7 bzw. 98,2 CGS., ihre gegenseitige Entfernung 19,0 cm. Die Aufhängung erfolgte in kleinen Bügeln aus Aluminiumblech, die mit Schellack an einer Glaskapillare befestigt waren. Das System hing an einem 47 cm langen Kokonfaden, der im Inneren eines auf das Gehäuse aufgesetzten Messingrohres lief. Dieses besaß zur Beobachtung des Spiegels einen etwa 2 qcm großen Ausschnitt, der durch einen mit Glasplatte verschlossenen Messingtrichter elektrostatisch geschützt war. Es war auf strengste Vermeidung von Lötstellen und des Zusammentreffens verschiedener Metalle geachtet, so daß ein Wärmeschutz des oberen Messinggehäuses mittels eines zwischen Papier befindlichen Wattemantels in den meisten Fällen ausreichte. Bei Beobachtungen unter ungünstigen Temperaturbedingungen konnte über den ganzen Apparat ein Pappkasten gesetzt werden, während der Apparat unten auf einer Filzplatte, die Ausschnitte für die Füße des Apparates trug, stand. Der ganze obere Teil des Apparates, an dem auch die Füße eingeschraubt waren, war stets geerdet.

Die Astasierung erfolgte nach einigen anfänglichen Schwierigkeiten in befriedigender Weise in Erweiterung einer von Siemens angegebenen Anordnung durch einen um die äußere Wattehülle gelegten ausgeglühten Weicheisenring aus etwa 3 mm starkem Draht, dessen Enden 1 cm übereinander griffen. Durch vorsichtiges Heben und Senken des Drahtes zwischen den Magnetnadeln konnte in gewissen Grenzen die Schwingungsdauer verändert, durch Drehen des Drahtes die Ruhelage eingestellt werden. Die ganze Schwingungsdauer des astasierten

Systems variierte bei den Versuchen zwischen 30—50 Sekunden. Das Torsionsverhältnis betrug bei 27 Sek. Schwingungsdauer 0,0043.

Die Ablesung erfolgte mit Fernrohr und Skala bei einer Entfernung von 1,5—2 m.

Die Befestigung der unteren Platte erfolgte, wenn Luft als Dielektrikum benutzt wurde, durch Quarzröhrchen, welche die Schrauben, mit denen die untere Platte an der oberen hing, isolierten, oder im zweiten Falle, daß Schwefel als Dielektrikum benutzt wurde (in Form einer gegossenen Platte von 18 cm Durchmesser und 1,5 cm Dicke) durch Messingklammern, welche an der Unterseite der unteren Platte durch Hartgummischeiben isoliert waren. Die Entfernung der Kondensatorplatten betrug 2 cm mit Luft und 1,5 cm mit Schwefel als Dielektrikum. Die Isolation war im allgemeinen so gut, daß während der Dauer einer Versuchsreihe die Spannung nicht merklich abnahm. Diese wurde mit einer kleinen Influenzmaschine, unter Parallelschaltung einer großen Leydener Flasche, erzeugt und betrug 10000 bis 15000 Volt. Ihre Messung erfolgte durch ein Funkenmikrometer, indem nach Beendigung der Messung die Kugeln desselben bis zum Überspringen des Funkens genähert wurden.[1])

Zur Feststellung der Empfindlichkeit der Anordnung wurden mehrere Stromschleifen benutzt. Die später hauptsächlichst benutzte bestand aus drei parallelen je 6 cm breiten Stanniolstreifen, die über eine 2 cm dicke Glasplatte von 18 cm Durchmesser an der Ober- und Unterseite parallel geführt und aufgeklebt waren. Der Zwischenraum zwischen den Streifen betrug 1 mm. Die Zuleitungen zu dieser Scheibe und die Verbindungen der einzelnen Streifen untereinander waren so geführt, daß sich ihre magnetischen Wirkungen nach Möglichkeit kompensierten, was auch, wie Versuche mit verschiedenen Veränderungen derselben zeigten, befriedigend erreicht war. Es wurden außerdem noch andere Scheiben verschiedener Dicke ausprobiert, ebenso ein Stab von 7 cm Breite, 1,5 cm Dicke und 1 m Länge, der mit Stanniol überklebt als Stromschleife diente. Mit Hilfe dieser Scheiben, welche zwischen die Kon-

---

1) Die entsprechenden Spannungswerte wurden den Tabellen von Landolt-Börnstein, 5. Auflage entnommen, wobei der bei den Versuchen in großen Höhe verminderte Luftdruck in Betracht gezogen wurde.

densatorplatten durch dünne Glimmerplatten isoliert gebracht wurden, konnte ein der etwa vorhandenen Relativverschiebung der Ladungen gegen den umgebenden Äther äquivalenter Strom geschickt und so die Empfindlichkeit der Anordnung bestimmt werden. Die Versuche wurden in mannigfacher Weise variiert. Im Mittel ergab sich die Empfindlichkeit der Anordnung sowohl bei 1,5 als auch bei 2 cm Plattenabstand zu etwa 5 Sklt./m für eine Stromdichte von $1 \cdot 10^{-4}$ Wb/cm.1) Die Beobachtungsbedingungen an allen drei Beobachtungsorten waren so günstig, daß eine Wirkung von 0,5 Sklt. für eine Skalenentfernung von 2 m noch gut nachweisbar war, was einer Stromdichte von $5 \cdot 10^{-6}$ Wb/cm entspricht.

Die auf Grund einer etwaigen Relativbewegung zu erwartenden Effekte ergeben sich in folgender Weise. Die Stromdichte ist gleich $\eta \cdot v$ oder für die angegebenen Versuchsbedingungen genügend genau gleich $\frac{\varepsilon V}{4 \pi d} \cdot v$.2) Für die Versuche mit Luft als Dielektrikum waren die Daten $\varepsilon = 1$; $d = 2$ cm; $V = 40$ CGS., also die Stromdichte $= 5{,}3 \cdot 10^{-10} \cdot v$ Wb/cm. Es hätte demnach auf diese Weise noch eine Relativgeschwindigkeit $v = 10^4$ cm/sec $= 100$ m/sec nachgewiesen werden können.

Die Versuche mit Schwefel als Dielektrikum ergeben $\varepsilon = 3{,}6$3); $d = 1{,}5$ cm; $V = 40$ CGS., die Stromdichte also $= 2{,}55 \cdot 10^{-9} \cdot v$ Wb/cm. Es wäre also $v = 20$ m/sec noch gut merklich gewesen.

Die Beobachtungen wurden so vorgenommen, daß nach Einstellung der Magnetnadel in einer bestimmten Richtung und genügender Astasierung die Empfindlichkeit der Anordnung bestimmt wurde.4) Nach genügender Beruhigung der Magnetnadel wurde 2 Minuten hindurch alle 30 Sekunden abgelesen, dann der Kondensator etwa 30 Sekunden lang geladen, dann die Maschine abgeschaltet, während der Kondensator unter Spannung blieb, dreimal in Zwischenräumen von

---

1) 1 Weber = 1 Ampere. Vgl. **P. Lenard**, Eltechn. Ztschr. 1919. Heft 10.

2) ε = Dielektrizitätskonstante; V = Spannung; d = Plattenabstand.

3) **Landolt-Börnstein**, 5. Auflage.

4) Die Empfindlichkeitsbestimmungen wurden nicht bei jeder Reihe vorgenommen, sondern nur, wenn die Schwingungsdauer sich merklich verändert zeigte oder die Einstellung des Apparates geändert worden war.

30 Sekunden abgelesen und dann der Kondensator durch Nähern der Kugeln des Funkenmikrometers entladen. Dann wurde wieder viermal in Intervallen von 30 Sekunden abgelesen. Hierauf wurde dasselbe mit entgegengesetzter Polung wiederholt und schließlich zur Kontrolle die Schwingungsdauer des Systems bestimmt.

Die Beobachtungen ergaben an keinem der drei Beobachtungsorte einen merklichen Effekt.

Tabelle 1.

Nadelrichtung Ost-West. Empfindlichkeit: $1 \cdot 10^{-4}$ Wb/cm = 4,5 Skt/m

Zeit	Spannung Volt	Ausschlag Skt./m	Zeit	Spannung Volt	Ausschlag Skt./m
9^h 50	11,400	0,0	16^h 25	15,000	0,0
10^h 45	12,800	0,0	17^h 15	15,000	0,0
11^h 45	13,200	0,05	19^h 45	6,400	0,05
11^h 55	12,400	0,05	20^h 10	6,500	0,2
13^h 15	13,600	0,0	20^h 15	9,200	0,0
15^h 35	15,000	0,15	20^h 30	15,000	0,0

Als Beispiel sei eine Anzahl Messungen am Jungfraujoch in 3457 m Höhe angeführt (vgl. Tab. 1). Es wurden im ganzen etwa 100 Messungsreihen mit verschiedenen Richtungen der Magnetnadel und zu verschiedenen Tageszeiten an den drei Beobachtungsorten ausgeführt.

II. Versuche über das auf einen geladenen Kondensator in großen Höhen ausgeübte Drehmoment.

Bei einer Relativbewegung eines geladenen Kondensators gegen den umgebenden Äther tritt ein Drehmoment auf[1]), dessen Größe gegeben ist durch

$$K = N\left(\frac{v}{c}\right)^2 \sin^2 \lambda \sin^2 \mu,$$

wenn der Kondensator so aufgehängt ist, daß die Achse der Aufhängung in der Plattenebene liegt und die Kraftlinienrichtung senkrecht zur Achse steht. Es bedeuten N die elektrostatische Energie des Kondensators, v die Relativgeschwindigkeit gegen den Äther, c die Lichtgeschwindigkeit, λ den Winkel der Aufhängungsachse mit der Geschwindigkeit, μ den Winkel der Plattenebene mit der Geschwindigkeit. Bei vertikaler Achse ist also die Wirkung ein Maximum, wenn die Geschwindigkeit horizontal gerichtet ist und mit der Plattenebene einen Winkel von 45° einschließt.

---

[1]) Die Theorie dieses Versuches ist zuerst von **Fitzgerald** und **Larmor** entwickelt worden. Scientific Papers S. 556; **H. A. Lorentz**, Proc. Acad. Amst. **6**. S. 809. 1904; **M. v. Laue**, Ann. d. Phys. **38**. S. 370. 1912.

Die praktische Ausführung des Versuches haben zuerst Trouton und Noble unternommen.[1]) Die im vorliegenden benutzte Anordnung war im wesentlichen der von Trouton und Noble verwendeten ähnlich, zeigte jedoch eine Anzahl von Verfeinerungen, wodurch es gelang, die Empfindlichkeit auf etwa das zwanzigfache zu steigern und, was vor allem wesentlich ist, die Störungen entsprechend zu verkleinern.

Die Verbesserungen bezogen sich vor allem auf die Verwendung eines wesentlich dünneren Aufhängedrahtes, den Bau eines feineren Kondensators, die Verbesserung des elektrostatischen Schutzes desselben und den stärkeren Schutz gegen Wärmeeinflüsse der Umgebung.

Nach weniger befriedigenden Versuchen mit verschiedenen Kondensatoren wurde schließlich die Herstellung eines genügend leichten, gut isolierenden Kondensators von genügender und konstanter Kapazität in folgender Weise vorgenommen: bis zu einer Dicke von etwa 0,005 cm gespaltene Glimmerplättchen von 2,5 cm Radius wurden nach sorgfältiger Prüfung auf Durchschlagsfestigkeit mit 3000 V. und nach Abreiben derselben mit Alkohol und destilliertem Wasser, mit alkoholischer Schellacklösung überzogen und getrocknet. Hierauf wurden mit einem warmen Stempel kreisrunde mit Fortsätzen versehene Scheiben von 0,006 mm dicker Aluminiumfolie von 1,5 cm Halbmesser auf die Platten auf beiden Seiten geklebt, das Ganze nochmals mit Schellack überzogen, getrocknet und 16 derartiger Kondensatorelemente übereinander zwischen heißen Eisenplatten gepreßt und unter Druck erkalten lassen. Die Außenseite des Kondensators wurde zu etwa $^2/_3$ mit dünnster Aluminiumfolie überzogen, die mit dem geerdeten Teil des Kondensators verbunden war. Auf diese Weise gelang es einen Kondensator herzustellen, dessen Kapazität sich auch bei Belastung nicht merklich änderte und dessen Isolation so gut war, daß innerhalb der etwa 30 Minuten dauernden Beobachtungen des geladenen Kondensators bei den Versuchen, die Spannung meist nur um 10—12 Proz. sank. Seine Kapazität betrug 0,015 MF, wie durch Ladungsteilung mit einem geeichten Kondensator von 0,05 MF bestimmt wurde, ein Wert, der auch mit dem aus den Dimensionen des Kondensators zu erwartenden übereinstimmt.

---

[1]) Phil. Trans. Roy. Soc. London (A) **202.** S. 165 1904.

Der Kondensator war zum Schutze gegen elektrostatische Störungen und zur Verminderung der Wirkung der Luftströmungen umgeben, von einer Halbkugel von 3 cm Radius aus schwach versilbertem Glas und einem daraufgesetzten Kegel aus dickem Aluminiumblech, von 6 cm Höhe und 3 cm oberer Öffnung. Da sich die ziemlich schwache Versilberung des Glases noch nicht als ganz genügend erwies, wurde die Kugel innen mit dünnster Aluminiumfolie ausgekleidet. Die Aluminiumfortsätze der Kondensatorbelegungen waren oben und unten mit Kappen aus dünnstem Kupferblech festgeklemmt, an welche kurze Stücke von Kupferdraht angelötet waren. Der untere führte durch eine Öffnung der Glaskugel, die mit Schellack an ihm befestigt wurde, und trug das Spiegelchen, sowie in seiner Fortsetzung einen dünnen Platindraht, der in die zur Ableitung dienende 50prozentige Schwefelsäure tauchte. Das Gewicht der gesamten Anordnung betrug 15 g. Am oberen Ende war ein Häkchen angebracht, mittels welches der Kondensator an den Draht gehängt werden konnte. Dieser bestand aus Phosphorbronze und hatte 0,015 mm Durchmesser und 50 cm Länge.

Der obere Träger war dem von Trouton und Noble verwendeten gleich, die Isolation erfolgte durch Quarz. Das Ganze wurde von zwei Messingrohren von etwa 60 cm Länge, die oben einen Zinkring angelötet hatten, getragen. An die Grundplatte war ein kleiner Messingring auf einem etwa 5 cm hohen Dreifuß angebracht, der es gestattete, den Kondensator durch Senken zu arretieren. Die Anordnung war von zwei Zinkzylindern umgeben, welche an zwei gegenüberliegenden Seiten durch Glas verschlossene Öffnungen für die Beobachtung enthielten. Der Zwischenraum zwischen beiden Zylindern war mit Watte gefüllt, der äußere Zylinder außerdem mit einem dicken Mantel von Watte umgeben und oben mit einem beiderseits mit Watte bekleidetem Deckel versehen, durch welchen die Hochspannungsleitung mittels eines Quarzrohres isoliert durchführte. Die Anordnung war auf einer Grundplatte angebracht, die durch Stellschrauben verstellbar war, so daß es möglich war den Kondensator genau zu zentrieren, was zur Verminderung der elektrostatischen Störungen sich als sehr wesentlich erwies. Sämtliche Teile des Apparates mit Ausnahme der Aufhängevorrichtung und des Drahtes waren geerdet.

Die Ladung erfolgte mittels einer kleinen Handinfluenzmaschine, die Messung der Spannung mit einem Braunschen Elektrometer, das dauernd mit dem Kondensator verbunden und vor und nach den Versuchen geeicht worden war.

Die ganze Schwingungsdauer der Anordnung betrug 8 Minuten, die Ablesungen erfolgten mit Fernrohr und Skala.

Der Gang einer Beobachtung war folgender: Zunächst wurde etwa eine halbe Stunde lang die Schwingung des ungeladenen Kondensators beobachtet, indem jede Minute abgelesen wurde. Dann wurde der Kondensator aufgeladen und nun wiederum etwa 20—30 Minuten lang seine Schwingungen jede Minute abgelesen, dann der Kondensator entladen und wieder 20—30 Minuten lang die Schwingung des ungeladenen Kondensators beobachtet. Bei kleiner elektrostatischer Störung wurden gelegentlich auch etwas kürzere Beobachtungszeiten genommen. Nachdem alle Störungen möglichst beseitigt worden waren, zeigte der Nullpunkt noch einen schwachen Gang — wohl von elastischen Nachwirkungen des Fadens und Temperatureinflüssen herrührend — der aber leicht eliminiert werden konnte, da er während der Dauer einer Beobachtungsreihe meist konstant blieb. Die Ruhelage des geladenen Kondensators zeigte fast stets gegen die des ungeladenen eine Verschiebung, die durch die elektrostatischen Kräfte zwischen Aufhängung und Umgebung bedingt ist, und die im wesentlichen, neben den unvermeidlichen Schwankungen der Größe der jeweils angewendeten Spannung die Genauigkeit der Messungen begrenzt. Sie konnte durch die im vorhergehenden angeführten Vorkehrungen etwa auf ein Prozent des für die volle Erdbahngeschwindigkeit zu erwartenden Ablenkungseffektes herabgedrückt werden. Fig. 1 zeigt einen Abschnitt einer solchen Messungsreihe.

Ein weiteres Mittel zur Verfeinerung und Sicherung der Messungen bestand darin, die Versuche fast ununterbrochen über einen ganzen oder halben Tag auszudehnen, so daß die Änderung des Ausschlags während einer Erdumdrehung gemessen werden konnte, was noch größere Genauigkeit gestattete, da bei unveränderter Einstellung des Apparates die elektrostatischen Störungen innerhalb von ein bis zwei Tagen ziemlich konstant waren, so daß sie sich auf diese Weise zu einem Teil eliminieren lassen. Meistens wurden die Messungen in ununterbrochenen Reihen zu drei bis vier Stunden oft auch länger vorgenommen. Es wurden an den 3 Beobachtungsorten im ganzen etwa 40 Reihen mit ungefähr 10000 Beobachtungen ausgeführt.

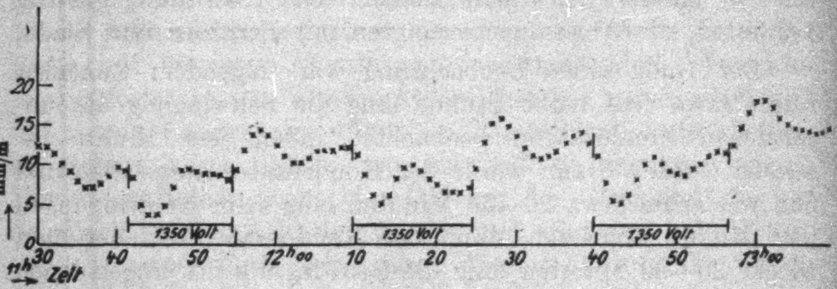


Fig. 1.

Berechnung der zu erwartenden Wirkung:

Die Bestimmung der Direktionskraft des Drahtes wurde mittels Schwingungen eines Messingzylinders von $l = 3{,}9$ cm; $2r = 0{,}60$ cm und 9,24 g Gewicht senkrecht zur Zylinderachse bestimmt. Bei 5,10 cm Drahtlänge betrug die einfach Schwingungsdauer 49,2 Sekunden. Die Direktionskraft betrug für den 50 cm langen Draht bei den Versuchen also 0,00492 CGS. Bei einer Kapazität des Kondensators von 0,015 MF, einer mittleren Spannung von 1280 Volt ergibt sich die elektrostatische Energie zu $1{,}23 \cdot 10^5$ statische Einheiten. Dies ergibt bei voller Erdbahngeschwindigkeit und günstigster Stellung des Kondensators ein Drehmoment von $1{,}23 \cdot 10^{-3}$ CGS. Dies entspricht einem Ausschlag von 547 mm an einer gerade[n] 1 m entfernten Skala.

Für eine Relativgeschwindigkeit von 3 km/sec ergeben sich 5,0 mm/m.

Für die bei der letzten Versuchsreihe angewandten Spannung von 1550 Volt ergeben sich für volle Erdbahngeschwindigkeit 900 mm/m, für 3 km/sec 7,3 mm/m.

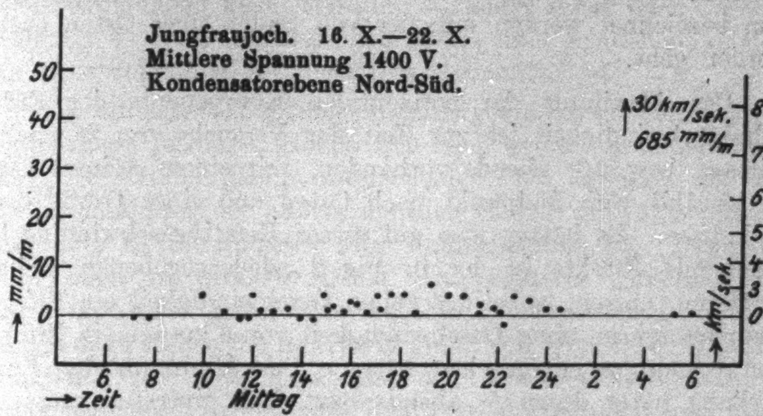


Fig. 2.

Die Versuche wurden an allen drei Beobachtungsorten über alle Tageszeiten erstreckt und in zwei verschiedenen zueinander etwa um 45⁰ verschobenen Azimuten der Kondensatorebene vorgenommen. Es zeigte sich an allen drei Beobachtungsorten keine die Fehlergrenzen überschreitende Wirkung. Es seien hier, in den Figg. 2 und 3, die wesentlichsten Ergebnisse am Jungfraujoch eingehender mitgeteilt. Die Beobachtungspunkte sind hierbei in der vorher mitgeteilten

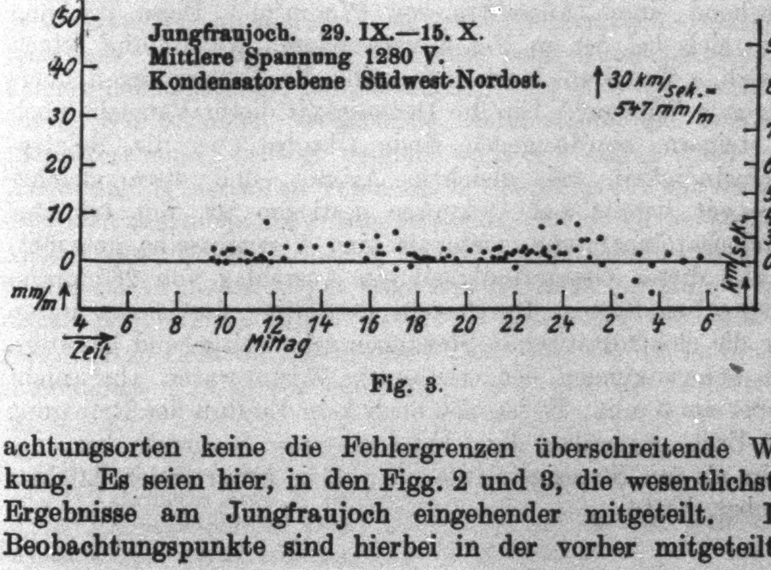


Fig. 3.

Weise jeweils um den Betrag der konstanten elektrostatischen Störung korrigiert, deren Größe für die einzelen Reihen zwischen 0 mm/m und 10 mm/m schwankte und deren Richtung bei allen Beobachtungen positiv war, wobei als positiv ein Drehungssinn bezeichnet werden soll, der von Süden über Osten nach Norden geht.

Das Maximum der horizontalen Komponente der Erdbahngeschwindigkeit ist zur Zeit der Versuche um 2^h nachmittags bzw. 10^h abends vorhanden, mit einem Azimut von 45^0 gezählt vom Südpunkt nach Osten und einer Größe von 30 km/sec. Es hätten also auf dieser Relativgeschwindigkeit beruhende Effekte in der in Fig. 2 wiedergegebenen Reihe auftreten müssen, wobei der vollen Geschwindigkeit ein Effekt von 658 mm/m, einer Geschwindigkeit von 3 km/sec ein Effekt von 6,0 mm/m entsprochen hätte. Das Minimum der Einwirkung hätte gegen 6^h abends bzw. früh eintreten müssen. Es zeigt sich in der ganzen Kurve keine Schwankung, die die Fehlergrenzen übersteigt. Es ist also sicher nicht ein Hunderstel des bei voller Relativbewegung zu erwartenden Einflusses vorhanden. Berücksichtigt man die Eigenbewegung des Sonnensystems, so hätte das Maximum der horizontalen Komponente etwa um 8^h abends eintreten müssen, mit einem Azimut von 180^0 und einer Größe von 11 km/sec, entsprechend einem Ausschlag von 67 mm/m. Diese Wirkung hätte sich bei der in Fig. 3 verwendeten Aufstellung zeigen müssen. Man sieht auch hier keine die Fehlergrenzen übersteigende Wirkung. Um die Genauigkeit dieser Versuche noch zu steigern, wurde gegen Ende Oktober, wo die Relativgeschwindigkeit bei gleichem Azimut und etwa gleicher Tageszeit bereits auf 18 km/sec gestiegen ist, mit erhöhter Kondensatorspannung nochmals eine Versuchsreihe gemacht, so daß dieser Geschwindigkeit ein Ausschlag von 265 mm/m entsprochen hätte. Durch sehr sorgfältige Justierung waren hier die elektrostatischen Störungen sehr weitgehend beseitigt. Die Schwankungen der erhaltenen Werte waren aber nicht größer als 3 mm. Es ist also auch kein Einfluß der Bewegung der Erde gegenüber dem Fixsternsystem wahrnehmbar, der mehr als ein Neunzigstel des als voll zu erwartenden Effektes ergeben hätte.

Diskussion der erhaltenen Ergebnisse.

Die im vorstehenden angeführten Ergebnisse zeigen, daß selbst in der Höhe von 3457 m unter den angewandten Versuchsbedingungen keine Wirkung — weder erster noch zweiter Ordnung — eines magnetischen Feldes eines geladenen, relativ zur Erde ruhenden Kondensators feststellbar ist.

Die einfachste Deutung dieses Ergebnisses ist die, daß die Verhältnisse in diesen Höhen sich noch kaum von denen dicht über der Erdoberfläche unterscheiden, wie es auch bei der Berücksichtigung der außerordentlich kleinen Erhebung gegenüber dem Erddurchmesser sehr wahrscheinlich ist. Demnach wäre auch in großen Höhen ein negatives Ergebnis des Michelsonschen Interferenzversuches zu erwarten. Im Widerspruch dazu stehen die in 1734 m Höhe von Hrn. D. C. Miller[1]) erhaltenen positiven Ergebnisse des Michelsonschen Interferenzversuches, welche eine Relativgeschwindigkeit von etwa 30 Proz. der Erdbahngeschwindigkeit ergeben haben. Dieser Effekt wäre mit der vorliegenden Anordnung bei weitem feststellbar gewesen, da die Genauigkeit des im vorliegenden unternommenen Versuches zweiter Ordnung, wie aus vorstehendem ersichtlich, die der Millerschen Anordnung durchaus erreicht, während der Versuch erster Ordnung (vgl. Kapitel I) noch hundertmal empfindlicher ist.[2]) Es ist von großer Wichtigkeit, zu untersuchen, ob sich die beim Interferenzversuch erhaltenen Resultate, nicht als durch bis jetzt noch nicht festgestellte Fehlerquellen bedingt, herausstellen[3]), oder sich als durch die besonderen örtlichen Verhältnisse, unter denen die Versuche ausgeführt sind, bedingt zeigen, wozu vor allem auch eine Wiederholung desselben Versuches am gleichen Ort wie im vorliegenden besonders notwendig erscheint. Falls sich der positive Ausfall des Michelsonschen Interferenzversuches bestätigt, würde das in dieser Arbeit erhaltene Ergebnis ein ganz neues, bisher vollkommen unerwartetes Verhalten der mit Materie verknüpften elektromagnetischen Felder, also der an Ladungen gebundenen Kraftlinien einerseits, und der im Lichtstrahl

---

1) Proc. Amer. Acad. 11. S. 306. 1925.

2) Vgl. hierzu Anm. 1, Seite 744.

3) Ein einwandfreies Urteil hierüber ist aus der bis jetzt noch unvollständigen Veröffentlichung nicht zu gewinnen.

vorhandenen (an in sich geschlossene Kraftlinien geknüpften) Felder andererseits, bedeuten.

Es ist mir ein Bedürfnis, allen jenen zu danken, welche das Gelingen der vorstehenden Versuche ermöglicht haben, vor allem Hrn. Geheimrat P. Lenard und Hrn. Geheimrat M. Wolf, ferner Hrn. Direktor Liechti und Hrn. Dr. A. Kölliker für mannigfache freundliche Hilfe am Jungfraujoch und besonders der *Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft*, ohne deren Hilfe die Durchführung der Versuche sehr in Frage gestellt gewesen wäre.

Heidelberg, Radiologisches Institut. 5. Nov. 1925.

(Eingegangen 9. November 1925.)

3. *Sind magnetische Momente der Atomkerne durch α-Strahl-Ablenkung nachweisbar?;*

von Walter Wessel.

Die Frage nach einem möglichen Magnetismus der Atomkerne ist einige Male aufgeworfen, aber, soviel wir sehen, niemals ausführlich diskutiert worden. Solange wir aber an dem Aufbau der höheren Kerne aus H-Kernen und Elektronen festhalten und ihn uns in einiger Analogie zu den Regeln der Atommechanik vollzogen denken, ist auch die Suche nach magnetischen Momenten der Atomkerne ohne Zweifel geboten. Wir nehmen diese Suche hiermit auf, ohne über den Ursprung und die Größe der fraglichen Momente weitere Voraussetzungen zu machen, als daß sie klein genug sind, um uns gelegentlich als Entwicklungsparameter zu dienen.

Nehmen wir an, daß ein solches Magnetfeld das gewöhnliche Vektorpotential hat, d. h. mit der dritten Potenz der Entfernung abnimmt, so können wir uns Aufschlüsse darüber nur von Eingriffen in die unmittelbare Nähe des Kernes versprechen. Als solche kommen, da die β-Strahlablenkungen doch mit zuviel Kautelen behaftet sind, in erster Reihe α-Strahlablenkungen in Betracht, über die zudem neuere und sichere Messungen vorliegen. Das Problem, wie sich deren Bild unter magnetischem Einflusse verändert, ist noch nicht behandelt, weil man bisher ohne das auskam.[1]) Schon der Elementarprozeß wurde nur unvollkommen bearbeitet. W. Hicks[2]) behandelt die Ablenkung einer bewegten Ladung im Felde eines Elementarmagneten ohne Zentralladung (Nordlichtproblem), L. Flamm[3]) das vollständige Problem, aber unter Ersatz der Hyperbelbahn in Perihelnähe durch ihre Tangente. (Diese und andere Zusammenstellungen finden sich in einem

---

[1]) M. v. Laue, Handbuch der Radiologie Bd. VI. S. 57.

[2]) W. Hicks, Proc. Roy. Soc. **90**. S. 356. 1914.

[3]) L. Flamm, Wien. Ber. **124**. S. 622. 1915.

Referate von R. Seeliger.[1]) Vollkommen unberührt und insofern interessanter als der den bekannten Methoden leicht zugängliche Elementarprozeß dürfte das *statistische* Problem der Zerstreuung eines *Bündels* von α-Strahlen durch eine *Schicht* kernmagnetischer Atome sein. Bei dem großen Interesse, das der Gegenstand für Fragen des Kern- und Atombaus hat, habe ich mich, besonders auf Anraten von Herrn Prof. Joos, der Durchrechnung dieses zwar elementaren, aber doch sehr verwickelten Problems unterzogen und behandle im folgenden die Frage:

> *Wie wird ein paralleles, schmales Bündel von α-Strahlen durch eine dünne Schicht von Atomkernen abgelenkt, d. h. welches ist die Verteilung der Szintillationshäufigkeit über einen Leuchtschirm, der die zerstreuten α-Strahlen auffängt, wenn diese Kerne ein magnetisches Moment besitzen?*

unter folgenden Voraussetzungen:

1. Einfachstreuung, d. h. jede α-Partikel kann als *einem* ablenkenden Kerne zugeordnet gelten;

2. keine Mitbewegung des Kerns; man müßte sonst überdies Voraussetzungen über seine Bindungsfestigkeit machen;

3. keine Störungen durch kernnahe Atomelektronen, weder der Ladung, noch dem Magnetfelde nach.

Diese Voraussetzungen sind die bekannten, ursprünglichen Rutherfords.

4. Die Richtungen der magnetischen Momente innerhalb der ablenkenden Folie nehmen wir als *ungeordnet* an; diese wichtige Voraussetzung hat u. a. zur Folge, daß Effekte proportional dem magnetischen Momente prinzipiell nicht beobachtbar werden.

5. Das Vektorpotential des Kernes soll das gewöhnliche eines Magnetons sein; das Moment von der Größenordnung einiger Bohrscher Magnetonen. (Das man $^1/_{2000}$ Magneton, entsprechend der „invertierten Sauerstoffmolekel“ von Lenz[2]), auf diesem Wege nicht nachweisen kann, bedarf beim Anblick der Formeln keiner Erörterung.)

---

1) L. Seeliger, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 16. S. 19. 1920.

2) A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, 3. Aufl. S. 118; s. auch 1. Aufl. S. 80.

6. Die α-Partikel sei unmagnetisch.

Wir versprechen uns von dieser Untersuchung vor allem die Einsicht, ob Momente der genannten Größenordnung nach den vorhandenen Methoden *überhaupt nachweisbar* sind; demnächst, ob sich aus dem Beobachtungsmateriale auf ihr Vorhandensein schließen läßt oder, wenn man tatsächlich „ohne sie auskommt", unterhalb welcher Grenze sie gesucht werden müssen.

Über den Gang der Untersuchung orientieren in Kürze die etwas breiter gehaltenen Paragraphenüberschriften. Wir wollen hier nur noch hervorheben, daß wir, ebenso wie die Kern*ladung* in Einheiten Z der Elementarladung $e = 4{,}77 \cdot 10^{-10}$ stat. CGS; so das Kern*moment* in Einheiten M des Bohrschen Magnetons $\mu = 9{,}218 \cdot 10^{-21}$ CGS messen.

§ 1. Der Elementarprozeß (1. Näherung): Ablenkung eines α-Teilchens durch einen Atomkern mit magnetischem Moment.

Wir gehen aus von der Lagrangeschen Funktion[1])

$$L = m_\alpha c^2 \left[1 - \sqrt{1-\beta^2}\right] - \frac{e^2 Z Z'}{r} + \frac{e Z'}{c}(\mathfrak{A}_x \dot{x} + \mathfrak{A}_y \dot{y} + \mathfrak{A}_z \dot{z})$$

(über die Bezeichnungen vgl. die Zusammenstellung nächste Seite) und gelangen, indem wir die Impulse

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}, \qquad x_k = x, y, z$$

und die Hamiltonsche Funktion

$$H = \sum_k p_k \dot{x}_k - L = W$$

einführen und die $\dot{x}_k$ durch die p_k ausdrücken, zu

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \frac{2 e Z' m_\alpha}{c} \frac{(\mathfrak{A}, \mathfrak{v})}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{e^2 Z'^2}{c^2} \mathfrak{A}^2$$
$$= m_\alpha^2 c^2 \left[\left(\frac{W - \frac{e^2 Z Z'}{r}}{m_\alpha c^2} + 1\right)^2 - 1\right].$$

Das Vektorpotential des magnetischen Dipols vom Momente $\mathfrak{m}$ ist[2])

$$\mathfrak{A} = - \left[\mathfrak{m}, \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right].$$

---

1) **M. Born**, Vorlesungen über Atommechanik, Berlin 1925. S. 238. Ebendort Näheres über die im folgenden kurz gehaltenen Umformungen.

2) **M. Abraham**, Theorie der Elektrizität, II. Bd. 3. Aufl. S. 208.

Tafel der Abkürzungen.

μ	Moment des Bohrschen Magnetons.
M	Moment des Kernes in Vielfachen von μ.
e	elektrostat. Elementarladung.
Z	Ladung des Kernes in Vielfachen von e.
m_α	Ruhmasse eines α-Teilchens.
Z'	(=2) seine Ladungszahl.

$$\sigma = \frac{\mu\, m_\alpha}{e^3 Z'\, c} = 9{,}34 \cdot 10^{-27} \left(\frac{\text{cm}}{\text{sec}}\right)^{-3}.$$

v	Anfangsgeschwindigkeit (in § 1 überhaupt Geschwindigkeit) der α-Teilchen.
p_0	Abstand der Anfangsbahn vom Kern.
c	Lichtgeschwindigkeit.

$$\beta = \frac{v}{c} \qquad \lambda = \frac{e^2 Z Z' \sqrt{1-\beta^2}}{m_\alpha v\, p_0}.$$

$\alpha_\vartheta{}^0$	Gesamtimpuls.
$\alpha_\varphi{}^0$	Impuls um die Polarachse.
i	Neigung der Bahnebene.
$\beta_\vartheta{}^0$	Perihellänge von der Knotenlinie.
$\beta_\varphi{}^0$	Knotenlänge von d. Projektion des unabgelenkten Strahls.
$\oint$	Zuwachs einer Größe über die ganze Bahn.

$$\oint d\beta_k = (\text{const}) + \mu \oint d\widetilde{\beta}_k + \mu^2 \oint d\widetilde{\widetilde{\beta}}_k + \ldots$$

$$= \ldots + \mu \widetilde{B}_k \cos i + \mu^2 \widetilde{\widetilde{B}}_k \cos^2 i + \ldots$$

Θ	Gesamtzuwachs der Perihellänge.
Φ	Gesamtzuwachs der Knotenlänge.
γ	Ablenkung eines α-Teilchens (gg. d. unabgelenkt. Strahl),
γ_0	dasselbe ohne Magnetismus.
ε	Exzentrizität der Bahn ohne Magnetismus.
H, W	Hamiltonsche Funktion, Gesamtenergie.

	relativistisch:	unrel.:
A	$2 m_\alpha W \left(1 + \frac{W}{2 m_\alpha C^2}\right)$	$m_\alpha{}^2 v^2$.
B	$m_\alpha e^2 Z Z' \left(1 + \frac{W}{m_\alpha c^2}\right)$	$m_\alpha e^2 Z Z'$.
C	$\alpha_\vartheta{}^{0\,2} - \frac{e^4 Z^2 Z'^2}{c^2}$	$\alpha_\vartheta{}^{0\,2}$
D	$2 e \mu Z' M \alpha_\varphi{}^0 / c$	

$$\varkappa = e Z' M / c$$

$$\frac{A\,C}{B^2} = \varepsilon^2 - 1\,.$$

p_ϑ, ψ_0	Koordinaten des ankommenden α-Teilchens.
s	Richtung der Anfangsbahn.
s'	Parallele zu s durch den Kern.
m	Richtung der Momentanachse.
ϑ', φ'	Positionswinkel von m gegen s'.
x, y, z rechtw. r, ϑ, φ Polar-	Koordinaten zum Kern.
$\mathfrak{A}$ $\mathfrak{A}_x\, \mathfrak{A}_y\, \mathfrak{A}_z$	Vektorpotential des Kernes.
$\vartheta_1, \varphi_1\ (= \pi)$ Anfangs- ϑ_2, φ_2 Endwerte	von ϑ, φ.
t	Zeit.
χ	∢ Radiusvektor gegen Knotenlinie.
u	mittlere Anomalie.
R	Radius der kugelförmigen Beobachtungsfläche.
γ, ψ	Breiten- u. Längengrade darin um den unabgelenkten Strahl als Pol.
I, J	Normalintegrale.
l	Dicke der ablenkenden Folie.
n	Anzahl der Kerne pro cm³ Folie.
n'	Anzahl der α-Teile pro cm² Folie.
q	Querschnitt des α-Strahlen-Bündels.
N	Verteilungsfunktion.

Wir orientieren das Koordinatensystem, indem wir die z-Achse in die Richtung des Momentes legen:

$$\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}_y = 0, \qquad \mathfrak{m}_z = |\mathfrak{m}| = \mu M.$$

In räumlichen Polarkoordinaten r, ϑ, φ, die sich zur z-Achse orientieren, ist

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{v}) = \mu M \frac{r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta}{r^3},$$

$$\mathfrak{A}^2 = \mu^2 M^2 \frac{\sin^2 \vartheta}{r^4}$$

und in den konjugierten Impulsen $p_r, p_\vartheta, p_\varphi$ die wir durch $\frac{\partial S}{\partial r}, \frac{\partial S}{\partial \vartheta}, \frac{\partial S}{\partial \varphi}$ ersetzen, lautet die Hamilton-Jakobische Differentialgleichung des Problems

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} - \frac{\mu M e Z'}{c} \frac{\sin^2 \vartheta}{r}\right)^2 \\ &\qquad + \frac{2 m_a e^2 Z Z'}{r}\left(1 + \frac{W}{m_a c^2}\right) - \frac{e^4 Z^2 Z'^2}{c^2 r^2} \\ &\qquad\qquad = 2 m_a W \left(1 + \frac{W}{2 m_a c^2}\right). \end{aligned} \right.$$

Das einfache Auftreten des magnetischen Gliedes neben $\frac{\partial S}{\partial \varphi}$ ist bemerkenswert; indessen gelang es uns nicht, ein Koordinatensystem ausfindig zu machen, in dem sich vollständige Separation hätte erreichen lassen. Wir müssen vielmehr zunächst das Glied mit $\mu^2 M^2$ abspalten; der Rest läßt sich dann separieren:

$$S = \alpha_\varphi{}^0 \varphi + \int \sqrt{\alpha_\vartheta{}^{0\,2} - \frac{\alpha_\varphi{}^{0\,2}}{\sin^2 \vartheta}}\, d\vartheta$$

$$+ \int \sqrt{A - \frac{2B}{r} - \frac{C}{r^2} + \frac{D}{r^3}}\, dr.$$

Die $\alpha_\vartheta{}^0$, $\alpha_\varphi{}^0$ sind Integrationskonstanten; A, B, C, D in die Formeltabelle aufgenommen. Indem wir die $\frac{\partial S}{\partial \alpha_k{}^0}$ neuen Konstanten $\beta_k{}^0$ gleichsetzen, erhalten wir die Zeit- und Bahngleichungen

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{ctg} i \cdot \operatorname{ctg} \vartheta &= \sin\left[\varphi - (\beta_\varphi + \beta_\varphi{}^0)\right] \\ \cos \vartheta &= \sin i \cdot \sin(\beta_\vartheta + \beta_\vartheta{}^0) \\ dt &= \frac{m_a r\, dr \left(1 + \frac{W}{m_a c^2}\right) - \frac{e^2 Z Z' dr}{c^2}}{\sqrt{g(r)}} \end{aligned} \right.$$

wobei

$$\frac{\alpha_\varphi^0}{\alpha_\vartheta^0} = \cos i \tag{3}$$

und

$$\left\{\begin{aligned} \beta_\vartheta(r) &= \qquad \alpha_\vartheta^0 \int \frac{d\,r}{r\sqrt{g(r)}} \\ \beta_\varphi(r) &= -\frac{\mu M e Z'}{c} \int \frac{d\,r}{r^2\sqrt{g(r)}} \\ g(r) &= A r^2 - 2 B r - C + \frac{D}{r} \end{aligned}\right. \tag{4}$$

gesetzt wurde.

Um die Bewegung zu beschreiben, denken wir uns β_ϑ, β_φ nach Potenzen von μ entwickelt (D ist proportional $\mu \cos i$) und so normiert, daß zu Anfang der Bewegung die Glieder mit μ verschwinden und

$$\beta_\vartheta = \frac{\pi - \gamma}{2},$$

$$\beta_\varphi = 0$$

wird. γ ist der Winkel des abgelenkten α-Strahls gegen den unabgelenkten, $\pi - \gamma$ gegen den ankommenden; $\frac{\pi - \gamma}{2}$ die Periheldistanz gegen die Einfallsrichtung; φ zählen wir von der Projektion des unabgelenkten Strahls aus; es ist also anfangs $\varphi = \pi$. Durch diese (hier belanglose) Normierung erscheint β_φ^0 als Knotenlänge, β_ϑ^0 als Perihellänge einer magnetisch nicht gestörten Hyperbel und nehmen die Bewegungsgleichungen die gewohnte Form an. Im Laufe der Bewegung sind β_ϑ^0, β_φ^0 in dieser Näherung konstant, aber die β_ϑ, β_φ nehmen stetig ab bis um den Betrag

$$\left\{\begin{aligned} \oint d\beta_\vartheta &= -(\pi - \gamma_0) + \mu \oint d\tilde{\beta}_\vartheta + \mu^2 \oint d\tilde{\tilde{\beta}}_\vartheta + \cdots = -(\pi - \gamma_0) + \\ &\qquad + \mu \tilde{B}_\vartheta \cos i + \mu^2 \tilde{\tilde{B}}_\vartheta \cos^2 i + \cdots \\ \oint d\beta_\varphi &= \qquad \mu \oint d\tilde{\beta}_\varphi + \mu^2 \oint d\tilde{\tilde{\beta}}_\varphi + \cdots = \\ &\qquad \mu \tilde{B}_\varphi \quad + \mu^2 \tilde{\tilde{B}}_\varphi \cos\, i + \cdots \end{aligned}\right. \tag{5}$$

die Integrale von $r = +\infty$ über die Nullstelle des Radikanden $g(r)$ bis wieder $r = +\infty$ erstreckt. Wir können das so auffassen, als wenn wir Bewegung in einer Hyperbel hätten mit den Parametern

$$
\begin{aligned}
\beta_\vartheta^* &= \beta_\vartheta^0 + \beta_\vartheta, \\
\beta_\varphi^* &= \beta_\varphi^0 + \beta_\varphi,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

die sich im Laufe der Zeit in ihrem zweiten Gliede veränderten. Wir benutzen weiterhin die Abkürzungen

$$
\begin{aligned}
\oint d\beta_\vartheta^* &= \Theta, \\
\oint d\beta_\varphi^* &= \Phi.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Es bleibt noch übrig, die Konstanten W, α_ϑ^0, α_φ^0 durch die Anfangsparameter der Bewegung auszudrücken. Dazu müssen wir die Anfangsrichtung des α-Strahls durch drei geeignete Bestimmungsstücke festlegen, und wir tun das, wie folgt (vgl. dazu Fig. 1): Man denke sich einen Kreiszylinder, dessen Achse (s') durch den Kern geht. Jede Anfangsbahn (s) kann man zur Erzeugenden eines solchen Zylinders machen. Der Zylinder ist charakterisiert durch seinen Radius p_0 (den Rutherfordschen Stoßparameter) und die *Neigung* ϑ_1 seiner Achse gegen die Momentanachse (m). Um die Lage der Anfangsbahn auf dem Mantel dieses Zylinders festzulegen, zählen wir noch einen *Winkel* ψ_1 *um seine Achse* und zwar vom Schnitte der Normalebene dieser Achse (*weit* schraffiert in Fig. 1) mit der φ-Ebene. — In der Figur ist noch β_φ eingetragen und ein Stück der Bahnebene eng schraffiert.

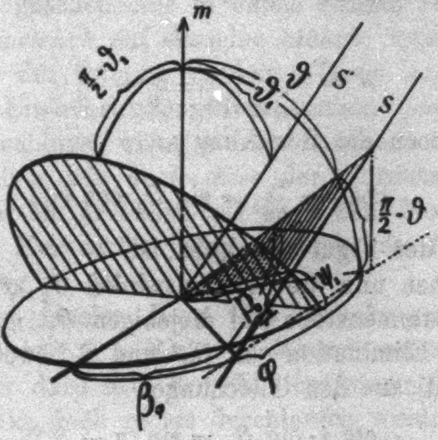


Fig. 1.

In dem Hilfswinkel δ (d. i. χ der Fig. 1, aber von der ψ-Ebene aus gezählt) schreibt sich die Gleichung der Anfangsbahn

$$\left.\begin{aligned} r\cos\delta &= p_0\,, \\ \cos\vartheta &= \cos\vartheta_1\sin\delta + \sin\vartheta_1\cos\delta\sin\psi_1 \end{aligned}\right\}$$

$$r\sin\vartheta\sin\varphi = p_0\cos\psi_1\,,$$

woraus sich leicht ableiten ($v = \dot{r}_\infty$ = Anfangsgeschwindigkeit)

$$\alpha_\varphi{}^0 = p_\varphi = \lim_{r=\infty}\frac{m_a}{\sqrt{1-\beta^2}}\,r^2\dot{\varphi}\sin^2\vartheta = \frac{m_a}{\sqrt{1-\beta^2}}\,v\,p_0\sin\vartheta_1\cos\psi_1\,,$$

$$p_\vartheta = \lim_{r=\infty}\frac{m_a}{\sqrt{1-\beta^2}}\,r^2\dot{\vartheta} = \frac{-v\,p_0\sin\psi_1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,,\qquad(\dot{\vartheta} < 0) \tag{8}$$

$$\alpha_\vartheta{}^0 = \sqrt{p_\vartheta{}^2 + \frac{\alpha_\varphi{}^{0\,2}}{\sin^2\vartheta_1}} = \frac{m_a}{\sqrt{1-\beta^2}}\,v\,p_0\,.$$

Endlich ist

$$W = m_a c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right]. \tag{9}$$

Wir merken noch die Beziehung an

$$\cos i = \frac{\alpha_\varphi{}^0}{\alpha_\vartheta{}^0} = \sin\vartheta_1\cos\psi_1\,, \tag{10}$$

die auch aus der Figur abzulesen ist. —

Wir können nun die Positionswinkel ϑ_2, φ_2 des α-Strahls *nach* dem Zusammenstoße auf diejenigen ϑ_1, ψ_1 *davor* zurückführen durch Elimination von $\beta_\vartheta{}^0$ und $\beta_\varphi{}^0$ (wobei natürlich γ mit herausfällt) aus den Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{ctg} i\cdot\operatorname{ctg}\vartheta_1 &= \sin(\pi - \beta_\varphi{}^0), \\ \cos\vartheta_1 &= \sin i\cdot\sin\left(\beta_\vartheta{}^0 + \frac{\pi-\gamma}{2}\right) \end{aligned}\right. \tag{11}$$

und

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{ctg} i\cdot\operatorname{ctg}\vartheta_2 &= \sin[\varphi_2 - (\Phi + \beta_\varphi{}^0)], \\ \cos\vartheta_2 &= \sin i\cdot\sin\left(\Theta + \beta_\vartheta{}^0 + \frac{\pi-\gamma}{2}\right) \end{aligned}\right. \tag{12}$$

mit Berücksichtigung von (10). Diese Bestimmung ist aber nur sicher in den in μ linearen Gliedern, da wir in der Hamiltonschen Gleichung das Glied mit μ^2 vernachlässigt haben. Wir werden durch die zunächst zu entwickelnde *Statistik* genötigt werden, später auch dieses Glied zu berücksichtigen.

§ 2. Statistik: Ablenkung eines Bündels von α-Strahlen durch eine Schicht magnetischer Atomkerne.

Wir haben soeben im Elementarprozeß die Bewegung auf das zur magnetischen Achse des Kerns orientierte r, ϑ, φ-System bezogen. Es mögen nun innerhalb einer Schicht oder Folie sehr viele Kerne liegen, jeder mit seinem eigenen r, ϑ, φ-System, und zwar (nach Einleitung, Voraussetzung 4) mit den Achsen regellos über alle Richtungen des Raumes verteilt und (nach Einl., Vor. 1) in solchem Abstande, daß jede α-Partikel nur *einmal* abgelenkt wird. Der α-Strahl, der selber eng begrenzt ist, durchdringt diese Schicht in einer Öffnung, die im Verhältnis zu der auf dem Beobachtungsschirme bestreuten Fläche als *punktförmig* gelten kann. In dieser Öffnung liegen immer noch sehr viele Kerne. Da sie aber, von der Beobachtungsfläche gesehen, alle in einem Punkte zusammenfallen, kommt es *geometrisch* auf dasselbe hinaus, wenn wir uns nur *einen* Kern in der Öffnung denken. Diese Anschauung läßt auch, da wir Einfachstreuung voraussetzen, *physikalisch* alles unverändert, solange wir von den magnetischen Momenten absehen. Wollen wir auch *diese* der Voraussetzung gemäß verteilt sein lassen, so haben wir noch dem Momente des gedachten, einen Kernes für jedes ankommende α-Teilchen eine andere Richtung zu geben.

Durch den idealen Kern (das *Ablenkungszentrum*) legen wir nun eine Achse s' in Richtung des ankommenden α-Strahls und orientieren dazu drei Koordinatensysteme (vgl. Fig. 2, in der sie von links nach rechts durchlaufen werden):

Das *erste*, dem ankommenden α-Teilchen eigentümliche, ist ein *Zylindersystem* mit der Achse s', Fig. 2 links; das Teilchen ist durch seinen Achsabstand p_0 und ein Azimut ψ_0 charakterisiert, das wir, die Achse horizontal gedacht, vom Zenit aus zählen;

das *zweite* ist das zur magnetischen Achse des Kernes orientierte r, ϑ, φ-System; die Lage von m werde gegen s' durch ϑ' und φ' (vom Zenit gezählt, Fig. 2 Mitte) festgelegt;

das *dritte* System liegt in der *Beobachtungsfläche* (dem Szintillationsschirm), die wir uns am besten als Stück einer Kugel mit dem Radius R um das Ablenkungszentrum denken und auf der wir Längen- und Breitenkreise um die Richtung des unabgelenkten Strahles als Pol einführen. Bei rein elektrostatischer Ablenkung wäre also die *Breite* γ (der Polarabstand, Fig. 2 rechts) gleich dem **Rutherford**schen Ablenkungswinkel, die *Länge* ψ (das Azimut, ebenda) gleich ψ_0.

Wir betrachten nun ein Stück $df = R^2 \sin\gamma\, d\psi\, d\gamma$ der Beobachtungsfläche am Orte γ, ψ. Ein α-Teilchen, das unter γ, ψ auftrifft, muß bei gegebenem ϑ', φ' des ablenkenden Kernes unter bestimmtem $p_0(\gamma, \psi, \vartheta', \varphi')$ und $\psi_0(\gamma, \psi, \vartheta', \varphi')$ eingefallen sein; dabei ist die Wahrscheinlichkeit, daß es in einen Bereich $p_0\, dp_0\, d\psi_0$ fällt, diesem Bereiche proportional. Alle Partikel, die in df vereinigt werden, müssen bei festgehaltenem ϑ', φ' einem Bereiche

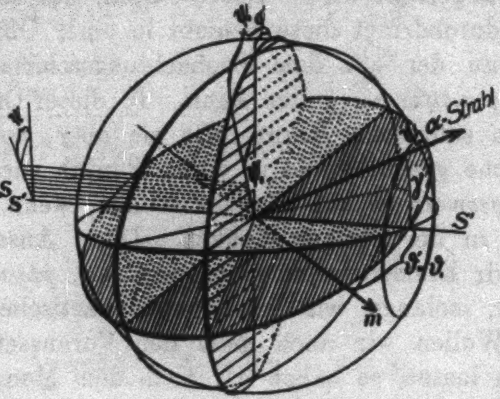


Fig. 2.

$$(13) \qquad \frac{p_0}{R^2 \sin\gamma} \begin{vmatrix} \frac{\partial p_0}{\partial \gamma} & \frac{\partial p_0}{\partial \psi} \\ \frac{\partial \psi_0}{\partial \gamma} & \frac{\partial \psi_0}{\partial \psi} \end{vmatrix} df = \Delta(\gamma, \psi, \varphi', \vartheta')\, df$$

entstammen. Wir wollen, als ob die zerstreuende Schicht ein abbildendes System im Sinne der Optik wäre, von ihrer *Eintrittsöffnung* und der *Bildfläche* reden. Auf die Flächeneinheit der Eintrittsöffnung mögen n' α-Strahlen entfallen und sie gleichmäßig bestreuen; dann entfallen $n' \Delta\, df$ auf das Flächenelement $\Delta\, df$. Dieses Element tritt so oft auf, als Momente unter ϑ', φ' da sind. Hat die Schicht die Dicke l und sitzen in der Volumeinheit $n \frac{\sin\vartheta'\, d\varphi'\, d\vartheta'}{4\pi} = n \frac{d\Omega'}{4\pi}$ magnetische Kerne unter ϑ', φ', so tritt das Element Δdf pro Einheit der Eintrittsöffnung q zu $n' l q \, d\Omega'/4\pi$ Malen auf. Da alle darauf treffenden α-Strahlen auf der Beobachtungsfläche in df vereinigt werden, gelangen dort

$$dN_{\vartheta', \varphi'} = n n' l q \cdot \Delta(\gamma, \psi, \varphi', \vartheta') \, df \, \frac{d\Omega'}{4\pi}$$

zur Zählung. Lassen wir nun ϑ' und φ' alle möglichen Werte durchlaufen, so streicht Δdf bei festem df unter Veränderung seiner Form und Größe gewisse Bereiche der Eintrittsöffnung ab und führt alle dort auftreffenden α-Strahlen dem Beobachtungselemente zu, so daß dort

$$(14) \qquad dN = \frac{n n' l q \, df}{R^2 \sin\gamma} \iint \frac{\partial(p_0, \psi_0)}{\partial(\gamma, \psi)} \, p_0 \, \frac{d\Omega'}{4\pi}$$

(über die Einheitskugel integriert) zur Beobachtung gelangen.

§ 3. Zurückführung der Ablenkungswinkel γ, ψ auf die Parameter p_0, ψ_0 vor dem Zusammenstoße.

Die mechanischen Gleichungen (11), (12) am Schlusse des § 1 leisteten die Zurückführung der Positionswinkel ϑ_2, φ_2 des α-Strahls *nach* dem Zusammenstoße auf diejenigen ϑ_1, φ_1 *davor* innerhalb des dem Magneton eigentümlichen Systems. Wir wollen statt ϑ_2, φ_2 zunächst innerhalb desselben Systems die Distanz γ gegen den unabgelenkten Strahl und das zugehörige, ebenso wie ψ_1 gezählte Azimut ψ_2 einführen (Fig. 3). Für γ gilt einfach

$$(15) \quad \cos(\pi - \gamma) = \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos\varphi_2 .$$

Wenn wir ferner den den beiden schraffierten Kugeldreiecken der Fig. 3 gemeinsamen Winkel, der etwa ω heiße, einmal durch $\frac{\pi}{2} - \vartheta_1, \vartheta_2; \varphi_2$ (oberes Dreieck), ein andermal durch $\frac{\pi}{2} - \psi_2, \frac{\pi}{2} - \gamma; \frac{\pi}{2}$ (unteres Dreieck) ausdrücken, bekommen wir unmittelbar $\cos\omega =$

$$(15') \quad \sin\psi_2 \sin\gamma = \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2 + \cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos\varphi_2 .$$

Danach orientieren wir das ganze System gegen den α-Strahl nach Fig. 2. Die Magnetonenachse m liege etwa anfangs in der Richtung s' des unabgelenkten Strahls. Die beiden stehenden und die beiden liegenden Ebenen fallen dann zusammen. Man drehe nun m in der Horizontalebene um ϑ';

dabei dreht sich die *weit* schraffierte Ebene um die Zenitachse; danach neige man die Horizontalebene um φ', sie geht dabei in die *eng* schraffierte über. Aus dem Vergleiche mit Fig. 1 bzw. Fig. 3, deren Ebenen den beiden aufrechten der Fig. 2 entsprechen, ergibt sich dann anschaulich, da die weit schraffierte Ebene jeweils die zum ankommenden Strahle senkrechte ist,

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \psi_0 - \varphi', \\ \psi_2 &= \psi - \varphi', \\ \vartheta_1 &= \vartheta' \end{aligned} \tag{16}$$

und der Winkel γ der Fig. 3 ist mit dem der Fig. 2 identisch.

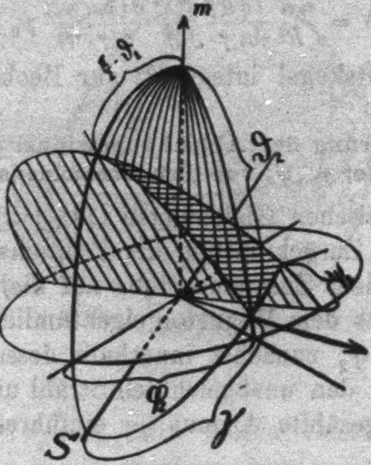


Fig. 3.

Man kann nun ψ nach (15′) und (16) und γ nach (15) auf $\vartheta_2, \varphi_2, \varphi'$ zurückführen, danach ϑ_2, φ_2 mit Hilfe der mechanischen Gleichungen (10), (11) und (12) auf ϑ_1, ψ_1, p_0 und endlich ϑ_1, ψ_1 nach (16) auf $\vartheta', \psi_0, \varphi'$. Man hat dabei von zahlreichen Winkelbeziehungen Gebrauch zu machen, die sich aus Fig. 1 ableiten lassen. Sei kurz σ der Winkel $\beta_\vartheta{}^0 + \frac{\pi - \gamma}{2}$ zwischen Knotenlinie und Einfallsrichtung des α Strahles und τ gleich $\beta_\varphi{}^0$; dann lauten sie u. a.

$$\left\{ \begin{aligned} &\sin\sigma \sin\tau - \cos\sigma \cos\tau \cos i = \cos\psi_1, \\ &\cos\sigma \sin\tau + \sin\sigma \cos\tau \cos i = 0, \\ &\sin\sigma \cos\tau + \cos\sigma \sin\tau \cos i = \cos\vartheta_1 \sin\psi_1, \\ &\cos\sigma \cos\tau - \sin\sigma \sin\tau \cos i = -\sin\vartheta_1. \end{aligned} \right. \tag{17}$$

Mit ihrer Hilfe gewinnt man ohne Mühe

$$(18)\quad \begin{cases} \cos\gamma = \sin\Theta\sin\vartheta'(\sin\Phi\cos(\psi_0-\varphi') \\ \qquad\qquad + \cos\vartheta'\sin(\psi_0-\varphi')[1-\cos\Phi]) \\ \qquad - \cos\Theta(\cos^2\vartheta' + \cos\Phi\sin^2\vartheta'), \\ \sin(\psi-\varphi')\sin\gamma = \sin\Theta\sin\Phi\cos\vartheta'\cos(\psi_0-\varphi') \\ \qquad\qquad + \cos\Theta\sin\vartheta'\cos\vartheta'(1-\cos\Phi) \\ \qquad - \sin\Theta\sin(\psi_0-\varphi')(\sin^2\vartheta' + \cos\Phi\cos^2\vartheta'), \end{cases}$$

und mit diesen Formeln ist, da Θ und Φ Funktionen von p_0 sind, die in der Überschrift dieses Paragraphen in Aussicht gestellte Transformation geleistet.

§ 4. Mittelung über die Lagen der Momentenachsen. 1. Näherung: kein Effekt.

Um die Verteilungsfunktion dN nach (14) und dazu die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(p_0, \psi_0)}{\partial(\gamma, \psi)}$ zu bilden, müssen wir die eben abgeleiteten Gleichungen nach p_0 und ψ_0 auflösen. Wir führen zuvor an Stelle von p_0 den Winkel γ_0 der rein elektrostatischen Ablenkung als Variable ein. Bei verschwindendem Momente μ wird nach (7), (6) und (5)

$$\Phi = 0$$

und nach den Formeln (18), wenn wir dort $\Phi = 0$, $\Theta = \Theta_0$, $\gamma = \gamma_0$ eintragen:

$$\gamma_0 = \pi + \Theta_0,$$
$$\psi = \psi_0.$$

Die Größe Θ_0, das erste Entwicklungsglied von $\oint d\beta_\vartheta$, nach (5) und (4) gebildet, wird

$$(19)\qquad \Theta_0 = -(\pi - \gamma_0) = -\frac{2\alpha_\vartheta^0}{\sqrt{C}} \operatorname{arc\,tang} \frac{\sqrt{AC}}{B}$$

und damit nach den aus der Tabelle zu entnehmenden Werten von α_ϑ^0, A, B, C

$$\operatorname{tang}\frac{\pi-\gamma_0}{2}\sqrt{1-\lambda^2} = \frac{m_a v^2 p_0}{e^2 Z Z'} \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$\lambda = \frac{e^2 Z Z' \sqrt{1-\beta^2}}{m_a v p_0 c}, \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

oder auch

$$\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \operatorname{tang}\frac{\pi-\gamma_0}{2}\sqrt{1-\lambda^2} = \frac{\beta}{\lambda}.$$

Wir führen diese Formeln so weitläufig an, um den Einfluß der relativistischen Massenveränderlichkeit dem weiter unten abzuleitenden, magnetischen Effekte einigermaßen gegenüberzustellen: für den größten beobachteten Ablenkungswinkel $\gamma_0 = 150^\circ$ ist nämlich

$$\frac{\beta}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \operatorname{tang} 0{,}26 \cdot \sqrt{1-\lambda^2} \sim 0{,}26,$$

also λ von der Größenordnung 4β, d. i. $^4/_{20}$, $\lambda^2 = {}^1/_{25} = 4\,{}^0/_0$, und das ist ein *Maximalwert*, da kleineren Winkeln γ_0 größere p_0 entsprechen. Wir *vernachlässigen* daher für den Rest dieser Abhandlung, indem wir uns ausdrücklich auf α-Strahlen beschränken, die Relativitätskorrektion und benutzen die dann sich ergebende, bekannte Formel[1])

$$\operatorname{ctg} \frac{\gamma_0}{2} = \frac{m_\alpha v^2 p_0}{e^2 Z Z'}, \tag{20}$$

um γ_0 statt p_0 als Variable einzuführen. Weiter unten wird es noch bequemer sein, von γ_0 zu der *Exzentrizität* ε der ungestörten Hyperbel überzugehen, die mit dem Asymptotenwinkel $\pi - \gamma_0$ nach

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{\pi - \gamma_0}{2}} = \operatorname{cosec} \frac{\gamma_0}{2} \tag{21}$$

zusammenhängt.

Nun können wir $\frac{\partial p_0}{\partial \gamma}$, $\frac{\partial p_0}{\partial \psi}$ durch $\frac{d p_0}{d \gamma_0} \frac{\partial \gamma_0}{\partial \gamma}$, $\frac{d p_0}{d \gamma_0} \frac{\partial \gamma_0}{\partial \psi}$ ausdrücken und setzen

$$\tag{22} \left\{ \begin{aligned} d N = \frac{n n' l q e^4 Z^2 Z'^2 d f}{4 R^2 m_\alpha^2 v^4 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(- \frac{\cos \frac{\gamma_0}{2}}{\sin^3 \frac{\gamma_0}{2}} \right) \Big[\frac{\partial \gamma_0}{\partial \gamma} \frac{\partial \psi_0}{\partial \psi} \\ - \frac{\partial \psi_0}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma_0}{\partial \psi} \Big] \frac{\sin \vartheta' \, d \varphi' \, d \vartheta'}{4\pi}. \end{aligned} \right.$$

Im unmagnetischen Falle, d. i. $\gamma_0 = \gamma$, $\psi_0 = \psi$ unabhängig von ϑ', φ', geht diese Formel in eine ebenfalls bekannte Rutherfords[2]) über.

Wir lösen nun (18) nach γ_0 und ψ_0 auf, indem wir, wie schon unter (5) angedeutet, Θ und Φ nach Potenzen von μ entwickeln:

---

1) E. Rutherford, Handbuch der Radiologie, Bd. II, S. 144; s. a. M. v. Laue, ebenda, Bd. VI, S. 61.

2) ebenda Bd. II. S. 144.

$$
\left\{
\begin{aligned}
\Theta &= -(\pi - \gamma_0) + \mu \widetilde{B}_\vartheta \sin\vartheta' \cos(\psi_0 - \varphi') + \cdots,\\
\Phi &= \mu \widetilde{B}_\varphi + \cdots,
\end{aligned}
\right.
\tag{23}
$$

wobei denn

$$
\left\{
\begin{aligned}
\widetilde{B}_\vartheta &= -\varkappa \alpha_\vartheta^{0\,2} \oint \frac{dr}{r^2(Ar^2 - 2Br - C)^{3/2}},\\
\widetilde{B}_\varphi &= -\varkappa \oint \frac{dr}{r^2(Ar^2 - 2Br - C)^{1/2}},
\end{aligned}
\right.
\tag{24}
$$

$$
\varkappa = \frac{e\,Z'\,M}{c}
\tag{25}
$$

und ebenso γ_0 und ψ_0 als Potenzreihen in μ mit unbestimmten Koeffizienten ansetzen:

$$
\begin{aligned}
\gamma_0 &= \gamma + \mu\widetilde{\gamma} + \cdots,\\
\psi_0 &= \psi + \mu\widetilde{\psi} + \cdots
\end{aligned}
$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir dann

$$
\left\{
\begin{aligned}
\gamma_0 &= \gamma - \mu(\widetilde{B}_\vartheta + \widetilde{B}_\varphi) \sin\vartheta' \cos(\psi - \varphi') + \text{Glieder mit } \mu^2\\
\psi_0 &= \psi + \mu \widetilde{B}_\varphi (\cos\vartheta' + \operatorname{ctg}\gamma \sin\vartheta' \sin(\psi - \varphi')) + \text{Glieder mit } \mu^2.
\end{aligned}
\right.
\tag{26}
$$

Bei der Bildung von dN nach (22) mitteln sich nun alle mit μ proportionalen Glieder heraus. Wir erhalten damit als erste, *negative* Antwort auf die in dieser Arbeit gestellte Frage:

Bei regelloser, räumlicher Verteilung der Momentanachsen in der zerstreuenden Schicht sind Zusatzeffekte in der Streuung, die dem magnetischen Momente proportional wären, prinzipiell nicht beobachtbar.

§ 5. Variation der Konstanten.

Wir erstrecken das Näherungsverfahren des vorigen Paragraphen nun auch auf Glieder mit μ^2, indem wir ansetzen

$$
\left\{
\begin{aligned}
\Theta &= -(\pi - \gamma_0) + \mu \widetilde{B}_\vartheta \sin\vartheta' \cos(\psi_0 - \varphi')\\
&\qquad + \mu^2 \widetilde{\widetilde{B}}_\vartheta{}^* \sin^2\vartheta' \cos^2(\psi_0 - \varphi') + \ldots,\\
\Phi &= \mu \widetilde{B}_\varphi\\
&\qquad + \mu^2 \widetilde{\widetilde{B}}_\varphi{}^* \sin\vartheta' \cos(\psi_0 - \varphi') + \ldots
\end{aligned}
\right.
\tag{27}
$$

Dabei sind die $\widetilde{\widetilde{B}}_k{}^*$ die konstanten Anteile der $\oint d\widetilde{\widetilde{\beta}}_\vartheta$, $\oint d\widetilde{\widetilde{\beta}}_\varphi$ der Formeln (5), zuzüglich Gliedern, die von der in § 1 vernachlässigten Störungsfunktion

$$H' = \frac{\mu^2 \varkappa^2}{2 m_a} \frac{\sin^2 \vartheta}{r^4} \tag{28}$$

herrühren. Wir hatten schon dort den Einfluß des magnetischen Feldes so aufgefaßt, als ob sich darunter die Perihellänge β_ϑ^* und die Knotenlänge β_φ^* einer gewöhnlichen Hyperbel veränderten; dabei setzten sich aber nach (6) die β_k^* aus einem konstanten Anteile β_k^0 und einem veränderlichen β_k zusammen. In zweiter Näherung wird nun auch der früher konstante Term β_k^0 variabel, denn die β_k^0, α_k^0 genügen bekanntlich als Konjugierte den kanonischen Gleichungen

$$\frac{d\beta_k^0}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \alpha_k^0}, \qquad \frac{d\alpha_k^0}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \beta_k^0}$$

und die rechte Seite verschwindet im allgemeinen nur bis auf die Ableitungen von H'. Es genügt in der beabsichtigten Näherung, H' in den Variablen der reinen Hyperbelbewegung auszudrücken, die bei Einführung des von der Knotenlinie gezählten Winkels χ in der Bahnebene (Fig. 1) und der mittleren Anomalie u die bekannte Gestalt

$$\left\{\begin{aligned} \cos\vartheta &= \sin i \cdot \sin\chi, \\ \frac{1}{r} &= \frac{B}{C}(\varepsilon\cos(\chi - \beta_\vartheta^0) - 1), \\ r &= \frac{B}{A}(1 + \varepsilon\,\mathfrak{Cos}\,u), \\ \frac{dt}{du} &= \frac{B m_a}{A^{3/2}}(1 + \varepsilon\,\mathfrak{Cos}\,u) = \frac{m_a}{\sqrt{A}} r \end{aligned}\right. \tag{29}$$

annehmen. Man führt am besten vermöge

$$\frac{du}{d\chi} = \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{\varepsilon\cos(\chi - \beta_\vartheta^0) - 1} = \frac{B}{C}\sqrt{\varepsilon^2 - 1} \cdot r \tag{30}$$

den Winkel χ statt der Zeit t ein; dann ist

$$\frac{d\beta_k^0}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial \alpha_k^0}$$

oder

$$\frac{d\beta_k^0}{d\chi} = \frac{\mu^2 \varkappa^2 B^4}{2 m_a} \frac{dt}{du} \frac{du}{d\chi}$$
$$\cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_k^0}(1 - \sin^2 i \cdot \sin^2\chi)(\varepsilon\cos(\chi - \beta_\vartheta^0) - 1)^4 (\alpha_\vartheta^0)^{-8}$$

und eine entsprechende Gleichung gilt für $\frac{d\alpha_k^0}{dt}$.

Bei der Differentiation benutze man

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \alpha_\vartheta{}^0} = \frac{\partial}{\partial \alpha_\vartheta{}^0} + \frac{d\varepsilon}{d\alpha_\vartheta{}^0}\cdot\frac{\partial}{\partial\varepsilon}, \qquad \frac{d\varepsilon}{d\alpha_\vartheta{}^0} = \frac{\varepsilon^2-1}{\varepsilon\,\alpha_\vartheta{}^0},\\ &\frac{\partial \sin^2 i}{\partial \alpha_\vartheta{}^0} = \frac{2}{\alpha_\vartheta{}^0}\cos^2 i,\\ &\frac{\partial \sin^2 i}{\partial \alpha_\varphi{}^0} = -\frac{2}{\alpha_\vartheta{}^0}\cos i,\end{aligned}\right.$$

so erhält man am kürzesten

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\beta_\varphi{}^0}{d\chi} = \frac{\mu^2\varkappa^2}{\alpha_\vartheta{}^{0\,2}}\,\frac{B^2}{C^2}\cdot\sin^2\chi\cos i\,(\varepsilon\cos(\chi-\beta_\vartheta{}^0)-1)^2,\\ &\frac{d\beta_\vartheta{}^0}{d\chi} = -\frac{\mu^2\varkappa^2}{\alpha_\vartheta{}^{0\,2}}\,\frac{B^2}{C^2}\,(\varepsilon\cos(\chi-\beta_\vartheta{}^0)-1)\,[\quad]\\ &[\quad] = \sin^2\chi\cos^2 i\,(\varepsilon\cos(\chi-\beta_\vartheta{}^0)-1)\\ &\qquad + 4(1-\sin^2 i\sin^2\chi)\left(\frac{\varepsilon^2+1}{2\varepsilon}\cos(\chi-\beta_\vartheta{}^0)-1\right).\end{aligned}\right.$$

Zur Auflösung dieser Gleichungen genügt es in dieser Näherung, die $\beta_k{}^0$ rechter Hand konstant zu halten und den Zuwachs durch Quadratur nach χ zu berechnen. Bei der Bildung dieser Zuwächse $\oint d\beta_\vartheta{}^0$, $\oint d\beta_\varphi{}^0$ läuft die Variable χ naturgemäß von $\beta_\vartheta{}^0 + \arccos\frac{1}{\varepsilon}$, d. i. nach (21) $\beta_\vartheta{}^0 + \frac{\pi-\gamma}{2}$, bis $\beta_\vartheta{}^0 - \arccos\frac{1}{\varepsilon}$. Führt man

$$\varepsilon\cos(\chi-\beta_\vartheta{}^0) = y$$

als neue Variable ein, so nehmen jene Integrale, wie sich unschwer übersehen läßt, die Form an

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} &\oint d\beta_\vartheta{}^0 = \mu^2[\widetilde{\widetilde{\widetilde{B}}}_\vartheta{}^{(0)} + \widetilde{\widetilde{\widetilde{B}}}_\vartheta{}^{(1)}\sin^2\beta_\vartheta{}^0\sin^2 i + \widetilde{\widetilde{\widetilde{B}}}_\vartheta{}^{(2)}\cos^2\beta_\vartheta{}^0\sin^2 i\\ &\qquad + \widetilde{\widetilde{\widetilde{B}}}_\vartheta{}^{(3)}\sin^2\beta_\vartheta{}^0\cos^2 i + \widetilde{\widetilde{\widetilde{B}}}_\vartheta{}^{(4)}\cos^2\beta_\vartheta{}^0\cos^2 i],\\ &\oint d\beta_\varphi{}^0 = \mu^2[\\ &\qquad - \widetilde{\widetilde{\widetilde{B}}}_\vartheta{}^{(3)}\sin^2\beta_\vartheta{}^0\cos i - \widetilde{\widetilde{\widetilde{B}}}_\vartheta{}^{(4)}\cos^2\beta_\vartheta{}^0\cos i],\end{aligned}\right.$$

worin die $\widetilde{\widetilde{\widetilde{B}}}_\vartheta{}^{(0)}$, $\widetilde{\widetilde{\widetilde{B}}}_\vartheta{}^{(1)}\ldots$ gewisse bestimmte Integrale bedeuten. Es genügt, davon

$$(34)\quad \widetilde{\widetilde{\widetilde{B}}}_\vartheta{}^{(0)} = \frac{\varkappa^2}{\alpha_\vartheta{}^{0\,2}}\,\frac{B^2}{C^2}\oint 4(y-1)\left(\frac{\varepsilon^2+1}{2\varepsilon^2}y-1\right)\frac{dy}{\sqrt{\varepsilon^2-y^2}}$$

und die Beziehung

$$\overset{\approx}{B}_\vartheta^{(0)} + \overset{\approx}{B}_\vartheta^{(1)} + \overset{\approx}{B}_\vartheta^{(2)} = 0 \tag{35}$$

anzumerken.

Die entsprechenden Integrale $\oint d\alpha_\vartheta^0$, $\oint d\alpha_\varphi^0$ verschwinden, weil sich $\dot{\alpha}_\vartheta^0$ als Differentialquotient nach β_ϑ^0 einer geraden Funktion von $\chi - \beta_\vartheta^0$ darstellt und $\dot{\alpha}_\varphi^0$ überhaupt verschwindet; d. h. die im bekannten Sinne „oskulierende" Hyperbel[1]) verändert zwar im Laufe der Bewegung ihre Exzentrizität, nimmt aber am Schlusse die anfängliche wieder an, da ja das Kraftfeld in beiden Fällen dasselbe ist, und der Impuls um die Polarachse ist konstant.

§ 6. Mittelung über die Lagen der Momentanachsen, 2. Näherung. Die Verteilungsfunktion.

Nach dieser Vorbereitung können wir die Verteilungsfunktion in zweiter Näherung berechnen. Wir tragen dazu die Entwicklung (27) der Θ, Φ in die erste der Transformationsgleichungen (18) ein, ersetzen auch γ_0 durch

$$\gamma_0 = \gamma + \mu\widetilde{\gamma} + \mu^2\overset{\approx}{\gamma} + \cdots$$

und entwickeln alles nach Potenzen von μ; die $\Theta . \Phi$ als Funktionen von γ_0 in Taylorsche Reihen. Durch Koeffizientenvergleich entspringt ein Ausdruck für γ_0, in dem wir noch ψ_0 durch (26) zu ersetzen haben. Die vollständige Formel, in der $\widetilde{B}_\vartheta'$, $\widetilde{B}_\varphi'$ die Ableitungen der $\widetilde{B}_\vartheta$, $\widetilde{B}_\varphi$ nach γ bezeichnen, lautet:

$$\left|\begin{aligned} \gamma_0 = \gamma &- \mu(\widetilde{B}_\vartheta + \widetilde{B}_\varphi)\sin\vartheta'\cos(\psi - \varphi') \\ &+ \mu^2\left\{\left[\widetilde{B}_\varphi(\widetilde{B}_\vartheta + \widetilde{B}_\varphi) + \frac{(\widetilde{B}_\varphi)^2}{2}\right]\sin\vartheta'\cos\vartheta'\sin(\psi - \varphi')\right. \\ &+ \left[\widetilde{B}_\varphi(\widetilde{B}_\vartheta + \widetilde{B}_\varphi) - \frac{(\widetilde{B}_\varphi)^2}{2}\right]\operatorname{ctg}\gamma\sin^2\vartheta'\sin^2(\psi - \varphi') \\ &+ [(\widetilde{B}_\vartheta + \widetilde{B}_\varphi)(\widetilde{B}_\vartheta' + \widetilde{B}_\varphi') \\ &\qquad \left. - (\overset{\approx}{B}_\vartheta^* + \overset{\approx}{B}_\varphi^*)]\sin^2\vartheta'\cos^2(\psi - \varphi')\right\}. \end{aligned}\right. \tag{36}$$

---

[1]) Vgl. z. B. Müller-Prange, Allgemeine Mechanik, Hannover 1923, S. 293.

Dagegen brauchen von ψ_0 die Koeffizienten von μ^2 *nicht* berechnet zu werden; es genügt vielmehr, zu wissen, daß ψ_0 von der Gestalt ist

$$(36') \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_0 = \psi + \mu \widetilde{B}_\varphi (\cos\vartheta' + \operatorname{ctg}\gamma \sin\vartheta' \sin(\psi - \varphi')) \\ + \mu^2 \cdot [\text{periodische Funktion von } (\psi - \varphi')], \end{aligned} \right.$$

wie man bei der Bildung der Verteilungsfunktion sehr leicht einsehen wird.

Die Konstanten $\tilde{\tilde{\tilde{B}}}_\vartheta{}^*$ und $\tilde{\tilde{\tilde{B}}}_\varphi{}^*$, die neu hinzukommen, treten nur in der Verbindung $(\tilde{\tilde{\tilde{B}}}_\vartheta{}^* + \tilde{\tilde{\tilde{B}}}_\varphi{}^*) \sin^2\vartheta' \cos^2(\psi - \varphi')$ auf. Nach (27), (7), (6) und (5) ist darunter zu verstehen

$$\mu^2 \tilde{\tilde{\tilde{B}}}_\vartheta{}^* \sin^2\vartheta' \cos^2(\psi - \varphi') = \oint d\beta_\vartheta{}^0 + \mu^2 \oint d\tilde{\tilde{\tilde{\beta}}}_\vartheta,$$

$$\mu^2 \tilde{\tilde{\tilde{B}}}_\varphi{}^* \sin\vartheta' \cos(\psi - \varphi') = \oint d\beta_\varphi{}^0 + \mu^2 \oint d\tilde{\tilde{\tilde{\beta}}}_\varphi,$$

d. i. wegen $\sin\vartheta' \cos(\psi - \varphi') = \cos i$ nach (33) und (5)

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} (\tilde{\tilde{\tilde{B}}}_\vartheta{}^* + \tilde{\tilde{\tilde{B}}}_\varphi{}^*) \sin^2\vartheta' \cos^2(\psi - \varphi') = \tilde{\tilde{\tilde{B}}}_\vartheta{}^{(0)} \\ + \tilde{\tilde{\tilde{B}}}_\vartheta{}^{(1)} \sin^2\beta_\vartheta{}^0 \sin^2 i + \tilde{\tilde{\tilde{B}}}_\vartheta{}^{(2)} \cos^2\beta_\vartheta{}^0 \sin^2 i \\ + (\tilde{\tilde{\tilde{B}}}_\vartheta + \tilde{\tilde{\tilde{B}}}_\varphi) \cos^2 i, \end{aligned} \right.$$

unter den $\tilde{\tilde{\tilde{B}}}_\vartheta$, $\tilde{\tilde{\tilde{B}}}_\varphi$ nach (5) die konstanten (winkelunabhängigen) Anteile der $\oint d\tilde{\tilde{\tilde{\beta}}}_\vartheta$, $\oint d\tilde{\tilde{\tilde{\beta}}}_\varphi$ verstanden:

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} \tilde{\tilde{\tilde{B}}}_\vartheta &= \frac{3}{2} \varkappa^2 \alpha_\vartheta{}^{0\,3} \oint \frac{dr}{r^3 (A r^2 - 2 B r - C)^{5/2}}, \\ \tilde{\tilde{\tilde{B}}}_\varphi &= \varkappa^2 \alpha_\vartheta{}^0 \oint \frac{dr}{r^3 (A r^2 - 2 B r - C)^{3/2}}. \end{aligned} \right.$$

Für die Winkelfunktionen gilt nach Fig. 1:

$$\sin i \sin\beta_\vartheta{}^0 = \cos\vartheta' \sin\frac{\gamma}{2} + \sin\vartheta' \cos\frac{\gamma}{2} \sin(\psi - \varphi'),$$

$$\sin i \cos\beta_\vartheta{}^0 = \cos\vartheta' \cos\frac{\gamma}{2} - \sin\vartheta' \sin\frac{\gamma}{2} \sin(\psi - \varphi'),$$

und das letzte Glied (37) von γ^0 wird damit

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} &(\overset{\approx}{B}_\vartheta{}^* + \overset{\approx}{B}_\varphi{}^*)\sin^2\vartheta'\cos^2(\psi-\varphi') = \\ &\qquad = (\overset{\approx}{B}_\vartheta + \overset{\approx}{B}_\varphi)\sin^2\vartheta'\cos^2(\psi-\varphi') + \overset{\approx}{B}_\vartheta{}^{(0)} \\ &\qquad + \left(\overset{\approx}{B}_\vartheta{}^{(1)}\sin^2\frac{\gamma}{2} + \overset{\approx}{B}_\vartheta{}^{(2)}\cos^2\frac{\gamma}{2}\right)\cos^2\vartheta' \\ &\qquad + \left(\overset{\approx}{B}_\vartheta{}^{(1)}\cos^2\frac{\gamma}{2} + \overset{\approx}{B}_\vartheta{}^{(2)}\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)\sin^2\vartheta'\sin^2(\psi-\varphi') \\ &\qquad + 2(\overset{\approx}{B}_\vartheta{}^{(1)} - \overset{\approx}{B}_\vartheta{}^{(2)})\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\sin\vartheta'\cos\vartheta'\sin(\psi-\varphi'). \end{aligned}\right.$$

Wir können nun dN nach (22) ausrechnen. Bei der Bildung der Determinante $\frac{\partial(\gamma_0,\ \psi_0)}{\partial(\gamma,\ \psi)}$ tritt nach (36′) das Glied

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi_0}{\partial\psi} &= 1 + \mu\widetilde{B}_\varphi \operatorname{ctg}\gamma\sin\vartheta'\cos(\psi-\varphi') \\ &\qquad + \mu^2\frac{d}{d\psi}[\text{periodische Funktion von } (\psi-\varphi')] \end{aligned}$$

auf: das Glied mit μ^2 *verschwindet*, nach φ' gemittelt, weshalb wir es oben nicht auszurechnen brauchten. Ferner brauchen von $\frac{\partial\psi_0}{\partial\gamma}$, $\frac{\partial\gamma_0}{\partial\psi}$ die Glieder mit μ^2 nicht aufgeschrieben zu werden, da sie nur mit μ^2 multipliziert auftreten würden; es ist also nur $\frac{\partial\gamma_0}{\partial\gamma}$ auszuschreiben und $\frac{\cos\frac{\gamma_0}{2}}{\sin^3\frac{\gamma_0}{2}}$ nach Taylor zu entwickeln, was nach (36) und (39) ohne alle Schwierigkeit geschieht. Die Mittelwertbildung liefert dann

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} &\int\!\!\int\frac{\partial(\gamma_0,\ \psi_0)}{\partial(\gamma,\ \psi)}\,\Xi\,\frac{d\Omega'}{4\pi} = -\frac{d}{d\gamma}\Big\{\operatorname{ctg}^2\frac{\gamma}{2} \\ &\qquad + \frac{\mu^2}{3}\Big[\Xi\Big(\overset{\approx}{B}_\vartheta + \overset{\approx}{B}_\varphi + 2\overset{\approx}{B}_\vartheta{}^{(0)} + \frac{(\widetilde{B}_\varphi)^2}{2}\operatorname{ctg}\gamma\Big) \\ &\qquad - \frac{1}{2}\frac{d}{d\gamma}\,\Xi(\widetilde{B}_\vartheta + \widetilde{B}_\varphi)^2\Big]\Big\}. \end{aligned}\right.$$

Dabei haben wir von (35) Gebrauch gemacht und zur Abkürzung

$$(41)\qquad \frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin^3\frac{\gamma}{2}} = \Xi$$

gesetzt.

Mit dieser Formel ist der wesentliche Teil der Verteilungsfunktion (22) gewonnen und es brauchen nur noch die bestimmten Integrale $\widetilde{\widetilde{B}}_\vartheta$ usw. ausgerechnet zu werden, worüber wir im nächsten Paragraphen das Nötigste zusammenstellen. — Der Einfluß der Störungsfunktion äußert sich in dem Gliede $2\widetilde{\widetilde{B}}_\vartheta^{(0)}$.

§ 7. Ausführung von einigen bestimmten Integralen. Die Verteilungsfunktion, Schlußformel.

Das Integral $\widetilde{\widetilde{B}}_\vartheta^{(0)}$ (34) ist am einfachsten elementar zu lösen. Man hat dabei, ebenso wie in den übrigen Integralen, die Quadratwurzel zu Anfang *positiv* zu nehmen, da $d\beta_\vartheta$ ebenso wie dr zu Anfang negativ ist, und die Integration unter Zeichenwechsel über die Nullstelle des Radikanden zu führen. In (24), (38) bildet man am besten die komplexe r-Ebene durch

$$r = \frac{B}{A}(1 + i\varepsilon\,\mathfrak{Sin}\,\xi)$$

auf eine ξ-Ebene ab, in der man dann der Konvergenz halber den Integrationsweg auf die reelle Achse verschieben muß. Die Integrale nehmen darin die folgenden Gestalten an:

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned}
\widetilde{B}_\vartheta &= -\varkappa\frac{A^{3/2}}{B^2}\,\frac{\varepsilon^2-1}{\varepsilon^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\eta}{(1+i\varepsilon\,\mathfrak{Sin}\,\eta)^2(1+\mathfrak{Sin}^2\eta)}\\
\widetilde{B}_\varphi &= \varkappa\frac{A^{3/2}}{B^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\eta}{(1+i\varepsilon\,\mathfrak{Sin}\,\eta)^2},\\
\widetilde{\widetilde{B}}_\vartheta &= -\frac{3}{2}\varkappa^2\frac{A^3}{B^4}\,\frac{(\varepsilon^2-1)^{3/2}}{\varepsilon^4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\eta}{(1+i\varepsilon\,\mathfrak{Sin}\,\eta)^2(1+\mathfrak{Sin}^2\eta)^2},\\
\widetilde{\widetilde{B}}_\varphi &= \varkappa^2\frac{A^3}{B^4}\,\frac{(\varepsilon^2-1)^{1/2}}{\varepsilon^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\eta}{(1+i\varepsilon\,\mathfrak{Sin}\,\eta)^2(1+\mathfrak{Sin}^2\eta)}\,.
\end{aligned}\right.$$

Sie lassen sich durch Partialbruchzerlegung auf die Normalform

$$(43)\quad J(a,\varepsilon) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\eta}{a+i\varepsilon\,\mathfrak{Sin}\,\eta} = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon^2-a^2}}\operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{\varepsilon^2-a^2}}{a}\quad (a=1)$$

zurückführen. Bequemer und kürzer ist es aber, daneben eine zweite Normalform

$$(43')\quad I(a,\varepsilon) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\eta}{(a+i\varepsilon\,\mathfrak{Sin}\,\eta)(1+\mathfrak{Sin}^2\eta)} = \frac{\varepsilon^2 J(a,\varepsilon)-2a}{\varepsilon^2-a^2}$$

einzuführen und die fraglichen Integrale daraus unter Benutzung der Beziehungen

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial J(a,\varepsilon)}{\partial a} &= \frac{a\,J(a,\varepsilon)-2}{\varepsilon^2-a^2}, \\ \frac{\partial I(a,\varepsilon)}{\partial a} &= \frac{3a\,\varepsilon^2 J(a,\varepsilon)-4\varepsilon^2-2a^2}{(\varepsilon^2-a^2)^2}, \\ \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 I(a,\varepsilon)}{\partial a^2} &= \frac{\frac{3}{2}\varepsilon^4 J(a,\varepsilon)+6a^2\varepsilon^2 J(a,\varepsilon)-13a\,\varepsilon^2-2a^3}{(\varepsilon^2-a^2)^3} \end{aligned}\right.$$

durch Differentiation nach a und Übergang zu $a=1$ abzuleiten. Nach (38) kann man auch $\tilde{\tilde{B}}_\vartheta$ aus $\tilde{\tilde{B}}_\varphi$ (nach Abspaltung von $\alpha_\vartheta{}^0=\sqrt{C}$) durch Differentiation nach C (über ε^2) gewinnen. — Wir finden so

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} \tilde{B}_\vartheta &= \quad \varkappa\,\frac{A^{3/2}}{B^2\,\varepsilon^2(\varepsilon^2-1)}\,[3\varepsilon^2 J(1,\varepsilon)-4\varepsilon^2-2] \\ \tilde{B}_\varphi &= -\varkappa\,\frac{A^{3/2}}{B^2\,\varepsilon^2(\varepsilon^2-1)}\,[\varepsilon^2 J(1,\varepsilon)-2\varepsilon^2] \\ \tilde{\tilde{B}}_\vartheta &= -\varkappa^2\,\frac{A^3}{B^4\,\varepsilon^2(\varepsilon^2-1)^{3/2}}\Big[\frac{15}{4}\varepsilon^2(\varepsilon^2+6)\,J(1,\varepsilon) \\ &\qquad\qquad -\frac{81}{2}\varepsilon^2-14+\frac{2}{\varepsilon^2}\Big], \\ \tilde{\tilde{B}}_\varphi &= \quad \varkappa^2\,\frac{A^3}{B^4\,\varepsilon^2(\varepsilon^2-1)^{5/2}}\Big[\frac{3}{2}\varepsilon^2(\varepsilon^2+4)\,J(1,\varepsilon)-13\varepsilon^2-2\Big], \\ \tilde{\tilde{B}}_\vartheta{}^{(0)} &= \quad \varkappa^2\,\frac{A^3}{B^4\,\varepsilon^2(\varepsilon^2-1)^{5/2}}\,[\varepsilon^2(\varepsilon^2+5)\,J(1,\varepsilon)-10\varepsilon^2-2]. \end{aligned}\right.$$

In derselben Variablen ist [vgl. (41), (21)].

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned} \varXi &= \varepsilon^2\sqrt{\varepsilon^2-1} = -\frac{d\,\varepsilon^2}{d\gamma}, \\ \frac{(\tilde{B}_\varphi)^2}{2}\,\mathrm{ctg}\,\gamma &= \varkappa^2\,\frac{A^3}{B^4}\,\frac{(\varepsilon^2-2)\left(\frac{1}{2}J(1,\varepsilon)-1\right)^2}{(\varepsilon^2-1)^{5/2}}. \end{aligned}\right.$$

Die Differentiation nach γ wird natürlich nach (21) über ε ausgeführt:

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{2}\,\frac{d}{d\gamma}\,\varXi(\tilde{B}_\vartheta+\tilde{B}_\varphi)^2 &= \varkappa^2\,\frac{A^3}{B^4\,\varepsilon^2(\varepsilon^2-1)^2}\,[\varepsilon^4 J(1,\varepsilon)^2(3\varepsilon^2+2) \\ &\quad -4\varepsilon^4 J(1,\varepsilon)(\varepsilon^2+4)+\varepsilon^6+12\varepsilon^4+9\varepsilon^2-2]. \end{aligned}\right.$$

Den Faktor

$$\frac{\mu^2\,\varkappa^2 A^3}{B^4} = \frac{\mu^2 M^2 m_a{}^2 v^6}{e^6 Z^4 Z'^2 c^2}$$

setzen wir gleich $\sigma^2 M^2 Z^{-4} v^6$, indem wir

$$(48)\quad \sigma = \frac{\mu\,m_a}{e^3 Z' c} = 9{,}34\cdot 10^{-27}\left(\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}}\right)^{-3}$$

einführen. Dann haben wir im Ganzen

$$(49)\quad \begin{cases} \frac{\mu^2}{3}\Big[\Xi\big(\widetilde{\widetilde{B}}_\vartheta + \widetilde{\widetilde{B}}_\varphi + 2\,\widetilde{\widetilde{B}}_\vartheta{}^{(0)} + \frac{(\widetilde{B}_\varphi)^2}{2}\operatorname{ctg}\gamma\big) - \frac{1}{2}\,\frac{d}{d\gamma}\,\Xi(\widetilde{\widetilde{B}}_\vartheta + \widetilde{\widetilde{B}}_\varphi)^2\Big] \\ \qquad = -\frac{\sigma^2}{3(\varepsilon^2-1)^2}\Big[1 + \frac{13}{2}\varepsilon^2 - \frac{\varepsilon^2 J(1,\varepsilon)}{4}(11\,\varepsilon^2 + 46) \\ \qquad + \frac{\varepsilon^2 J^2(1,\varepsilon)}{4}(11\,\varepsilon^2 + 10)\Big], \end{cases}$$

und nach der unter (40) vorgeschriebenen, zweiten Differentiation nach γ die *Schlußformel*[1])

$$(50)\qquad dN = \frac{n\,n'\,l\,q\,e^4\,Z^2\,Z'^2\,d\,f}{4\,R^2\,m_\alpha{}^2\,v^4\,\sin^4\frac{\gamma}{2}}\Big[1 + \sigma^2 v^6\,\frac{M^2}{Z^4}\,f(\gamma)\Big].$$

M bedeutet, um noch einmal zusammenzufassen, die Magnetonenzahl gemäß Schluß der Einleitung, $M = 0$ ergibt die bekannte Formel von Rutherford[2]); Z ist die Kernladungszahl, v die Geschwindigkeit der α-Strahlen, σ die Naturkonstante (48) und $f(\gamma)$ die nachfolgende Transzendente:

$$(51)\quad \begin{cases} f(\gamma) = \frac{1}{3}\operatorname{tang}^6\frac{\gamma}{2}\Big[20 + \frac{37}{4}\operatorname{cosec}^2\frac{\gamma}{2} \\ \quad - \frac{\pi-\gamma}{2}\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}\Big(\frac{11}{4}\operatorname{cosec}^4\frac{\gamma}{2} + \frac{113}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{\gamma}{2} + 33\Big) \\ \quad + \Big(\frac{\pi-\gamma}{2}\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}\Big)^2\Big(11\operatorname{cosec}^4\frac{\gamma}{2} + 42\operatorname{cosec}^2\frac{\gamma}{2} + 10\Big)\Big]. \end{cases}$$

Diese Funktion hat folgenden Verlauf (wir tabulieren sie bis über $\pi/2$ hinaus, da Messungen bis 150° vorliegen):

Tabelle 1.

γ	$f(\gamma)$	γ	$f(\gamma)$
0°	0,00000	90°	0,107
10°	− 0,00039	100°	0,129
20°	− 0.00069	110°	0,150
30°	+ 0,00192	120°	0,170
40°	0,00946	130°	0,186
50°	0,0222	140°	0,200
60°	0,0396	150°	0,210
70°	0 0605	160°	0,218
80°	0,0838	170°	0,223
90°	0,107	180°	0,224

---

[1] Man erhält formal dN mit dem negativen Vorzeichen; denn da p_0 und γ ungleichändrig sind, bilden sich Bereiche der „Eintrittsöffnung“ des § 2 auf der Beobachtungsfläche mit verkehrtem Umlaufssinne ab.

[2] E. Rutherford, a. a. O.

Die Werte sind meist nach der vollständigen Formel mit der Maschine berechnet, da die Reihenentwicklungen schlecht konvergieren, und gelegentlich graphisch etwas ausgeglichen. Für $\gamma \to \pi$ verschwindet der Klammerausdruck, so daß $f(\gamma)$ endlich bleibt. Die Funktion verhält sich dann wie

$$(52) \quad f(\gamma) = 0{,}22434 - 0{,}20656 \operatorname{ctg}^2 \frac{\gamma}{2} + 0{,}14569 \operatorname{ctg}^4 \frac{\gamma}{2} \cdots$$

Für sehr *kleine* Werte von γ gilt dagegen

$$(53) \quad f(\gamma) = \operatorname{secans}^6 \frac{\gamma}{2} \cdot (-0{,}1700\,\gamma^3 + 0{,}8154\,\gamma^4 - 1{,}2844\,\gamma^5 \cdots).$$

Durch das magnetische Zusatzfeld werden also die Szintillationen von kleineren Winkeln nach größeren zusammengeschoben. Dabei muß natürlich $\int dN$ unverändert bleiben, d. h. die Integrale über die Koeffizienten der μ müssen verschwinden. Das unbestimmte Integral über unsere Zusatzfunktion: $\int f(\gamma) \dfrac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin^3\frac{\gamma}{2}}\, d\gamma$ haben wir in dem Ausdrucke (49), der soeben nach γ differentiiert wurde, bereits vor uns. Setzen wir die Grenzen $\gamma = 0$; $\gamma = \pi$, das ist $\varepsilon = \infty$, $\varepsilon = 0$ ein, so verschwindet dieser Ausdruck in der Tat bis auf das „Störungsglied" $\overset{\approx}{B}_\vartheta^{(0)}$, das bei $\gamma = \pi$ einen positiven Beitrag liefert. Man darf also nicht bis $\gamma = \pi$ integrieren, und der Grund ist offenbar, daß die Rückkehr auf der eigenen Bahn, die in der klassischen Theorie ein α-Teilchen erfährt, das genau auf einen Kern zufliegt, beim Vorhandensein eines Magnetfeldes nicht mehr vorkommt, oder wenigstens nur, wenn außerdem die Achse des Feldes in der Strahlrichtung liegt. — Es erübrigt sich noch, zu sagen, daß man die Integration strenggenommen auch nicht bei $\gamma = 0$ anfangen lassen darf (in dem Hauptgliede schon aus Konvergenzgründen nicht), weil dem $p_0 = \infty$ entsprechen würde; sondern bei einem Minimalwerte von γ entsprechend $p_0^2 \pi = q$.

§ 8. Die Größenordnung des Effektes.
Messungen von Chadwick, von Geiger und Marsden, von Bieler und von Rutherford.

Der Größe von M ist eine obere Grenze gesetzt dadurch, daß α-Strahlablenkungen fast unter allen Winkeln beobachtet sind und daß mithin für die entsprechenden Werte des Kernabstandes p_0 eines stoßenden Teilchens im Elementarprozeß ein Perihel existieren muß. Die beiden positiven Wurzeln von $g(r)$ in (4) müssen also reell sein und dürfen höchstens zusammenfallen, was zur Voraussetzung hat (Nichtverschwinden der Diskriminante von $g(r)$:

$$(54)\quad \left\{ \begin{aligned} D \leqq \frac{2}{27}\,\frac{B}{A^2}\Big[&9\,A\,C + 8\,B^2 \\ &+ \sqrt{(9\,A\,C + 8\,B^2)^2 + 27\,\frac{A^2\,C^2}{B^2}(B^2 + A\,C)}\Big]. \end{aligned} \right.$$

Alle Größen sind positiv. Wir können uns für das Nächstfolgende mit der *hinreichenden* Bedingung begnügen

$$D \leqq 2 \cdot \frac{2}{27}\,\frac{B}{A^2}(9\,A\,C + 8\,B^2),$$

d. i. nach der Formeltabelle und mit den Werten (8) für $\alpha_\varphi{}^0$, $\alpha_\vartheta{}^0$:

$$M \leqq \frac{2}{27}\,\frac{e\,Z\,c}{\mu\,m_a{}^2\,v^5}\left(9\,m_a{}^2\,v^4\,p_0 + \frac{8\,e^4\,Z^2\,Z'^2}{p_0}\right),$$

und zwar muß M kleiner (gleich) dem *Minimum* sein der rechten Seite als Funktion von p_0 betrachtet:

$$(55)\qquad M \leqq \frac{4}{3}\sqrt{\frac{8}{9}}\,\frac{e^3\,c\,Z'\,Z^2}{\mu\,m_a\,v^3},$$

d. i. für die gebräuchliche Geschwindigkeit $v = 1{,}69 \cdot 10^9$ cm/sec ($R\,a\,C$) rund

$$(56)\qquad M \leqq \frac{1}{35}\,Z^2.$$

Mindestens von Rubidium an ($Z = 37$) kann also nach dieser Abschätzung die Magnetonenzahl die Kernladungszahl erreichen, ohne daß die α-Partikel in den Kern stürzt.

Nehmen wir, indem wir in (55) den Wert von v offen lassen,

$$\frac{v^3\,M}{Z^2} \leqq 0{,}135 \cdot 10^{37},$$

so finden wir für das Zusatzglied, das in (50) neben der Einheit erscheint, mit (48)

$$\sigma^2\,v^6\,\frac{M^2}{Z^4}\,f(\gamma) \leqq 1{,}59\,f(\gamma).$$

Das würde bei Ablenkungswinkeln von 10 bis 20 Grad, mit denen die bisher präziseste Bestimmung der Kernladungszahl von **Chadwick**[1]) arbeitet, nach der Tabelle von $f(\gamma)$ den Wert von Z höchstens um ein Pro*mille* fälschen. Nun sind aber die Messungen **Chadwicks** von Z nur auf ein Pro*zent* sicher; man kann also nach seiner Methode auch das größtmögliche magnetische Moment der Atomkerne *sicher nicht* nachweisen.

Größer sind die Chancen, wie schon ein Blick auf die Tabelle von $f(\gamma)$ lehrt, bei Beobachtungen unter großem Ablenkungswinkel; denn wegen des starken Abfalls der Ablenkungen mit wachsendem Winkel macht sich der Zuwachs unter großen Winkeln prozentual viel stärker bemerkbar, als die korrespondierende Abnahme unter kleinen. Solche Messungen, die bis zu Winkeln von 150° reichen, liegen von **Geiger** und **Marsden** vor.[2]) Um sie für unsere Zwecke auszuwerten, müssen wir davon ausgehen, daß die Funktion $f(\gamma)$, eben weil das Integral über den Zusatzeffekt verschwindet, eine Nullstelle hat (bei $\gamma = 24{,}64^0$). An dieser Stelle ist der magnetische Zusatzeffekt auch in *zweiter* Näherung gleich Null, die Ablenkung die klassische. Wenn wir also mit **Geiger** und **Marsden** die beobachteten Werte von $dN \cdot \sin^4 \frac{\gamma}{2}$ als Funktion von γ aufzeichnen, so haben wir *ohne* Magnetismus *Konstanz* dieses Produktes zu erwarten, d. h. eine Parallele zur Abszissenachse in einem Abstande b; *mit* Magnetismus eine Kurve $b\left(1 + \sigma^2 v^6 \frac{M^2}{Z^4} f(\gamma)\right)$, die diese Parallele bei 24,64° aufsteigend schneidet, für kleinere Winkel (unmerklich) darunter, für größere darüber liegt, und wir können die schwer bestimmbare Konstante b fortschaffen, indem wir die Kurve so legen, daß sie bei 24,64° möglichst gut mit den Beobachtungen zusammenfällt. Praktisch bedeutet das, daß sie bei kleineren Winkeln in die klassische Kurve übergeht.

In Fig. 4 ist das für eine Meßreihe von **Geiger** und **Marsden** an Silber, die ein Typus für einige weitere, sehr ähnliche ist, durchgeführt; da die Messungen nicht auf diesen Zweck zugeschnitten sind, insbesondere die Szintillationszahl nicht gerade für 24,64° angegeben und an dieser Stelle schwer zu interpolieren ist, kann die Figur nur die qualitativen Verhältnisse anschaulich machen. Es dürfte ziemlich deutlich daraus hervorgehen, daß der entschiedene *Gang* der durch Kreise angedeuteten Beobachtungspunkte den ausgezogenen, magnetischen Kurven ungefähr *entgegengesetzt* verläuft! Dies Verhalten, nämlich daß die beobachteten Werte von $d N \cdot \sin^4 \frac{\gamma}{2}$ mit wachsendem Winkel *unter* den Wert von 24,64° sinken,

---

[1]) J. **Chadwick**, Phil. Mag. (VI) **40**. S. 734. 1920.

[2]) H. **Geiger** und E. **Marsden**, Phil. Mag. (VI) **25**. S. 604. 1913. — In der von uns benutzten Tabelle II ist zweimal der Spaltenkopf verdruckt: es muß statt $N/\sin^4 \Phi/2$ heißen: $N \cdot \sin^4 \Phi/2$, wie in Tabelle I.

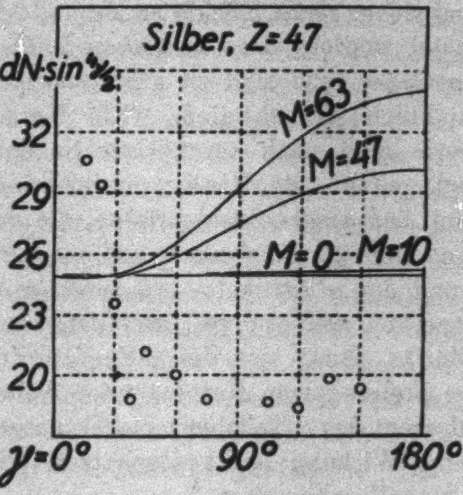


Fig. 4.

schließt es aus, daß der Gang überhaupt etwas mit dem gesuchten, magnetischen Effekte zu tun hat. Er ist hier wahrscheinlich im Sinne von Geiger und Marsden, die ihn ebenfalls bemerken, auf Unsymmetrieen der Apparatur zurückzuführen. Wie man ferner aus den linker Hand angeschriebenen Zahlen sieht, beträgt die Streuung der Beobachtungswerte mehr als $20\,^0/_0$ um den Mittelwert. Diese Schwankung ist gering gegenüber der Schwankung des $\operatorname{cosec}^4 \gamma/2$ zwischen 15° und 150°, aber vom selben Betrage wie die Maximalabweichung, die selbst das größte, nach (56) zulässige Moment von 63 Magnetonen hervorbringen würde. Solche Momente, die durch zahlreiche, höherquantige Außenelektronen des Atoms kompensiert sein müßten, sind natürlich durch nichts wahrscheinlich gemacht.

Das magnetische Zusatzglied der Formel (50) geht aber mit Z^{-4}; daher müßten sich sehr viel plausiblere Momente, schon 2 bis 3 Magnetonen, bei den *leichten* Elementen nachweisen lassen. Z. B. beträgt bei Magnesium, $Z = 12$, das magnetische Zusatzglied $\sigma^2 v^6 M^2/Z^4 \cdot f(\gamma) \sim 0{,}1\, M^2 f(\gamma)$, also für $M = 2$, $\gamma = 130-150^\circ$, $f(\gamma) \sim 0{,}2$ etwa 8%, für $M = 3$ etwa 18%, während die in der Einleitung ausgeschlossene Mitbewegung des Kernes nach einer Rechnung von G. Darwin[1]) immer nur erst etwa 1% ausmachen würde. Tatsächlich sind erhebliche und sicher reelle Effekte an Mg und Al von E. S. Bieler[2]) beobachtet worden; *aber auch diese laufen entgegengesetzt wie die magnetischen* und sind zu groß, unerachtet sie ihnen fast spiegelbildlich ähnlich sind. (Ein Vorzeichenfehler in unserer Theorie muß nach sorgfältiger Nachprüfung für unwahrscheinlich gelten.) Mr. Bieler deutet seine Kurven durch Annahme von *anziehenden* Zusatzkräften, die schneller als $1/r^2$ abnehmen und kommt dabei auch auf *magnetische* Kräfte — des Kernes und der α-Partikel — zu sprechen, die er verwirft mit dem Bemerken, daß es eines „ziemlich künstlichen Mechanismus“ bedürfte, damit sich die α-Partikel immer gerade in die *attraktive* Stellung zum Kerne setzte. Wir haben ein magnetisches Moment des α-Teilchens bisher ausgeschlossen, doch läßt sich seine Wirkung leicht abschätzen. Sein Vorhandensein würde eine Zusatzkraft

$$\mathfrak{K} = (\mathfrak{m} \nabla) \mathfrak{H}$$

des Magnetfeldes $\mathfrak{H}$ des Kernes auf das Moment $\mathfrak{m}$ der Partikel bedeuten und diese Kraft würde klassisch eine (bis auf Glieder mit μ) reguläre Präzession, quantentheoretisch parallele und antiparallele Einstellung der α-Partikel in bzw. um die Richtung der magnetischen Feldstärke bewirken. Da aber parallele und antiparallele Einstellung bzw. Rechts- und Linkspräzession statistisch gleichhäufig sind (Stern-Gerlach-Effekt), würde sich in erster Näherung wieder alles herausmitteln und erst eine Wirkung proportional μ zu beobachten sein. Nun ist bereits $\mathfrak{H}$ proportional μ, $\mathfrak{K}$ zu μ^2; *Magnetismus der α-Teilchen würde sich also erst in Gliedern mit μ^3 äußern.* Die Beobach-

---

1) G. Darwin, Phil. Mag. (VI) 27. S. 499. 1914.

2) E. S. Bieler, Proc. Roy. Soc. (A) 105. S. 434. 1924.

tungen Mr. Bielers lassen also darauf schließen, daß ein etwa vorhandenes, magnetisches Feld bei den Kernen der Leichtmetalle mindestens durch andere Kräfte *weitaus überkompensiert* wird.

In demselben Sinne deuten sich neueste, dem Verfasser kurz vor Abschluß dieser Arbeit bekannt werdende Versuche Rutherfords[1]), in denen statt des Ablenkungswinkels die Primärgeschwindigkeit der α-Strahlen bei einem festen Winkel von 90 und 135° variiert wird. Ein ausgesprochenes *Minimum* der Zerstreuung für gewisse Geschwindigkeiten bei einem gegenüber dem klassischen *verkleinerten* statt, wie magnetisch zu erwarten, *vergrößerten* Effekte ist unvereinbar mit dem v^6-Gesetze unserer Formel (50). — Zusammenfassend stellen wir fest:

> Magnetische Momente der Atomkerne sind, wenn sie keine Vorzugsrichtung haben, durch α-Strahlablenkung in erster Ordnung (proportional dem Momente) *prinzipiell nicht nachweisbar*; in zweiter Ordnung würde sich ihr Vorhandensein in einer *Zusammenschiebung* der Ablenkungen *von kleineren nach größeren Winkeln* bemerkbar machen. — Der *Betrag* der Änderung geht mit der sechsten Potenz der Primärgeschwindigkeit der α-Strahlen und mit der minus vierten Potenz der Kernladungszahl und ist prozentual am größten bei großen Ablenkungswinkeln. Bei den *Schwermetallen* (Ag) ist er auch bei den größten Momenten, die mit der Existenz eines Bahnperiheles im Elementarakte der Ablenkung vereinbar sind und die sich auf zahlreiche Bohrsche Magnetonen belaufen, nur erst *von der Größe der Beobachtungsfehler*. Bei den *Leichtmetallen* (Mg, Al) würden Momente von der Größenordnung einer Bohrschen Einheit *bequem beobachtbar* sein. Die Experimente zeigen aber Zusatzkräfte wahrscheinlich anziehender, zentralsymmetrischer Natur an, die die erst in zweiter Ordnung beobachtbaren, magnetischen mindestens weitaus überkompensieren.

Jena, Physikalisches Institut der Universität, Nov. 1925.

---

[1]) E. Rutherford, Phil. Mag. (VI) 50. S. 889. 1925.

(Eingegangen 27. November 1925.)

Namenregister zum Jahrgang 1925.

A.

Auer, Hermann, Die Strahlungsemission im Vakuum 77, 758.

B.

Back, E, Über den Zeemaneffekt des Neons 76, 317.

Baerwald, H., Elektronenreflexion in Gasen (Untersuchung von Wasserstoff) 76, 829.

Barratt, T. und **R. M. Winter**, Das thermische Leitvermögen von Drähten und Stäben 77, 1.

Barratt, S. L., Notiz über die molekularen magnetischen Momente in Reiches Theorie des Paramagnetismus 77, 98.

Bechert, K. und **L. A. Sommer**, Über das Bogenspektrum des Nickels 77, 351.

Bechert, Karl, Struktur des Ni-Spektrums, II. 77, 537.

Becker, A., Die lichtelektrische Wirkung der Gesamtstrahlung fester Körper 78, 83. — Der Geschwindigkeitsverlust mittelschneller Kathodenstrahlen in Metallen aus direkten Messungen und aus Absorptionsversuchen. (Hierzu Tafel II und III) 78, 209. — Über die Geschwindigkeit der sekundären Kathodenstrahlung 78, 228. — Über die Rückdiffusion, Reflexion und Sekundärstrahlenerregung langsamer Kathodenstrahlen 78, 253.

Becker, Gertrud, Über die Dispersion der elektrischen Doppelbrechung einiger organischer Flüssigkeiten 76, 849.

Berthold, R., Über die photographische und die ionisierende Wirkung von Röntgenstrahlen verschiedener Wellenlänge 76, 409.

Blüh, Otto, Untersuchung von Kolloidpartikeln in Wechselfeldern verschiedener Frequenzen 78, 177.

Blunck, R. und **P. P. Koch**, Über die Ermittlung der Intensitätsverhältnisse in Debye-Scherrer-Ringen. Anwendung auf die Erforschung des photographischen Prozesses. (Hierzu Tafel II) 77, 477.

Borelius, G., Die Elektrizitätsleitung in Mischkristallegierungen 77, 109.

Born, M. und **J. Franck**, Bemerkungen über die Dissipation der Reaktionswärme 76, 225.

Braunbek, Werner, Bemerkungen zur Arbeit des Hrn. Joh. **Dejmek**: „Wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungen zur Verzögerungszeit bei Funkenentladungen“ 78, 423.

Bungarts, E., Beitrag zur Kenntnis des Sauerstoff- und Schwefelspektrums 76, 709.

Busse, Wilhelm, Über wasserfallelektrische Trägerbildung bei reinem Wasser und Salzlösungen und über deren Oberflächenbeschaffenheit 76, 493.

C.

Cittert, P. H. van, Zur Messung der Feinstruktur der Wasserstofflinien mit der Lummer-Gehrcke-Platte 77, 372.

D.

Dasannacharya, Balabail, Über die freien Weglängen der Lichterregung und ihre Störungen bei Wasserstoffatomen. (Hierzu Tafel V) 77, 697.

Dejmek, Johann, Wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungen zur Verzögerung bei Funkenentladungen 77, 667.

Deutsch, Walter, Spitzenentladung und elektrischer Wind. (Hierzu Tafel XI) 76, 729.

Dorno, C. und K. Kähler, Über die Elektrisierung von Wasser, Schnee und anderen festen Substanzen durch feinste Zerstäubung 77, 71.

Döpel, Robert, Elektromagnetische Analyse von Kanalstrahlen 76, 1.

E.

Eisele, Irmgard, Über die Abhängigkeit des Brechungsexponenten einiger organischer Flüssigkeiten vom Druck 76, 396.

Elias, G. J., B. v. d. Pol jr. und B. D. H. Tellegen, Das elektrische Feld einer Triode 78, 370.

F.

Feick, Rudolf, Über die Farbe von kolloidalem Silber und Quecksilber 77, 673.

Franck, J. und M. Born, Bemerkungen über die Dissipation der Reaktionswärme 76, 225.

Francke, Charlotte, Über die Druckabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten einiger organischer Flüssigkeiten bis 800 Atmosphären 77, 159.

Friese, I. und E. Waetzmann, Bemerkungen zu der Arbeit des Hrn. **Arthur von Hippel**: „Die Theorie des Thermomikrophons“ 76, 39.

Frohnmayer, W. und R. Glocker, Über die röntgenspektroskopische Bestimmung des Gewichtsanteils eines Elementes in Gemengen und Verbindungen 76, 369.

Fues, E., Bemerkungen zum spektroskopischen Verschiebungssatz I 76, 299.

G.

Gans, Richard, Strahlungsdiagramme ultramikroskopischer Teilchen 76, 29. — Die molekulare Lichtzerstreuung in festen isotropen Körpern und Flüssigkeiten 77, 317. — Mikroskopische Probleme 78, 1.

Gehrcke, E. und E. Lau, Über das Wasserstoffspektrum. (Hierzu Tafel X) 76, 673.

Gehrcke, E., Bemerkungen über die Arbeit von Hrn. **van Cittert**: „Zur Messung der Feinstruktur der Wasserstofflinien mit der Lummer-Gehrcke-Platte 78, 461.

Geiss, W., Dichtebestimmungen an Steinsalzkristallen 76, 403.

Geiss, W. und J. A. M. van Liempt, Dichteänderungen des Wolframs mit der Bearbeitung 77, 105.

Gerlach, Walter, Atomstrahlen. Zur Nomenklatur 76, 106. — Über die Richtungsquantelung im Magnetfeld II. Experimentelle Untersuchungen über das Verhalten normaler Atome unter magnetischer Kraftwirkung. (Hierzu Tafel IV und V) 76, 163.

Gerthsen. C. und W. Kossel, Prüfung von *D*-Leuchten, das von einem nahezu parallelen Elektronenbündel angeregt ist, auf Polarisation 77, 273.

Glaser, A., Über die beim Magnetismus der Gase beobachtete Anomalie 78, 641.

Gleich, von Gerold, Perihelbewegung bei veränderlicher Masse 78, 498.

Glocker, R. und W. Frohnmayer, Über die röntgenspektroskopische Bestimmung des Gewichtsanteils eines Elementes in Gemengen und Verbindungen 76, 369.

Gmelin, P., Über einige Anwendungen von Thermoelementen in der Meßtechnik der chemischen Großindustrie 76, 198.

Grenacher, Max, Über die Druckabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten organischer Flüssigkeiten 77, 138.

Groth, Wilhelm, Eine besondere Form der Glimmentladung im transversalen Magnetfeld 78, 680.

Gündel, Bernhard, Beiträge zur Frage d. Wärmekonvektion 78, 697.

H.

Hagen, G., Versuche über den Comptoneffekt. (Hierzu Tafel IV) 78, 407.

Hansen, G., Die Feinstruktur der Balmerlinien. (Hierzu Tafel V und VI) 78, 558.

Hebeisen, Josef, Über die Kompressibilität einiger organischer Flüssigkeiten 77, 216.

Herrmann, Kurt, Über den Einfluß der Gasbeladung auf die lichtelektrische Elektronenemission und die elektrische Leitfähigkeit des Platins 77, 503.

Herzfeld, K. F. und K. L. Wolf, Prüfung der klassischen Dispersionsformel an einatomigen Gasen und Dämpfen 76, 71. — Berichtigung zu der Arbeit: „Prüfung der klassischen Dispersionsformel an einatomigen Gasen und Dämpfen“ 76, 567. — Die Dispersion von Kaliumchlorid und Natriumchlorid 78, 35. — Die Molekularrefraktion einfacher Verbindungen 78, 195.

Heymanns, P., Bemerkung zur Arbeit des Hrn. Ramspeck: „Anomalien der accidentellen Doppelbrechung beim Zelluloid“ 77, 587.

Hippel, Arthur v., Experimentelle Untersuchung des Thermomikrophones 76, 590.

Hoffmann, Freda, Über Beschleunigung von Kanalstrahlen 77, 302.

I.

Ignatowsky, W. v., Zur Theorie der Beugung an schwarzen Schirmen und Erwiderung an F. Kottler 77, 589.

J.

Jaffé, George, Zur statistischen Mechanik nicht ergodischer Systeme 76, 680.

Janicki, L., Über die Balmerserie des Wasserstoffs. (Hierzu Taf. IX) 76, 561.

Jobst, G., Zur Farbentheorie kolloidaler Metallsuspensionen 76, 863. — Diffuse Strahlung dielektrischer Kugeln im Grenzfalle, daß Kugelmaterial und umgebendes Medium fast gleiche Brechungsindices haben 78, 157.

Johansson, C. H., Die thermische Ausdehnung einiger binärer Mischkristallreihen 76, 445. — und J. O. Linde, Röntgenographische Bestimmung der Atomanordnung in den Mischkristallreihen Au-Cu und Pd-Cu. (Hierzu Taf. V) 78, 439.

K.

Kähler, K. und C. Dorno, Über die Elektrisierung von Wasser, Schnee und anderen festen Substanzen durch feinste Zerstäubung 77, 71.

Kirchner, Fritz, Über die Glimmentladung bei schnell wechselndem Feld 77, 287. — Über die Leuchtdauer der Röntgenstrahlen (Münchener Habilitationsschrift) 78, 277. — Bemerkungen zur vorstehenden Arbeit des Hrn. G. Hagen 78, 421.

Koch, P. P. und R. Blunck, Über die Ermittlung der Intensitätsverhältnisse in Systemen von Debye-Scherrer-Ringen. Anwendung auf der Erforschung des photographischen Prozesses. (Hierzu Tafel II) 77, 477. — und H. Vogler, Über die Ausscheidung von Silber aus Silberhalogeniden durch intensive Belichtung. (Hierzu Tafel III u. IV) 77, 495.

Kockel, Lilli, Die Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstante wäßriger Lösungen von der Temperatur 77, 417.

Kopfermann, H. und R. Ladenburg, Elektrische Untersuchungen am Natriumdampf. (Anomale elektr. Doppelbrechung; Starkeffekt an der Resonanzstrahlung) 78, 659.

Kossel, W. und C. Gerthsen, Prüfung von *D*-Leuchten, das von einem nahezu parallelen Elektronenbündel angeregt ist, auf Polarisation 77, 273.

Krüger, F. und O. Utesch, Über die Ozonbildung durch Elektronenstoß 78, 113. — und A. Sacklowski, Röntgenographische Untersuchungen an wasserstoffbeladenen Palladium-Silberlegierungen. (Hierzu Tafel I) 78, 72.

L.

Ladenburg, R. und H. Kopfermann, Elektrooptische Untersuchungen am Natriumdampf. (Anomale elektrische Doppelbrechung; Starkeffekt an der Resonanzstrahlung) 78, 659.

Landé, A., Zeemaneffekt bei Multipletts höherer Stufe 76, 273.

Lange, H., Eine einfache Röntgenapparatur für Kristallpulveruntersuchung nach Seemann und Bohlin zur Erreichung hoher Auflösung bei kurzer Belichtungszeit. (Hierzu Tafel VI) 76, 455. — Röntgenspektroskopische Untersuchung einiger Metallegierungen mittels der Methode von Seemann-Bohlin. (Hierzu Tafel VII) 76, 476.

Lau, E. und E. Gehrcke, Über das Wasserstoffspektrum. (Hierzu Tafel X) 76, 673. — Anregungsmaxima einiger Spektrallinien in den Schichten der positiven Säule des Wasserstoffs 77, 183.

Laue, M., Bemerkung zu K. **Zubers** Messung der Verzögerungszeiten bei der Funkenentladung 76, 261. — Zum Prinzip der mechanischen Transformierbarkeit (Adiabatenhypothese) 76, 619. — Über Röntgenstrahlinterferenzen an Mischkristallen 78, 167.

Lenz, Herbert, Über den Durchgang an Elektronen durch lichtelektr. empfindl. Kristalle 77, 449.

Linde, J. O. und **C. H. Johansson**, Röntgenographische Bestimmung der Atomordnung in den Mischkristallreihen Au-Cu und Pd-Cu. (Hierzu Tafel V) 78, 439.

Lindmannn, Karl F., Einige neue Versuche über die durch tetraedrische Molekülmodelle erzeugte Rotationspolarisation der elektromagnetischen Wellen 77, 337.

Liempt, J. A. M. v. und **W. Geiss**, Dichteänderungen des Wolframs mit der Bearbeitung 77, 105.

M.

Martin, Hans, Über Tonhöhe und Dämpfung der Schwingungen von Saiten in verschiedenen Flüssigkeiten 77, 727.

Marx, Erich, Elektrizitätsleitung, Ladungszahl, Beweglichkeit und thermische Ionisation in Flammengasen 76, 737. — Druckfehlerberichtigung zu meiner Arbeit: Elektrizitätsleitung, Ladungszahl, Beweglichkeit u. thermische Ionisation in Flammengasen 77, 336.

Meißner, K. W., Absorption im angeregten Neon. (Hierzu Tafel II) 76, 125.

O.

Obolensky, W. N., Über elektrische Ladungen in der Atmosphäre 77, 644.

Orthmann, Wilhelm, Über Stoßdämpfung der Quecksilberresonanzlinie 78, 601.

P.

Picht, Johannes, Über den Schwingungsvorgang, der einem beliebigen (astigmatischen) Strahlenbündel entspricht 77, 785.

Pol jr., B. van der, **G. J. Elias** und **B. D. H. Tellegen**, Das elektrostatische Feld einer Triode 78, 370.

R.

Ratz, E., Über den Einfluß von Seitenlöchern auf die Vorgänge im Innern einer zylindrischen Pfeife 77, 195.

Ray, Satyendra, Bemerkung zur Arbeit von **Yü Chen Yang**: „Über Messungen im Millikankondensator“ 77, 99.

Richter, Johann, Phasendifferenzmessungen an dünnen, durch Kathodenzerstäubung hergestellten Silber- und Kupferschichten 77, 81.

Rössiger, M. und **S. Valentiner**, Die Energieverteilung der Hefnerlampenstrahlung im sichtbaren Teile des Spektrums 76, 785.

Runge, C., Zum Paschen-Backeffekt 76, 266.

Rupp, E., Über das magnetische Verhalten der Phosphore 78, 505.

S.

Sacklowski, Alfred, Röntgenographische Strukturuntersuchungen einiger Legierungen. (Hierzu Tafel I) 77, 241. — und **F. Krüger**, Röntgenographische Untersuchungen von wasserstoffbeladenen Palladium-Silberlegierungen. (Hierzu Tafel I) 78, 72.

Salis, G. v., Die ersten Funkenspektren von Zink und Cadmium. (Hierzu Tafel III) 76, 145.

Schlomka, **Teodor**, Bemerkungen zu Hrn. C. **Ramsauers** Arbeit: „Über den unmittelbaren Nachweis der elektrischen Erdladung 78, 204.

Schmidt, **Karl**, Über die Bestimmung der Kompressibilität einiger organischer Flüssigkeiten 76, 571.

Schmieder, **Felix**, Über die Ökonomiekoeffizienten der Phosphore 77, 381.

Schottky, W., Eine Verallgemeinerung der **Fowler**schen Verteilungsstatistik 78, 434.

Schrödinger, E., Die wasserstoffähnlichen Spektren vom Standpunkte der Polarisierbarkeit des Atomrumpfes 77, 43. — Die Erfüllbarkeit der Relativitätsforderung in der klassischen Mechanik 77, 325.

Schüler, **Hermann**, Über die Feinstrukturen im ersten Li-Funkenspektrum 76, 292.

Schütz, W. und R. **Wachsmuth**, Der elektrodenlose Ringstrom 78, 57.

Sommer, L. A. und K. **Bechert**, Über das Bogenspektrum des Nickels 77, 351.

Sommerfeld, A., Über die Intensität der Röntgenlinien 76, 284.

Spanner, H. J., Nachtrag zur Arbeit: „Über die thermische Emission elektrisch geladener Teilchen 76, 444.

Stäger, A., Experimentaluntersuchungen über Kontaktelektrisierung von staub- und wolkenförmig zerteilten Körpern, speziell vom Schnee als gewitterbildenden Faktor 76, 49. — Weitere Untersuchungen über Kontaktelektrisierung bei feinzerteilten Körpern, besonders bei Schnee 77, 225.

Stark, J., Die Wellenlänge der Lichtemission der Kanalstrahlen 77, 16. — Ein gesetzmäßiger Zusammenhang zwischen den chemischen Elementen im Effekt des elektrischen Feldes auf ihre Serienlinie n 78, 425.

T.

Tafel, W., Beitrag zur Frage der Verfestigung beim Zug- und Druckversuch 78, 465.

Taubes, **Sophie**, Über die Bestimmung der langwelligen Grenze des lichtelektrischen Effektes an Quecksilber 76, 629.

Tellegen, B. D. H., B. v. d. **Pol** jr. und G. J. **Elias**, Das elektrostatische Feld einer Triode 78, 370.

Tomaschek, R., Über Versuche zur Auffindung elektrodynamischer Wirkung der Erdbewegung in großen Höhen I 78, 743.

Trautz, **Max** und W. **Weizel**, Bestimmung der inneren Reibung des Schwefeldioxydes und seiner Gemische mit Wasserstoff 78, 305.

U.

Utesch, O. und F. **Krüger**, Über die Ozonbildung durch Elektronenstoß 78, 113.

V.

Valentiner, S. und M. **Rössiger**, Die Energieverteilung der Hefnerlampenstrahlung im sichtbaren Teile des Spektrums 76, 785.

Vogler, H. und P. P. **Koch**, Über die Ausscheidung von Silber aus

Silberhalogeniden durch intensive Belichtung. (Hierzu Tafel III und IV) 77, 495.

W.

Wachsmuth, R. und W. Schütz, Der elektrodenlose Ringstrom 78, 57.

Waelsch, E., Rechnung mit Polsystemen; Kristallgruppen und Kristalldynamik. (Hierzu Taf. VIII) 76, 534.

Waetzmann, E. und I. Friese, Bemerkung zu der Arbeit des Hrn. **A. v. Hippel**: „Die Theorie des Thermomikrophons 76, 39.

Wataghin, Gleb, Über einige Periodizitätseigenschaften von mechanischen Systemen und Quantentheorie 76, 41.

Wawilow, S. J., Bemerkungen zur Arbeit von **Felix Schmieder**: „Über die Ökonomiekoeffizienten der Phosphore“ 78, 112.

Weizel, Walter und M. Trautz, Bestimmung der inneren Reibung des Schwefeldioxydes und seiner Gemische mit Wasserstoff 78, 305.

Wentzel, Gregor, Zum Termproblem der Dublettspektren, insbesondere der Röntgenspektren 76, 803.

Wessel, Walter, Zur Statistik der Oberflächenladungen in Lösungen organischer Elektrolyte 77, 21. — Sind magnetische Momente der Atomkerne durch α-Strahlablenkung nachweisbar? 78, 757.

Wien, Max, Über die Abhängigkeit der inneren Reibung und der elektrolytischen Leitfähigkeit wäßriger Lösungen von der Temperatur 77, 560.

Wien, W., Über das Leuchten der Kanalstrahlen bei hohen Drucken und die Frage der Verweilzeit. (Hierzu Tafel I) 76, 109. — Zur vorstehenden Arbeit von Frl. **Hoffmann**: „Über Beschleunigung von Kanalstrahlen“ 77, 318.

Wiesner, Siegbert, Zur Kenntnis der spezifischen Wärmen 76, 439. — Berichtigung 76, 802.

Winter, R. M. und T. Barratt, Das thermische Leitvermögen von Drähten und Stäben 77, 1.

Wolf, K. L. und K. F. Herzfeld, Prüfung der klassischen Dispersionsformel an einatomigen Gasen und Dämpfen 76, 71. — Berichtigung zu der Arbeit: „Prüfung der klassischen Dispersionsformel an einatomigen Gasen und Dämpfen“ 76, 567. — Die Dispersion von Kaliumchlorid und Natriumchlorid 78, 35. — Die Molekularrefraktion einfacher Verbindungen 78, 195.

Y.

Yang, Yü Chen, Über Messungen im Millikankondensator 76, 333.

Z.

Zuber, Kurt, Über die Verzögerungszeit bei der Funkenentladung 76, 281.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Elektromagnet nach Weiß
mit wassergekühlten Spulen

Max Kohl
Aktiengesellschaft
Chemnitz 2

Physikalische Apparate

Hörsaal- und Laboratorien-Einrichtungen

Funken-Induktoren

Sonderlisten auf Verlangen

STAATLICHE PORZELLAN
MANUFAKTUR BERLIN

PORZELLANE FÜR CHEMISCHE
UND TECHNISCHE ZWECKE
KATALOGE UND ANGEBOTE AUF VERLANGEN